UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Virtuelles Eingangstutorium
studiVEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn

FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

go.upb.de/studivemint

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Virtuelles Eingangstutorium
VEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

khd m
kompetenzzentrum
hochschuldidaktik
mathematik

LE 1 - Rechenregeln und -gesetze

1.1 Rechenregeln und -gesetze

Im Folgenden finden Sie die Abschnitte:

Übersicht ..... S. 1
Inhalte mit Erklärungen ..... S. 2
Aufgaben ..... S. 14
Anwendung ..... S. 17
Ergänzungen ..... S. 20

Übersicht

In dieser Lerneinheit werden Rechenregeln und -gesetze für die reellen Zahlen thematisiert. Hierbei geht es um

- Klammern und die Hierarchie der Rechenoperationen
- Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz

Inhalte mit Erklärungen

Aus der Schule kennen Sie bereits einige Zahlbereiche: die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ (z.B. $4, 5, 6, 12, 85235$), die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ (z.B.: $-3, -2, -1, 0, 1, \ldots$), die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ (z.B.: $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}$) und die reelle Zahlen $\mathbb{R}$ (z.B.: $\sqrt{2}, \pi, e$). Auf die rationalen Zahlen werden wir im Kapitel *Bruchrechnung* in der Lerneinheit *Rechnen mit rationalen Zahlen* genauer eingehen und die reellen Zahlen stellen wir im Kapitel zu *Wurzeln* in der Lerneinheit *Potenzen, Wurzeln, Logarithmen* noch genauer vor. Wir konzentrieren uns in dieser Lerneinheit zunächst auf elementare Rechenregeln für alle Zahlen.

Für die Zahlbereiche ist es gebräuchlich die folgenden Symbole zu schreiben:

- $\mathbb{N}$: die natürlichen Zahlen
- $\mathbb{Z}$: die ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q}$: die rationalen Zahlen
- $\mathbb{R}$: die reellen Zahlen

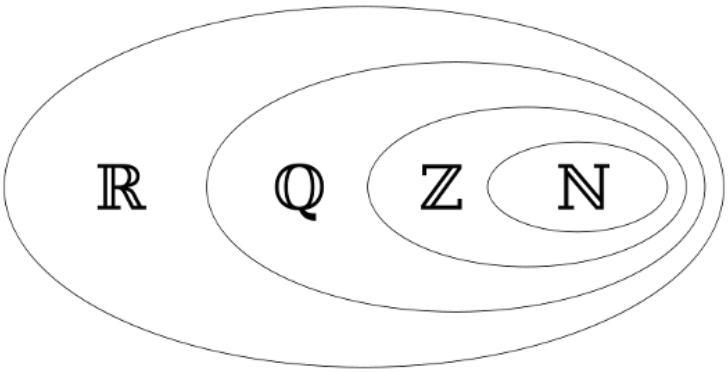


Bild 1 Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Weiter ist aus der Schule bekannt, dass es einen Zusammenhang zwischen den Zahlbereichen gibt. Der Zahlbereich der natürlichen Zahlen ist eine Teilmenge des Zahlbereichs der ganzen Zahlen, mathematisch aufgeschrieben sieht das so aus: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Für alle vier bekannten Zahlbereiche gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Wenn (Buchstaben-) Variablen als Vertreter für eine beliebige Zahl genutzt werden, muss noch festgelegt werden, welche Zahlen eingesetzt werden können. Dafür schreibt man z.B. $x \in \mathbb{Q}$, lies „x ist eine rationale Zahl“. Wir werden im Folgenden oft zu Beginn von Regeln so etwas angeben wie $a, b \in \mathbb{R}$. Damit ist gemeint, dass es sich bei den Variablen a und b um Platzhalter für eine beliebige reelle Zahl handelt und die nachfolgende Beschreibung für alle reelle Zahlen gültig ist.

Info 1: (Rechenoperationen in $\mathbb{R}$)
Für zwei reelle Zahlen a und b sind die folgenden Rechenoperationen erklärt:

Addition: $a + b$
„1. Summand + 2. Summand = Summe“

Subtraktion: $a - b$
„Minuend − Subtrahend = Differenz“

Multiplikation: $a \cdot b$
„1. Faktor · 2. Faktor = Produkt“

Division: $a : b$ falls $b \neq 0$
„Dividend : Divisor = Quotient“

Die folgenden Rechenregeln gelten für alle reellen Zahlen und damit für alle oben genannten Zahlbereiche, obwohl die nachfolgend angegebenen Beispiele sich hauptsächlich auf die ganzen Zahlen und einige rationale Zahlen beschränken werden.

Beispiel 1:

Wir betrachten die Rechnung: $((5 + 8) \cdot 2) \cdot (5 + 5)$

Klammern geben die Reihenfolge der Rechenoperationen vor. Zuerst werden die inneren Klammern aufgelöst.

$$\begin{aligned}&((5 + 8) \cdot 2) \cdot (5 + 5)\\ &= (13 \cdot 2) \cdot (5 + 5)\\ &= 26 \cdot (5 + 5)\\ &= 26 \cdot 10\\ &= 260\end{aligned}$$

Nicht ineinander verschachtelte Klammern können (unter Beachtung der obigen Regel) in beliebiger Reihenfolge aufgelöst werden. Es ist also auch korrekt den Term wie folgt auszurechnen:

$$\begin{aligned}&(13 \cdot 2) \cdot (5 + 5)\\ &= (13 \cdot 2) \cdot 10\\ &= 26 \cdot 10\\ &= 260\end{aligned}$$

Regel 1: (Klammerregel)

Wenn in einem Term mehrere Rechenoperationen durchgeführt werden, kann die Reihenfolge der Durchführung mithilfe von Klammern festgelegt werden. Rechenoperationen, welche zuerst ausgeführt werden sollen, werden von einer öffnenden Klammer und einer schließenden Klammer umgeben. Es gelten die folgenden Regeln:

(1) Innere Klammern müssen zuerst aufgelöst werden.

