UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Virtuelles Eingangstutorium
studiVEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

# studiVEMINT-Kurs Mathematik

**© studiVEMINT Team - Paderborn**

FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

go.upb.de/studivemint

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Virtuelles Eingangstutorium
VEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

khd m
kompetenzzentrum
hochschuldidaktik
mathematik

# LE 2 - Rechnen mit rationalen Zahlen

## 2.1 Bruchrechnung

Im Folgenden finden Sie die Abschnitte:

Übersicht ..... S. 1
Hinführung ..... S. 2
Inhalte mit Erklärungen ..... S. 3
Aufgaben ..... S. 21
Anwendung ..... S. 35

---

### Übersicht

In diesem Kapitel werden wir uns mit den Grundlagen der Bruchrechnung beschäftigen. Genauer geht es um

- Einführung von Brüchen
- Erweitern und Kürzen von Brüchen
- Addition und Subtraktion von Brüchen
- Multiplikation und Division mit Brüchen
- Einblicke in die Zahlbereichserweiterungen

---

## Hinführung

Brüche sind Zahlen der Form $\frac{3}{4}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{7}{15}$ etc. Brüche können auch negativ sein, z.B. $-\frac{1}{2}$, $\frac{8}{3}$, ...

Brüche können an der Zahlengeraden dargestellt werden.

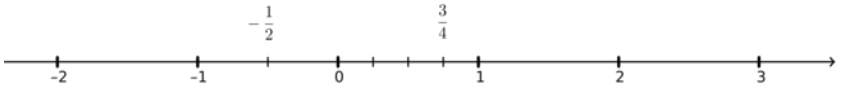



**Bild 1**

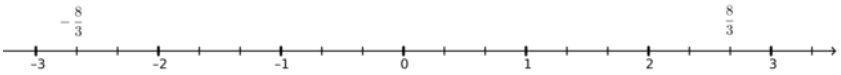



**Bild 2**

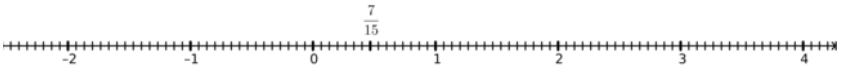



**Bild 3**

Den Bruch $\frac{1}{4}$ erhalten wir, indem wir die Strecke von 0 bis 1 in vier gleichgroße Teile einteilen und das erste Teil nehmen. $\frac{3}{4}$ erhalten wir, indem wir von den vier Teilen drei Teile nehmen. Negative Brüche wie $-\frac{8}{3}$ liegen links von der Null und sind genauso weit von der Null entfernt, wie das Gegenstück $\frac{8}{3}$ auf der rechten Seite von der Null entfernt liegt. Es gilt $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \ldots$ Alle diese Brüche können durch denselben Punkt auf der Zahlengeraden dargestellt werden. Man spricht davon, dass diese Brüche denselben Wert haben, oder auch dass diese Brüche dieselbe Bruchzahl (d.h. rationale Zahl) darstellen.

## Inhalte mit Erklärungen

Wir gehen von einem Zahlenstrahl aus




**Bild 4**

Wir können z.B. alle Abschnitte (der Länge 1) zwischen zwei ganzen Zahlen in 4 gleichgroße Teile einteilen.




**Bild 5**

Die Punkte rechts von 0 bezeichnet man mit $\frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{4},\ \frac{5}{4}, \ldots$ ($\frac{1}{4}$ kann man auch als Ergebnis der Division $1 : 4$ sehen).
Die unendliche Menge dieser Punkte lässt sich darstellen als $M_4 := \{\frac{m}{4} \mid m \in \mathbb{N}_0\} = \{\frac{0}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \ldots\}$. Dies kann man nicht nur für die Zahl 4, sondern für jede mögliche natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ machen. Zum Beispiel $M_3 = \{\frac{m}{3} \mid m \in \mathbb{N}_0\} = \{\frac{0}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ \ldots\}$.

Die beiden Mengen haben viele gemeinsame Punkte, z.B. $\frac{0}{4} = \frac{0}{3} = 0$ oder $\frac{12}{3} = 4 = \frac{16}{4}$. Jeweils stellen beide Brüche dieselbe ganze Zahl dar.