(2) Nicht ineinander verschachtelte Klammern können in beliebiger Reihenfolge aufgelöst werden, solange die obige Regel beachtet wird.

Regel 2: (Punkt- vor Strichrechnung.)
Wenn in einem Term mehrere Rechenoperationen stehen und durch die Klammerung der Ausdrücke nicht eindeutig vorgegeben ist, in welcher Reihenfolge sie berechnet werden sollen, gilt Punkt- vor Strichrechnung. Eine Division oder Multiplikation wird in solchen Fällen immer vor einer Subtraktion oder Addition durchgeführt.

Beispiel 2:
Es gilt Punkt- vor Strichrechnung. Wenn zuerst addiert wird, verändert sich das Ergebnis im Allgemeinen: Wir erhalten

$$87 \cdot 31 + 73 = 2770$$

im Vergleich zu

$$87 \cdot (31 + 73) = 9048.$$

Zunächst geben wir nun nacheinander die Rechengesetze für den Umgang mit reellen Zahlen gefolgt von einigen Beispielen an.

Info 2: (Das Assoziativ- und Kommutativgesetz (für die Addition))
Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, dann gelten:

Das Assoziativgesetz (für die Addition):

$$\text{(A1)} \quad a + (b + c) = (a + b) + c$$

Das Kommutativgesetz (für die Addition):

$$\text{(A2)} \qquad a + b = b + a$$

Beispiel 3:
Wir wenden das *Assoziativgesetz für die Addition* an folgendem Beispiel an:
$86 + (65 + 35) = (86 + 65) + 35$
Welche Seite der Gleichung lässt sich aus Ihrer Sicht besser im Kopf berechnen?

Bemerkung: Das Assoziativgesetz (für die Addition) gilt auch entsprechend für mehr als drei Summanden, deshalb können die Klammern auch weggelassen werden.

Aufgabe 1:
Wenden Sie das Assoziativgesetz (wie im obigen Beispiel) an, ohne auszurechnen:
$(50 + 16) + 34 =$?

Lösung:
$(50 + 16) + 34 = 50 + (16 + 34)$

Info 3: (Das Assoziativ- und das Kommutativgesetz (für die Multiplikation))
Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, dann gelten:

Das Assoziativgesetz (für die Multiplikation):

$$\text{(M1)} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Das Kommutativgesetz (für die Multiplikation):

$$\text{(M2)} \quad a \cdot b = b \cdot a$$

Bemerkung: Das Assoziativgesetz (für die Multiplikation) gilt auch entsprechend für mehr als drei Faktoren, deshalb können die Klammern auch weggelassen werden.

Beispiel 4:
Wir wenden das *Assoziativgesetz für die Multiplikation* an folgendem Beispiel an:
$72 \cdot (4 \cdot 25) = (72 \cdot 4) \cdot 25$
Welche Seite der Gleichung lässt sich aus Ihrer Sicht besser im Kopf berechnen?

Aufgabe 2:
Wenden Sie das Assoziativgesetz (wie im obigen Beispiel) an, ohne auszurechnen:
$10 \cdot (4 \cdot 3) =$?

Lösung:
$10 \cdot (4 \cdot 3) = (10 \cdot 4) \cdot 3$

Beispiel 5:
Wir wenden das *Kommutativgesetz für die Addition* an folgendem Beispiel an:
$35 + 62 + 38 = 62 + 35 + 38 = 62 + 38 + 35$.
Für welchen Term aus der Gleichungskette fällt Ihnen die Berechnung am leichtesten?

Aufgabe 3:
Wenden Sie das Kommutativgesetz an, ohne auszurechnen:
$9 + 88 =$?

Lösung:
$9 + 88 = 88 + 9$

Beispiel 6:

Wir wenden das *Kommutativgesetz für die Multiplikation* an folgendem Beispiel an:
$10 \cdot 57 = 57 \cdot 10$

Aufgabe 4:
Wenden Sie das Kommutativgesetz an, ohne auszurechnen:
$9 \cdot 12 =$?

Lösung:
$9 \cdot 12 = 12 \cdot 9$

Info 4: (Das Distributivgesetz)
Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\text{(D)} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \text{und} \qquad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Beispiel 7:

Wir wenden das *Distributivgesetz* an den folgenden Beispielen an:
$35 \cdot (10 + 10) = 35 \cdot 10 + 35 \cdot 10$
sowie
$(17 + 83) \cdot 86 = 17 \cdot 86 + 83 \cdot 86$
Welche Seite der jeweiligen Gleichungen lässt sich aus Ihrer Sicht besser im Kopf berechnen?

Aufgabe 5:
Wenden Sie das Distributivgesetz an, ohne auszurechnen:
$10 \cdot (4 + 3) =$?

Lösung:
$10 \cdot (4 + 3) = 10 \cdot 4 + 10 \cdot 3$

Umformungen mithilfe des Distributivgesetzes sind eine häufige Fehlerquelle, wenn auch negative Zahlen vorkommen. Können Sie die folgende Aufgabe korrekt lösen?

Aufgabe 6:
Wenden Sie das Distributivgesetz an, ohne den Term weiter zu vereinfachen bzw. das Ergebnis auszurechnen:
(a) $(-1) \cdot (4 + 8) =$?
(b) $(-5) \cdot (3 - 4) =$?

Lösung:
(a) $(-1) \cdot (4+8) = (-1) \cdot 4 + (-1) \cdot 8 = -1 \cdot 4 + (-1) \cdot 8$
(b) $(-5) \cdot (3-4) = (-5) \cdot 3 + (-5) \cdot (-4) = -5 \cdot 3 + (-5) \cdot (-4)$

Weitere Übungsaufgaben zu den Rechengesetzen finden Sie in den Bereichen „Aufgaben“ und „Anwendungen“ dieses Kapitels.

Die dargebotenen Beispiele sollen auch zeigen, dass die obigen Rechengesetze nicht nur bei Termumformungen nützlich sein können, sondern auch oft beim Kopfrechnen hilfreich sind, wenn sie geschickt eingesetzt werden. Die Rechenregeln werden als stets gültig angenommen und können nicht bewiesen werden.

In der Mathematik ist es oft üblich, den Multiplikationspunkt nicht explizit dazuzuschreiben. So steht $3(4+5)$ für $3 \cdot (4+5)$. Allerdings ist Vorsicht geboten, nicht zwischen zwei Zahlen auf diese Weise zu verfahren. Wir betrachten dazu ein paar Beispiele.

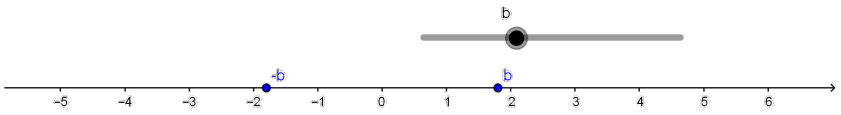
Beispiel 8:
In diesen Fällen kann der Multiplikationspunkt entfallen:

- $3 \cdot (4+5) = 3(4+5)$
- $(345+23) \cdot 11 = (345+23)11$
- $a \cdot b \cdot c = abc$ für $a, b, c \in \mathbb{R}$
- $75 \cdot a = 75a$ für $a \in \mathbb{R}$

Achtung: befinden sich zwischen zwei Ziffern keine impliziten Multiplikationspunkte, darf dort kein Multiplikationspunkt eingesetzt werden, denn: $33 \neq 3 \cdot 3 = 9$. Ebenso darf zwischen zwei Zahlen der Multiplikationspunkt nicht weggelassen werden: $83 \cdot 34 \neq 8334$.
Auch beim Umgang mit gemischten Brüchen muss sorgfältig unterschieden werden, denn $2,5 = 2\frac{1}{2} \neq 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Info 5:
Für den Fall, dass ein Rechenzeichen ausgelassen wurde, besteht die Vereinbarung das fehlende Zeichen als Multiplikation zu lesen.

Das nachfolgende Applet veranschaulicht das Prinzip von Zahl und Gegenzahl.



Interaktion 1 *(nur in digitaler Version)*

Wir haben die Rechenregeln für die Multiplikation und Addition formuliert. Dabei können die Variablen a, b und c auch negativ oder gleich 0 sein. Es gibt spezielle Regeln für den Umgang mit dem Minuszeichen. Das Minuszeichen kann drei verschiedene Bedeutungen haben:

1. Operationszeichen für die Subtraktion
   $4 - 3 = 1$
2. Vorzeichen
   -3 bezeichnet eine negative Zahl < 0, die den Abstand 3 vom Nullpunkt hat.
3. Gegenzahl
   Zu einer Zahl a ist $-a$ die Gegenzahl für die gilt $a + (-a) = 0$, also
   $a = 3$ hat die Gegenzahl -3 und
   $a = -3$ hat die Gegenzahl $-(-3) = 3$.

Die Bedeutungen hängen eng zusammen, sodass man in der Mathematik jeweils dasselbe Zeichen verwendet.

1. Die Subtraktion kann als Addition mit der Gegenzahl verstanden werden: $a - b = a + (-b)$.
2. -3 gibt die Gegenzahl zu $+3$ an.

Wir fassen nun die allgemeinen Rechenregeln für den Umgang mit dem Minuszeichen zusammen:

Regel 3: (Umgang mit dem Minuszeichen)
Es gelten folgende Regeln für $a, b \in \mathbb{R}$:

(Z1)	$-(-a)$	$=$	a
(Z2)	$a - b$	$=$	$a + (-b)$
(Z3)	$-(a + b)$	$=$	$-a - b$
(Z4)	$-(a - b)$	$=$	$-a + b$
(Z5)	$(-a)b = a(-b)$	$=$	$-ab$
(Z6)	$(-a)(-b)$	$=$	ab
(Z7)	$\frac{1}{-a}$	$=$	$-\frac{1}{a} = \frac{-1}{a}, a \neq 0.$

Laut der zweiten Regel zum Umgang mit dem Minuszeichen gilt etwa $12 - 5 = 12 + (-5)$. Wir können also die vorgestellten Rechengesetze auch für die Subtraktion nutzen, indem wir mit dieser Regel die Subtraktion in eine Addition umformen.