Wenn die Mengen aller Punkte, die durch Halbieren, Dritteln, Vierteln usw. entstehen, miteinander vereinigt werden, entsteht die Menge aller nicht negativen rationalen Zahlen - das mathematische Symbol dafür ist $\mathbb{Q}_0^+$.

Dabei ist zu beachten, dass z.B. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \ldots$
Diese Brüche stellen alle dieselbe rationale Zahl dar (und damit denselben Punkt auf dem Zahlenstrahl). In der Menge $\mathbb{Q}_0^+$ kommt dieselbe rationale Zahl nur einmal vor (obwohl es unendlich viele verschiedene Schreibweisen für jede dieser Zahlen gibt). $\mathbb{Q}_0^+$ enthält auch die natürlichen Zahlen $1 = \frac{1}{1},\ 2 = \frac{2}{1},\ 3 = \frac{3}{1},\ \ldots$ und die Null: $0 = \frac{0}{1}$.
Man erhält die Menge aller rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, wenn zu jeder positiven Zahl $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_0^+$ noch die Gegenzahl $-\frac{m}{n}$ hinzugenommen wird.

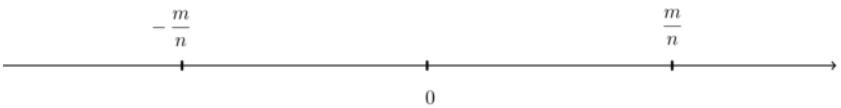



**Bild 6**

Manchmal wird auch die folgende Mengendarstellung für $\mathbb{Q}_0^+$ angegeben: $\mathbb{Q}_0^+ = \left\{\frac{m}{n} \mid n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}_0\right\}$. Dabei sollte beachtet werden, dass Mengen jedes Element nur genau einmal enthalten, also kein Element mehrfach

in einer Menge enthalten ist. Wenn nacheinander mögliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_0$ „durchlaufen“ würden, würden zunächst z.B. die Zahlen $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{4}$ „erzeugt“, welche aber nur als die eine rationale Zahl $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$ in $\mathbb{Q}_0^+$ vorkommt. Um auch die negativen Bruchzahlen zu berücksichtigen, wird manchmal die Mengendarstellung $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$ verwendet. Das ist dann richtig, wenn wieder $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$ als ein einziges Element zählt und auch beachtet wird, dass z.B. $-\frac{3}{4} = \frac{-3}{4} = \frac{3}{-4}$ für dieselbe rationale Zahl steht.

**Definition 1:**
Eine Zahldarstellung der Form $q = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ nennt man einen **Bruch**. Dabei heißt die Zahl $m$ **Zähler** des Bruches und die Zahl $n$ heißt **Nenner** des Bruches.

**Info 1:**
Bruchdarstellungen sind nicht eindeutig, z.B. ist

$$\frac{m}{n} = \frac{k \cdot m}{k \cdot n} \text{ für alle } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Ferner ist auch

$$-\frac{m}{n} = \frac{-m}{n} = \frac{m}{-n}.$$

Bemerkung: In der Schule sagt man auch, die beiden Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{k \cdot m}{k \cdot n}$ „haben denselben Wert“ oder stellen dieselbe Bruchzahl dar.

**Info 2:**
Eine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ kann als Bruch dargestellt werden. Die Menge der rationalen Zahlen kann geschrieben werden als $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}$.

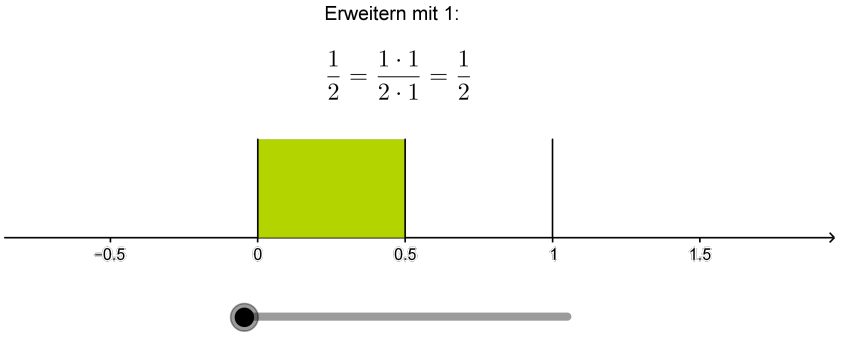
### Erweitern und Kürzen

**Regel 1: (Erweitern von Brüchen)**
Beim Erweitern von Brüchen werden der Zähler und der Nenner mit der gleichen natürlichen Zahl größer als 1 multipliziert. Erweitern ändert den Wert einer Bruchzahl nicht. Seien $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Dann gilt:

$$\frac{m}{n} = \frac{m \cdot a}{n \cdot a}$$

Beide Brüche stellen dieselbe rationale Zahl dar.