Beispiel 9:
Betrachten wir einmal den folgenden Term:

$$7 - (-(-3))$$

In diesem Term verbergen sich alle 3 Bedeutungen des Minuszeichens mindestens einmal.

- -3 beschreibt, dass es sich um die Zahl -3 handelt, welche ein negatives Vorzeichen hat, also kleiner ist als 0
- $-(-3)$ beschreibt mit dem Minuszeichen links vor der Klammer die Gegenzahl zu -3 (die Gegenzahl zu einer negativen Zahl ist übrigens positiv)

- In dem Term $7-(-(-3))$ bedeutet das erste Minuszeichen von links gesehen, dass von 7 die Zahl $-(-3)$ abgezogen werden soll

  Es gilt also

$$\begin{aligned} 7-(-(-3)) &= 7-(3) && \text{nach (Z1)} \\ &= 7-3 && \text{nach (Z2)} \\ &= 4 \end{aligned}$$

Häufiger Fehler: Das Gegenzahl-Minuszeichen wird beim Umgang mit Variablen als Vorzeichen fehlgedeutet; wenn a eine reelle Zahl ist, kann $-a$ eine positive Zahl sein, z.B. wenn $a=-3$ gilt. Andererseits kann a eine negative Zahl sein, wenn z.B. $a=-7$ gilt.

Bemerkung: Die Gegenzahl $-a$ nennt man in der Mathematik auch das „additiv Inverse von a".

Laut (Z2) gilt etwa $12-5=12+(-5)$. Wir können also die vorgestellten Rechengesetze auch für die Subtraktion nutzen, indem wir mit der Regel (Z2) die Subtraktion in eine Addition umformen.

Beispiel 10:

Wir formen die folgenden Terme mithilfe der Rechengesetze für die Addition um:

- Assoziativgesetz:

$$\begin{aligned} (100-10)+5 &= (100+(-10))+5 \\ &= 100+((-10)+5) \end{aligned}$$

- Assoziativgesetz:

$$\begin{aligned} (-11-22)-33 &= ((-11)+(-22))+(-33) \\ &= (-11)+((-22)+(-33)) \\ &= -11+((-22)-33) \end{aligned}$$

- Kommutativgesetz:

$$\begin{aligned} 16-8 &= 16+(-8) \\ &= (-8)+16 \\ &= -8+16 \end{aligned}$$

- Kommutativgesetz:

$$\begin{aligned} -22-3 &= (-22)+(-3) \\ &= (-3)+(-22) \\ &= -3-22 \end{aligned}$$

Aufgabe 7:
Wenden Sie die in diesem Abschnitt vorgestellten Rechengesetze an, um zu begründen, dass die Gleichungen

1. $a-(b+c)=a-b-c$ und

2. $a(b-c) = ab - ac$

für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten.

Lösung:

Wir formen von der linken Seite der Gleichung ausgehend schrittweise um und geben jeweils die benutzten Rechengesetze an.

zu 1.:

$$\begin{aligned} & a-(b+c) && \mid \text{(Z2)} \\ = \; & a+(-(b+c)) && \mid \text{(Z3)} \\ = \; & a+(-b-c) && \mid \text{(Z2)} \\ = \; & a+((-b)+(-c)) && \mid \text{(A1)} \\ = \; & a+(-b)+(-c) && \mid \text{(Z2)} \\ = \; & a-b-c \end{aligned}$$

zu 2.:

$$\begin{aligned} & a(b-c) && \mid \text{(Z2)} \\ = \; & a(b+(-c)) && \mid \text{(D)} \\ = \; & ab+a(-c) && \mid \text{(Z5)} \\ = \; & ab+(-ac) && \mid \text{(Z2)} \\ = \; & ab-ac \end{aligned}$$

Info 6: (Verwendung des Bruchstrichs in $\mathbb{R}$)

Für $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ bezeichnet $\frac{1}{a} = a^{-1}$ den Kehrwert von a. In der Mathematik wird der Kehrwert auch das multiplikativ Inverse von a genannt. Es gilt:

$$a \cdot \frac{1}{a} = a \cdot a^{-1} = 1 \quad (a \neq 0).$$

Man beachte, dass a keine ganze Zahl sein muss:

- für $a = \frac{1}{2}$ ist $\frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{1} = 2$
- für $a = \sqrt{2}$ ist $\frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- für $a = \frac{3}{4}$ ist $\frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$

Für $a, b \in \mathbb{R}$ $(b \neq 0)$ bezeichnet $\frac{a}{b}$ das Resultat der Division $a : b$. Dabei können a und b selber Brüche oder irrationale Zahlen sein. Zum Beispiel:

- für $a = \frac{3}{4},\ b = \frac{1}{2}$ gilt:
  $\frac{a}{b} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{3}{2}$

- für $a = \sqrt{2},\ b = \sqrt{3}$ gilt:
  $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Regel 4: („Bruchrechnen“ in $\mathbb{R}$)
Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. $\frac{a}{1} = a$
2. $c \cdot \frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{b}$ für $b \neq 0$
3. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ für $b, d \neq 0$
4. $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ für $b, c, d \neq 0$
5. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$ für $b, d \neq 0$
6. $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$ für $b \neq 0$

Diese Regeln sind aus der Bruchrechnung bekannt (siehe Kapitel zum Thema *Bruchrechnung* in Lerneinheit *Rechnen mit rationalen Zahlen*), werden aber in der Schule i.d.R. nur für $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ hergeleitet. Sie gelten aber allgemein für reelle Zahlen a, b, c, d.

Bemerkung: Zwischen der Division und dem multiplikativ Inversen besteht folgende Beziehung

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}$$

In dem systematischen Aufbau von Zahlbereichen führt man in der Hochschulmathematik so die Division auf die Multiplikation zurück.

Beispiel 11:
Divisionen als Multiplikationen dargestellt zusammen mit ihrem Ergebnis:

- $12 : 3 = 12 \cdot \frac{1}{3} = 12 \cdot 3^{-1} = 4$
- $12 : 4 = 12 \cdot \frac{1}{4} = 12 \cdot 4^{-1} = 3$
- $32 : 16 = 32 \cdot \frac{1}{16} = 32 \cdot 16^{-1} = 2$
- $21 : 7 = 21 \cdot \frac{1}{7} = 21 \cdot 7^{-1} = 3$

Wir nutzen nun aus, dass die Division - wie im obigen Beispiel vorgeführt wurde - auch als Multiplikation dargestellt werden kann. So können wir die Rechengesetze für die Multiplikation auch für die Division benutzen.

Beispiel 12:

- $(9 : 3) : 3 = \left(9 \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = 9 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) = 9 \cdot \left(\frac{1}{3} : 3\right)$
- $5 : 15 = 5 \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{15} \cdot 5$

Achtung: Bei der Überführung einer Division zu einer Multiplikation kann jeweils nur der **Divisor** als Bruch umgeschrieben werden.

Es gelten noch zwei weitere Regeln für die Addition:

Info 7:
Sei $a \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\text{(A3)} \quad a + 0 = 0 + a = a$$

$$\text{(A4)} \quad \text{Zu } a \text{ gibt es eine Zahl } -a \in \mathbb{R} \text{ mit } a + (-a) = 0$$

Für die Multiplikation gelten zusätzlich noch die Regeln:

Info 8:
Sei $a \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\text{(M3)} \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

$$\text{(M4)} \quad \text{Falls } a \neq 0, \text{ gibt es ein } a^{-1} \text{ mit } a \cdot a^{-1} = 1$$

Bemerkung: Aus dem Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz - also (A1), (A2), (M1), (M2) und (D) sowie den Regeln (A3), (A4), (M3) und (M4), können wir alle gebräuchlichen Regeln für die 4 Grundrechenarten in den reellen Zahlen herleiten. Solche Grundregeln oder Grundsätze einer Theorie, aus denen alles Weitere hergeleitet werden kann, heißen auch Axiome.

Eine Menge K von Zahlen (oder allgemeiner Objekten), auf der zwei Operationen + und $\cdot$ definiert sind und für die die Rechengesetze (A1)-(A4), (M1)-(M4) und (D) gelten, nennt man **Körper**. Die Regel (A3) muss dabei umformuliert werden bzgl. +:

(A3*): Es existiert ein neutrales Element $n \in K$ mit $a + n = a$ für alle $a \in K$.

Im Fall von $\mathbb{R}$ ist die Existenz eines neutralen Elementes durch die Zahl 0 gesichert. Auch in anderen Körpern wird ein solches neutrales Element wie in (A3*) oft mit 0 bezeichnet.

Auch (M3) muss umformuliert werden zu:

(M3*): Es existiert ein neutrales Element $n* \in K$ mit $n* \neq n$ (wobei n das neutrale Element aus (A3*) ist) und $a \cdot n* = a$ für alle $a \in K$.

Im Fall von $\mathbb{R}$ ist die Existenz dieses neutralen Elementes durch die Zahl 1 gesichert. Auch in anderen Körpern wird ein solches neutrales Element wie in (M3*) oft mit 1 bezeichnet.

Beispiel 13:
Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ist zusammen mit der gebräuchlichen Addition und Multiplikation ein Körper, für die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ gilt dies jedoch nicht.

Aufgaben

Aufgabe 8:
Wenden Sie die Distributivgesetze an, ohne auszurechnen:
(a) $35(73 + 19) =$?

(b) $76 \cdot 44 + 44 \cdot 12 =$?

Lösung:
(a) $35(73 + 19) = 35 \cdot 73 + 35 \cdot 19$
(b) $76 \cdot 44 + 44 \cdot 12 = 44 \cdot (76 + 12)$

Aufgabe 9:
Können die Klammern hier entfallen, ohne die Bedeutung des Terms zu verändern?
(a) $35(73 + 19) = 3220$

- ☐ Ja
- ☐ Nein

(b) $127 = (21 + 99) + 7$

- ☐ Ja
- ☐ Nein

Lösung:
(a) Nein, das Assoziativgesetz gilt hier nicht, da die 35 mit der Klammer multipliziert wird, aber 73 und 19 addiert werden.
(b) Ja, in diesem Fall gilt das Assoziativgesetz.

Aufgabe 10:
Seien $h, k, m, q, r, w \in \mathbb{R}$. Wenden Sie das Distributivgesetz an:
(a) $h(r + q) =$?
(b) $m \cdot w + k \cdot m =$?