Wir haben schon zuvor festgestellt, dass es mehrere Brüche gibt, welche dieselbe Position auf der Zahlengeraden einnehmen. Anhand des folgenden Applets können Sie sich dies für den Bruch $\frac{1}{2}$ verdeutlichen. Steuern Sie dazu den Schieberegler, um den Bruch mit einer Zahl zwischen 2 und 20 zu erweitern und daneben die geometrische Interpretation zu sehen.




**Interaktion 1** *(nur in digitaler Version)*

**Beispiel 1:**

So werden Brüche erweitert:

- $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10}$
- $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 7}{7 \cdot 7} = \frac{21}{49}$

**Aufgabe 1:**
Erweitern Sie den Bruch $\frac{2}{5}$ mit 3.

$\frac{2}{5} =$ ?

**Lösung:**
$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$

**Regel 2: (Kürzen von Brüchen)**

Kürzen ist die umgekehrte Operation zum Erweitern. Dabei werden der Zähler und der Nenner durch die gleiche natürliche Zahl größer 1 dividiert. Auch Kürzen ändert den Wert einer Bruchzahl nicht.

Seien $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ so, dass $a$ sowohl ein Teiler von $m$ als auch ein Teiler von $n$ ist. Dann gilt:

$$\frac{m}{n} = \frac{m : a}{n : a}$$

Wir betrachten z.B. die folgende Kürzung $\frac{30}{40} = \frac{30:10}{40:10} = \frac{3}{4}$. Kürzen kann durch Erweitern rückgängig gemacht werden. $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 10}{4 \cdot 10} = \frac{30}{40}$. Dass Kürzen den Wert einer Bruchzahl nicht ändert, folgt daraus, dass Erweitern den Wert einer Bruchzahl nicht ändert.

**Beispiel 2:**

So werden Brüche gekürzt:

- $\frac{30}{40} = \frac{30:10}{40:10} = \frac{3}{4}$

- $\frac{12}{44} = \frac{12 \cdot 2}{44 \cdot 2} = \frac{6}{22}$

**Aufgabe 2:**
Kürzen Sie den Bruch $\frac{25}{50}$ soweit wie möglich.

$\frac{25}{50} =$ ?

**Lösung:**
$\frac{25}{50} = \frac{25:25}{50:25} = \frac{1}{2}$

**Info 3: (Hauptnenner)**
Der **Hauptnenner** zweier Brüche ist der kleinstmögliche gemeinsame Nenner, auf welchen beide Brüche erweitert werden können.

**Beispiel 3:**
Der Hauptnenner von

- $\frac{18}{24}$ und $\frac{1}{2}$ ist 24, denn $\frac{1}{2} = \frac{12}{24}$.
- $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{5}$ ist 15, denn $\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$ und $\frac{1}{5} = \frac{3}{15}$.
- $\frac{6}{8}$ und $\frac{21}{12}$ ist 24, denn $\frac{6}{8} = \frac{18}{24}$ und $\frac{21}{12} = \frac{42}{24}$.

**Addition von Brüchen**

Die Addition zweier Brüche kann anschaulich mit Strecken verdeutlicht werden.