Lösung:
(a) $h(r + q) = h \cdot r + h \cdot q$
(b) $m \cdot w + k \cdot m = m \cdot (w + k)$

Aufgabe 11:
Betrachten Sie die folgenden, falschen Gleichungen. Ergänzen Sie den Term rechts vom Gleicheitszeichen jeweils

so mit Klammern (bzw.), dass die Gleichung erfüllt ist und Sie nicht unnötig viele Klammern verwenden.
(a) $528 = 33 \cdot 9 + 7$. Korrekt wäre $528 =$?
(b) $2890 = 83 + 2 \cdot 7 + 27$. Korrekt wäre $2890 =$?

Lösung:
(a) Korrekt wäre $528 = 33 \cdot (9 + 7)$
(b) Korrekt wäre $2890 = (83 + 2) \cdot (7 + 27)$

Aufgabe 12:
Berechnen Sie geschickt im Kopf:
(a) $-4(-10 + 3) - 8 =$?
(b) $-(2 + 6)(-1 - 7) =$?

Lösung:
(a) $-4(-10 + 3) - 8 = 40 - 12 - 8 = 20$
(b) $-(2 + 6)(-1 - 7) = -8 \cdot (-8) = 64$

Aufgabe 13:
Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen. Welche Rechengesetze haben Sie dabei angewendet? Hierbei gilt überall $a, b, c \in \mathbb{R}$

(a) $7a - 3b + (-a + 3c)(-4)$

Lösung:
Wir gehen schrittweise nach den Rechengesetzen vor:

$$\begin{aligned} & 7a - 3b + (-a + 3c)(-4) \\ & \qquad \text{Distributivgesetz, Minuszeichenregeln} \\ = \; & 7a - 3b + 4a - 12c \\ & \qquad \text{Kommutativgesetz} \\ = \; & 7a + 4a - 3b - 12c \\ & \qquad \text{Distributivgesetz} \\ = \; & (7 + 4)a - 3b - 12c \\ & \qquad \text{Addition von Zahlen} \\ = \; & 11a - 3b - 12c \end{aligned}$$

(b) $(a - b + c)(b - a - 3c)$

Lösung:

Für diesen zweiten Term beschreiben wir zwei Wege:

$$
\begin{aligned}
& (a-b+c)(b-a-3c) \\
& \qquad \text{Distributivgesetz} \\
= \; & (a-b+c)(b-a)+(a-b+c)(-3c) \\
& \qquad \text{Distributivgesetz} \\
= \; & (a-b+c)b+(a-b+c)(-a)+(a-b+c)(-3c) \\
& \qquad \text{Distributivgesetz, Vorzeichenregeln, Kommutativgesetz} \\
= \; & ab-b^2+bc-a^2+ab-ac-3ac+3bc-3c^2 \\
& \qquad \text{Kommutativgesetz} \\
= \; & -a^2+2ab-b^2-4ac+4bc-3c^2
\end{aligned}
$$

bzw.

$$
\begin{aligned}
& (a-b+c)(b-a-3c) \\
& \qquad \text{Assoziativgesetz} \\
= \; & ((a-b)+c)((-a+b)-3c) \\
& \qquad \text{Distributivgesetz, Vorzeichenregeln} \\
= \; & ((a-b)+c)(-(a-b)-3c) \\
& \qquad \text{Distributivgesetz, Kommutativgesetz} \\
= \; & -(a-b)(a-b)-c(a-b)-3(a-b)c-3c^2 \\
& \qquad \text{Distributivgesetz, Vorzeichenregeln, Kommutativgesetz} \\
= \; & -(a^2-2ab+b^2)-ac+bc-3ac+3bc-3c^2 \\
& \qquad \text{Assoziativgesetz, Distributivgesetz} \\
= \; & -a^2+2ab-b^2-4ac+4bc-3c^2
\end{aligned}
$$

Anwendung

Die geltenden Rechengesetze für die reellen Zahlen sind oft hilfreich, wenn es darum geht, Rechnungen geschickt durchzuführen. In den folgenden Aufgaben ist es hilfreich, die in dieser Lerneinheit vorgestellten Rechengesetze auszunutzen.

Aufgabe 14:
Berechnen Sie mit Geschick und im Kopf:
$(345 + 312 - 45) \cdot (12 + 12 - 5) \cdot 0 \cdot (45 - 30 + 15) =$?

Lösung:
Da eine Multiplikation mit 0 immer 0 ergibt und nach dem Kommutativgesetz zuerst mit der 0 multipliziert werden kann, braucht hier nicht umständlich gerechnet werden. Das Ergebnis muss 0 sein.

Aufgabe 15:
Berechnen Sie mit Geschick und im Kopf:
$77 + 18 + 30 + 77 + 18 + 30 + 77 + 18 + 30 =$?

Lösung:
Hier werden dreimal nacheinander dieselben Zahlen addiert. Also kann der Term zu $3 \cdot (77+18+30)$ umgestellt werden. Das ergibt $3 \cdot 125 = 375$.

Dahinter steckt die folgende Rechnung unter Ausnutzung der Rechengesetze:

$$\begin{aligned} & 77 + 77 + 77 + 18 + 18 + 18 + 30 + 30 + 30 \\ = \; & 3 \cdot 77 + 3 \cdot 18 + 3 \cdot 30 \\ = \; & 3 \cdot (77 + 18 + 30) \\ = \; & 3 \cdot 125 = 375 \end{aligned}$$

Aufgabe 16:
Berechnen Sie mit Geschick und im Kopf:
$2 \cdot 20 + 2 \cdot 30 + 2 \cdot 50 =$?

Lösung:
Da jeder Summand hier mit dem Faktor 2 multipliziert wird, können wir diesen wegen des Distributivgesetzes ausklammern. Dies ergibt $2 \cdot 20 + 2 \cdot 30 + 2 \cdot 50 = 2 \cdot (20 + 30 + 50)$. Weiter gilt $20 + 30 + 50 = 100$, und damit ist das Ergebnis der Rechnung $2 \cdot 20 + 2 \cdot 30 + 2 \cdot 50 = 200$.

Aufgabe 17:
Berechnen Sie mit Geschick und im Kopf:
$5,4 + 3,9 + 2,2 + 2,1 + 4,8 - 5,4 =$?

Lösung:
Nach Kommutativgesetz kann erst $5,4 - 5,4$ berechnet werden, was 0 ergibt. Die übrigen Zahlen können ebenfalls nach dem Kommutativgesetz bzw. Assoziativgesetz wie folgt geordnet werden:

$$(3,9 + 2,1) + (2,2 + 4,8) = 6 + 7 = 13.$$

Darüber hinaus können die Rechengesetze dabei helfen, neue Rechenstrategien zu entdecken und auch zu begründen, weshalb diese erfolgreich sind. Ein Beispiel dafür ist die Multiplikation. Wir betrachten das Produkt $12 \cdot 15$ und betrachten im folgenden Beispiel eine Rechenstrategie zu dessen Lösung.

Beispiel 14:
$12 \cdot 15 = ?$

Leicht auszurechnen ist: $10 \cdot 15 = 150$ und $2 \cdot 15 = 30$. Also ist $12 \cdot 15 = 150 + 30 = 180$.

Dahinter steckt die Überlegung, dass 12 als $10+2$ geschrieben werden kann. Sobald wir diese Summe einsetzen, können wir das Distributivgesetz anwenden:
$12 \cdot 15 = (10 + 2) \cdot 15 = 10 \cdot 15 + 2 \cdot 15$

Die geschickte Zerlegung der Aufgabe erleichtert das Rechnen im Kopf, und da das Distributivgesetz der Zerlegung zu Grunde liegt ist sichergestellt, dass diese Strategie immer funktioniert.

Aufgabe 18:
$15 \cdot 19 = ?$
Zerlegen Sie den Term wie im obigen Beispiel in zwei Summanden, indem Sie die 15 aufteilen:
$15 \cdot 19 =$? + ?

Zerlegen Sie den Term wie im obigen Beispiel in zwei Summanden, indem Sie die 19 aufteilen:
$15 \cdot 19 =$? + ?

Berechnen Sie das Produkt im Kopf anhand einer der obigen Vorüberlegungen:
$15 \cdot 19 =$?

Auf welche der Vorüberlegungen haben Sie sich bezogen?

Lösung:

$15 \cdot 19$ kann in zwei Summanden $10 \cdot 19 = 190$ und $5 \cdot 19 = 95$ geschrieben werden. Somit ist das Produkt: $15 \cdot 19 = 285$.
Die Anwendung des Distributivgesetzes ergibt:

$$\begin{aligned} 15 \cdot 19 &= (10+5) \cdot 19 \\ &= 10 \cdot 19 + 5 \cdot 19 \\ &= 190 + 95 = 285 \end{aligned}$$

Zweiter Rechenweg:
$15 \cdot 19$ kann in zwei Summanden $15 \cdot 10 = 150$ und $15 \cdot 9 = 135$ geschrieben werden. Somit ist das Produkt: $15 \cdot 19 = 285$.
Die Anwendung des Distributivgesetzes ergibt:

$$\begin{aligned} 15 \cdot 19 &= 15 \cdot (10+9) \\ &= 15 \cdot 10 + 15 \cdot 9 \\ &= 150 + 135 = 285 \end{aligned}$$

Nutzen Sie vielleicht schon selbst spezielle Rechenstrategien bei bestimmten Rechnungen? Können Sie mit den Rechengesetzen begründen, warum diese immer zu einem korrekten Ergebnis führen?

Ergänzungen

Die in dieser Lerneinheit behandelten Rechenregeln können zur näheren Beschreibung einer abstrakten mathematischen Struktur namens *Körper* benutzt werden, die weiter vorne bereits kurz erwähnt wurde. Diese Ergänzung geht über die Schulmathematik hinaus und dient als Ausblick in die Hochschulmathematik. Sehen Sie diesen Abschnitt des Kapitels als Herausforderung an und gehen Sie getrost darüber hinweg, wenn Sie gerade hauptsächlich Ihr Schulwissen wieder auffrischen.

Eine Menge K von Zahlen oder allgemeiner gesagt von Objekten, für die zwei Operationen + und $\cdot$ definiert sind und für die die folgende Definition gilt, nennen wir Körper.

Definition: Körper
Eine Menge K mit zwei Verknüpfungen + und $\cdot$ heißt Körper, falls Folgendes gilt:

1. Die Menge K ist bezüglich der Verknüpfungen + und $\cdot$ abgeschlossen, d.h. für $a, b \in K$ gilt: $a + b \in K$ und $a \cdot b \in K$.