**Beispiel 4:**
Sei $r = \frac{3}{8}$ und $s = \frac{2}{8}$. Dann kann die Addition $r + s = \frac{3}{8} + \frac{2}{8}$ folgendermaßen graphisch veranschaulicht werden:

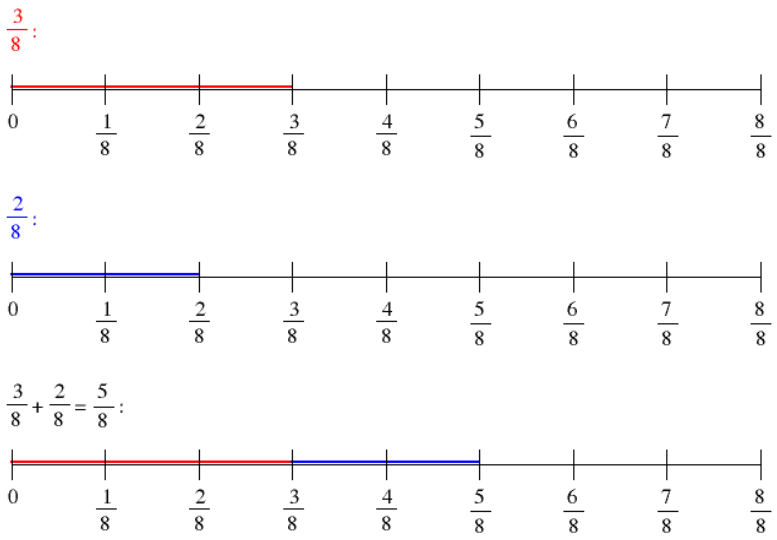



**Bild 7**

Man kann ablesen, dass gilt: $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3+2}{8} = \frac{5}{8}$

**Aufgabe 3:**
Stellen Sie mithilfe des obigen Beispiels eine allgemeine Regel auf, wie Brüche mit gleichem Nenner (sogenannte *gleichnamige* Brüche) addiert werden.

Für alle Zahlen $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt:

$\frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} =$ ?

**Lösung:**
Wie man an der oben gezeigten Graphik erkennen kann, werden in diesem Beispiel bei der Addition gleichnamiger Brüche die **Zähler** addiert und der Nenner beibehalten.

Man legt allgemein fest

$$\frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = \frac{m_1 + m_2}{n}$$

für alle Zahlen $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Auf diese Weise entspricht die rechnerische Addition der geometrischen Addition der zugehörigen Strecken.

Gleiches gilt für die Subtraktion. Man kann daher folgende Regel formulieren:

**Regel 3:**
**Gleichnamige** Brüche addiert beziehungsweise subtrahiert man, indem man die **Zähler** addiert beziehungsweise subtrahiert.

Es gilt also für alle Zahlen $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$:

$$\frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = \frac{m_1 + m_2}{n}$$
$$\frac{m_1}{n} - \frac{m_2}{n} = \frac{m_1 - m_2}{n}$$

**Tiefergehende Begründung der Regel** *(Aufklapptext)*

Betrachten wir $r = \frac{3}{8}$ und $s = \frac{4}{8}$, dann ist $\frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{7}{8}$.
Für $r$ und $s$ gibt es aber auch andere Darstellungen, z.B.

$$r = \frac{6}{16}, \; s = \frac{8}{16}$$

Nach der Additionsregel gilt

$$\frac{6}{16} + \frac{8}{16} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt, weil dort durch 2 gekürzt werden kann.

Man kann auch formal zeigen: Es kommt bei der Addition immer dieselbe Zahl heraus, egal welche Bruchdarstellung man für $r$ und $s$ wählt. Dieses Ergebnis ist nicht so überraschend, wenn die geometrische Addition zweier Brüche betrachtet wird, da diese auch ein eindeutiges Ergebnis liefert.

Doch wie addiert man Brüche mit **verschiedenen Nennern**? Betrachten wir wieder eine graphische Veranschaulichung durch Strecken:

**Beispiel 5:**

Seien $r = \frac{1}{2}$ und $s = \frac{1}{3}$. Man kann das Ergebnis der Addition $r + s = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ nun geometrisch darstellen, aber auch rechnerisch durchführen, indem beide Brüche auf den gemeinsamen Nenner 6 erweitert werden:

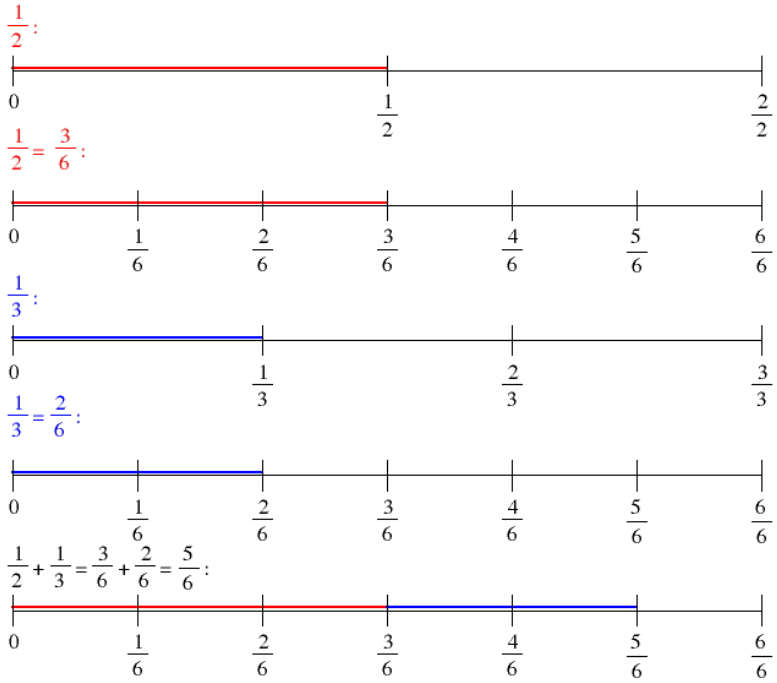



**Bild 8**

Man rechnet also:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

Brüche mit unterschiedlichem Nenner addiert beziehungsweise subtrahiert man also, indem man sie auf den gleichen Nenner bringt und dann wie bei gleichnamigen Brüchen weiterrechnet.

Auf den gleichen Nenner bringt man Brüche, indem man sie kürzt oder erweitert. Am zuverlässigsten funktioniert dies, indem man jeden der beiden Brüche mit dem Nenner des anderen Bruches erweitert. So wurde in obigem Beispiel der Bruch $\frac{1}{2}$ mit der Zahl 3 erweitert, also mit dem Nenner des Bruches $\frac{1}{3}$, und der Bruch $\frac{1}{3}$ wurde mit der Zahl 2 erweitert, also mit dem Nenner des Bruches $\frac{1}{2}$, sodass beide Brüche den gemeinsamen Nenner $2 \cdot 3 = 6$ erhielten.

Um zwei Brüche mit verschiedenen Nennern rechnerisch zu addieren beziehungsweise zu subtrahieren, bringt man sie durch Erweitern oder Kürzen auf einen gemeinsamen Nenner. Danach addiert beziehungsweise subtrahiert man die Zähler.

**Regel 4: (Addition und Subtraktion von beliebigen Brüchen)**
Es gilt für alle Zahlen $m, p \in \mathbb{Z}$ und $n, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$:

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{m \cdot q}{n \cdot q} + \frac{p \cdot n}{q \cdot n} = \frac{m \cdot q + p \cdot n}{n \cdot q}$$
$$\frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{m \cdot q}{n \cdot q} - \frac{p \cdot n}{q \cdot n} = \frac{m \cdot q - p \cdot n}{n \cdot q}$$

**Bemerkung** *(Aufklapptext)*

1. Auch hier kann formal gezeigt werden, dass das Additionsergebnis von zwei rationalen Zahlen nicht von der gewählten Bruchdarstellung der Zahlen abhängig ist.
2. Die etwas kompliziert scheinende Formel ergibt sich daraus, dass die rechnerische Bruchaddition der geometrischen Addition entsprechen soll. Das würde von der Formel $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{m+p}{n+q}$ nicht geleistet.

Häufig ist es auch möglich, einen gemeinsamen Nenner (meist das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner) zu finden, der kleiner ist als das Produkt der beiden ursprünglichen Nenner. Dies reduziert den Rechenaufwand.

**Beispiel 6:**
$\frac{13}{6} - \frac{5}{9} = \frac{13 \cdot 3}{6 \cdot 3} - \frac{5 \cdot 2}{9 \cdot 2} = \frac{39}{18} - \frac{10}{18} = \frac{29}{18}$

**Beispiel 7:**
$\frac{68}{51} - \frac{6}{9} = \frac{68:17}{51:17} - \frac{6:3}{9:3} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

**Aufgabe 4:**
Addieren Sie $\frac{2}{8}$ und $\frac{3}{12}$ und kürzen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

$\frac{2}{8} + \frac{3}{12} =$ ?

**Lösung:**

In diesem Fall kann man beide Brüche zunächst kürzen und erhält dadurch schon einen gemeinsamen Nenner:

$$\frac{2}{8} = \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$
$$\frac{3}{12} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{1}{4}$$

und somit gilt:

$$\frac{2}{8} + \frac{3}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Subtrahieren Sie $\frac{1}{5}$ von $\frac{6}{10}$ und kürzen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

$\frac{6}{10} - \frac{1}{5} =$ ?

**Lösung:**

In diesem Fall ist es am geschicktesten, den Bruch $\frac{1}{5}$ auf den Nenner 10 zu erweitern, um die beiden Brüche subtrahieren zu können:

$$\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{2}{10}$$

und somit gilt:

$$\frac{6}{10} - \frac{1}{5} = \frac{6}{10} - \frac{2}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{2}{5}$$

### Multiplikation von Brüchen

**Regel 5: (Multiplikation eines Bruches mit einer ganzen Zahl)**

Für die Multiplikation eines Bruches $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, mit einer ganzen Zahl $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\frac{p}{q} \cdot n = n \cdot \frac{p}{q} = \frac{n \cdot p}{q}$$

### Tiefergehende Begründung der Regel *(Aufklapptext)*

Seien beispielsweise $n = 5$ und $\frac{p}{q} = \frac{2}{3}$. Wird nun die Multiplikation mit 5 als wiederholte Addition interpretiert, so gilt:

$$\frac{2}{3} \cdot 5 = \underbrace{\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}}_{\text{5-mal}} = \frac{\overbrace{2+2+2+2+2}^{\text{5-mal}}}{3} = \frac{5 \cdot 2}{3}$$

Der Bruch wird so also 5 mal addiert. Das Prinzip funktioniert bei der Multiplikation eines Bruches mit einer anderen natürlichen Zahl auf dieselbe Weise. Mit einer beliebig, aber fest gewählten natürlichen Zahl $n$ gilt also:

$$\frac{2}{3} \cdot n = \underbrace{\frac{2}{3} + \ldots + \frac{2}{3}}_{\text{n-mal}} = \frac{\overbrace{2 + \ldots + 2}^{\text{n-mal}}}{3} = \frac{n \cdot 2}{3}$$

Dieses Prinzip können wir ebenso für einen allgemeinen Bruch $\frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ anwenden:

$$\frac{p}{q} \cdot n = \underbrace{\frac{p}{q} + \ldots + \frac{p}{q}}_{\text{n-mal}} = \frac{\overbrace{p + \ldots + p}^{\text{n-mal}}}{q} = \frac{n \cdot p}{q}$$

Die Regel lässt sich somit aus der Regel für die Bruchaddition ableiten. Auch für diese Regel kann formal bewiesen werden, dass das Ergebnis der Rechnung bei verschiedenen Darstellungen derselben Bruchzahl immer zu demselben Ergebnis führt.

**Beispiel 8:**

- $\frac{3}{11} \cdot 4 = \frac{3 \cdot 4}{11} = \frac{12}{11}$
- $\frac{17}{5} \cdot 3 = \frac{17 \cdot 3}{5} = \frac{51}{5}$
- $\frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2}{4} = \frac{2}{4}$

**Regel 6: (Division eines Bruches durch eine ganze Zahl)**
Für die Division eines Bruches $\frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ durch die ganze Zahl $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\frac{p}{q} : n = \frac{p}{q \cdot n}$$

Betrachten wir das Beispiel $\frac{3}{4} : 5$. Geometrisch erhalten wir das Ergebnis der Division, indem wir $\frac{1}{4}$ in 5 gleiche Teile einteilen - das ergibt $\frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{1}{20}$ - und dann 3 davon nehmen, d.h. $3 \cdot \frac{1}{5 \cdot 4} = \frac{3}{5 \cdot 4}$. Die Rechenregel liefert unabhängig von der gewählten Bruchdarstellung einer Zahl, sogar für negative Nenner und Zähler, immer dasselbe Ergebnis. Dies kann auch formal gezeigt werden.