2. Für die erste Verknüpfung + gilt:
a) Das Assoziativgesetz: $a + (b + c) = (a + b) + c$ für alle $a, b, c \in K$.
b) Das Kommutativgesetz: $a + b = b + a$ für alle $a, b \in K$.
c) Es existiert ein neutrales Element $n \in K$, d.h. $a + n = a$ für alle $a \in K$.
d) Zu jedem Element $a \in K$ existiert ein inverses Element $b \in K$, d.h. $a + b = n$.

3. Für die zweite Verknüpfung $\cdot$ gilt:
a) Das Assoziativgesetz: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ für alle $a, b, c \in K$.
b) Das Kommutativgesetz: $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in K$.
c) Es existiert ein - zu dem aus 2.c) verschiedenes - neutrales Element $n* \in K$, d.h. $a \cdot n* = a$ für alle $a \in K$ und $n* \neq n$.
d) Zu jedem Element $a \in K$ mit $a \neq n$ existiert ein inverses Element $b \in K$, d.h. $a \cdot b = n*$.

4. Zwischen den beiden Verknüpfungen gelten die Distributivgesetze:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{und} \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Die durch diese Definition geforderten Bedingungen an K nennt man **Körperaxiome**.

Beispiel 15:

Die Mengen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind Körper. Prüfen Sie die oben genannten Bedingungen doch einmal nach. Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ sind jedoch keine Körper; es gibt nämlich zum Beispiel keine Zahl aus diesen Zahlbereichen, die mit 2 multipliziert wieder 1 ergibt. Die Zahl 1 ist das neutrale Element der Multiplikation (s. obige Definition 3.c)) in den für uns bekannten Zahlbereichen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$. Die Gleichheit $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ bedeutet, dass $\frac{1}{2}$ der Kandidat für das multiplikativ Inverse Element wäre (s. 3.d)). Aber $\frac{1}{2}$ ist weder eine natürliche, noch eine ganze Zahl.

Beispiel 16:

(Restklassenkörper)
Wir betrachten die Menge $\mathbb{Z}_5$ der Reste beim Teilen der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ durch 5:

$$\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Die Operationen + und $\cdot$ sind wie folgt definiert: Zunächst wird wie in $\mathbb{Z}$ addiert bzw. multipliziert und anschließend wird der Rest beim Teilen durch 5 bestimmt.

Zum Beispiel gilt beim Rechnen in $\mathbb{Z}_5$:

$$2 + 4 = 1,$$

da $2 + 4 = 6$ beim Teilen mit Rest durch 5 den Rest 1 hat. Analog gilt beim Multiplizieren:

$$2 \cdot 4 = 3,$$

da $2 \cdot 4 = 8$, und 8 den Rest 3 beim Teilen durch 5 übrig lässt.
Wir rechnen nach, dass die Körperaxiome gelten:

1. Für die Addition gilt:
a), b) Das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz gelten bereits in $\mathbb{Z}$. Das anschließende Teilen mit Rest ändert nichts daran.
c) Das neutrale Element ist wie in $\mathbb{Z}$ ebenfalls die 0.
d) Zu den inversen Elementen:
Das Inverse zu 0 ist 0, denn $0 + 0 = 0 = 0 \cdot 5 + 0$ liefert den Rest 0.
Das Inverse zu 1 ist 4, denn $1 + 4 = 5 = 1 \cdot 5 + 0$ liefert den Rest 0.
Das Inverse zu 2 ist 3, denn $2 + 3 = 5 = 1 \cdot 5 + 0$ liefert den Rest 0.
Das Inverse zu 3 ist 2, denn $3 + 2 = 5 = 1 \cdot 5 + 0$ liefert den Rest 0.
Das Inverse zu 4 ist 1, denn $4 + 1 = 5 = 1 \cdot 5 + 0$ liefert den Rest 0.

2. Für die Multiplikation gilt:
a), b) Wie bei der Addition gelten das Assoziativgesetz und Kommutativgesetz bezüglich der Multiplikation bereits in $\mathbb{Z}$.
c) Das neutrale Element ist wie in $\mathbb{Z}$ ebenfalls die 1 und $1 \neq 0$.
d) Zu den inversen Elementen:
Die 0 besitzt kein inverses Element, dies ist allerdings auch nicht erforderlich, da 0 das neutrale Element der Addition ist.
Das Inverse zu 1 ist 1, denn $1 \cdot 1 = 1 = 0 \cdot 5 + 1$ liefert den Rest 1.
Das Inverse zu 2 ist 3, denn $2 \cdot 3 = 6 = 1 \cdot 5 + 1$ liefert den Rest 1.
Das Inverse zu 3 ist 2, denn $3 \cdot 2 = 6 = 1 \cdot 5 + 1$ liefert den Rest 1.
Das Inverse zu 4 ist 4, denn $4 \cdot 4 = 16 = 3 \cdot 5 + 1$ liefert den Rest 1.

3. Die Distributivgesetze gelten ebenfalls in $\mathbb{Z}$ und somit auch für $\mathbb{Z}_5$.

Damit erfüllt die Menge $\mathbb{Z}_5$ mit den wie oben festgelegten Verknüpfungen alle Eigenschaften eines Körpers.