**Beispiel 9:**

$$\frac{9}{23} : 3 = \frac{9}{23 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 3}{23 \cdot 3} = \frac{3}{23}$$

Da die 3 in Zähler und Nenner steht, konnten wir schon während der Rechnung mit 3 kürzen und so die Rechnung ein wenig vereinfachen.

**Aufgabe 5:**
Berechnen Sie und kürzen Sie, wenn möglich.

$\frac{5}{9} : 3 =$ ?

**Lösung:**
$\frac{5}{9} : 3 = \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5 \cdot 1}{9 \cdot 3} = \frac{5}{27}$

Unter der Multiplikation eines Bruches $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, mit einem Bruch $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, will man die kombinierte Operation $\left(\frac{p}{q} \cdot m\right) : n$ bzw. $\left(\frac{p}{q} : n\right) \cdot m$ verstehen. Nach den bisherigen Regel ist das Ergebnis bei beiden Operationsfolgen dann

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{p \cdot m}{q \cdot n},$$

denn $\left(\frac{p}{q} \cdot m\right) : n = \frac{p \cdot m}{q} : n = \frac{p \cdot m}{q \cdot n}$
und $\left(\frac{p}{q} : n\right) \cdot m = \frac{p}{q \cdot n} \cdot m = \frac{p \cdot m}{q \cdot n}$.

**Interpretation:** Die Erklärung von der Multiplikation mit einem Bruch, z.B. $\cdot\frac{3}{4}$, als Zusammensetzung der Operationen Dividieren, $(: 4)$, und Multiplizieren, $(\cdot 3)$, entspricht auch der anschaulichen Vorstellung von $\left(\cdot\frac{3}{4}\right)$ als „$\frac{3}{4}$ von“ einer Zahl oder Größe.

Die Multiplikation mit Brüchen ist also eine Kombination der Multiplikation und Division von ganzen Zahlen, d.h. zum Beispiel, dass die Multiplikation auch zu einer Verkleinerung einer Zahl führen kann: $3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8} < 3$, während die Multiplikation mit natürlichen Zahlen stets ein größeres Ergebnis liefert (Ausnahme ist die Zahl 1).

**Regel 7: (Multiplikation zweier Brüche)**
Seien $m, p \in \mathbb{Z}$ und $n, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. So gilt für die Multiplikation der beiden Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{p}{q}$:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$$

Es werden also Zähler und Nenner jeweils miteinander multipliziert.

**Tiefergehende Bemerkung** *(Aufklapptext)*

Auch hier kann formal gezeigt werden, dass das wie oben definierte Produkt zweier Brüche nicht von der Bruchdarstellung abhängt - auch für negative Zähler und Nenner.

Wichtig ist hierbei, zu wissen, dass die **Multiplikation** zweier Brüche im Sprachgebrauch durch Aussagen wie „ein Drittel **von** einer Hälfte“ ausgedrückt wird (was dem mathematischen Ausdruck $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$ entspricht).

**Beispiel 10:**

- $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{6}{12}$
- $\frac{2}{3} \cdot \frac{10}{11} = \frac{2 \cdot 10}{3 \cdot 11} = \frac{20}{33}$
- $\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5 \cdot 1}{2 \cdot 8} = \frac{5}{16}$

**Aufgabe 6:**
Multiplizieren Sie die Brüche $\frac{3}{7}$ und $\frac{2}{9}$ und kürzen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

$\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{9} =$ ?

**Lösung:**
$\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{9} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 9} = \frac{6}{63} = \frac{2}{21}$

Wenn wir einen Bruch $\frac{p}{q}$ mit einer natürlichen Zahl n multiplizieren, haben wir zwei Regeln aufgestellt, die wir benutzen können. Denn natürliche Zahlen können immer als Bruch dargestellt werden: $n = \frac{n}{1}$.

**Aufgabe 7:**
Zeigen Sie, dass die Regeln zur Multiplikation eines Bruches mit einer natürlichen Zahl und zur Multiplikation zweier Brüche zum selben Ergebnis führen, wenn wir einen Bruch $\frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ wählen und diesen mit $n \in \mathbb{Z}$ bzw. $\frac{n}{1}$ multiplizieren.

**Lösung:**

Wir veranschaulichen uns den Sachverhalt, indem wir als Bruch $\frac{5}{3}$ wählen und als natürliche Zahl $n$ wählen wir exemplarisch 4.
Demnach ergibt die Multiplikation nach der obigen Regel zur Multiplikation eines Bruches mit einer natürlichen Zahl:

$$\frac{5}{3} \cdot 4 = \frac{5 \cdot 4}{3} = \frac{20}{3} \quad .$$

Nun betrachten wir $\frac{4}{1}$ anstelle von 4. Wir wenden also die Regel zur Multiplikation zweier Brüche an:

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{4}{1} = \frac{5 \cdot 4}{3 \cdot 1} = \frac{20}{3} \quad .$$

In diesem konkreten Beispiel führen beide Rechenregeln zu demselben Endergebnis. Wir betrachten nun den allgemeinen Fall mit Buchstabenvariablen.

Sei $\frac{p}{q}$ ein Bruch mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und sei $n \in \mathbb{Z}$. Nach der Regel zur Multiplikation eines Bruches mit einer ganzen Zahl ergibt sich:

$$\frac{p}{q} \cdot n = \frac{p \cdot n}{q} \quad .$$

Betrachten wir nun $\frac{n}{1}$, dann erhalten wir nach der Regel zur Multiplikation zweier Brüche:

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{n}{1} = \frac{p \cdot n}{q \cdot 1} = \frac{p \cdot n}{q} \quad .$$

Damit haben wir gezeigt, dass wir mit beiden Rechenregeln zu demselben Ergebnis gelangen.

Wie kann man die Division durch einen Bruch festlegen?

Die Division in den ganzen Zahlen macht die Multiplikation rückgängig und umgekehrt:

$$x \xrightarrow{\cdot a} x \cdot a \xrightarrow{:a} x$$

Wie kann nun die Multiplikation mit einem Bruch wie $\frac{3}{4}$ rückgängig gemacht werden? $(x \cdot \frac{3}{4})$ entspricht $(x \cdot 3) : 4$. Rückgängig gemacht wird dies durch die Operationen $(\cdot 4)$ und anschließend $(: 3)$, was der Multiplikation mit dem Bruch $\frac{4}{3}$ entspricht. Wenn die Division durch einen Bruch auch die Multiplikation rückgängig machen soll, muss die Division als Multiplikation mit dem Umkehrbruch festgesetzt werden.

**Definition 2:**

Zu einem Bruch $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist $\frac{n}{m}$ der **Umkehrbruch**.
Anders gesagt: Zur rationalen Zahl $\frac{m}{n}$ ist die rationale Zahl $\frac{n}{m}$ der Kehrwert.

Den Umkehrbruch zu einem gegebenen Bruch erhält man also, wenn Zähler und Nenner vertauscht werden. Ist der Zähler eines Bruches 0, gibt es keinen Umkehrbruch.

**Beispiel 11:**

Somit ist $\frac{3}{4}$ der Umkehrbruch von $\frac{4}{3}$ und $\frac{6}{7}$ der Umkehrbruch von $\frac{7}{6}$.

**Regel 8: (Division eines Bruches durch einen Bruch)**
Für alle Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{p}{q}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n, p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} = \frac{m \cdot q}{n \cdot p}$$

Die Division einer ganzen Zahl $m \in \mathbb{Z}$ durch einen Bruch ist ein Spezialfall hiervon, da eine ganze Zahl stets als Bruch $m = \frac{m}{1}$ geschrieben werden kann.

**Beispiel 12:**
Wird 9 durch $\frac{3}{4}$ dividiert, so multipliziert man mit dem Umkehrbruch $\frac{4}{3}$. Auch hier kann vor dem Ausrechnen des Zählers geprüft werden, ob gekürzt werden kann.

$$9 : \frac{3}{4} = 9 \cdot \frac{4}{3} = \frac{9 \cdot 4}{3} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 4}{3} = 3 \cdot 4 = 12$$

**Beispiel 13:**
Dividiert man $\frac{1}{7}$ durch $\frac{8}{3}$, so multipliziert man $\frac{1}{7}$ mit dem Umkehrbruch $\frac{3}{8}$.

$$\frac{1}{7} : \frac{8}{3} = \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1 \cdot 3}{7 \cdot 8} = \frac{3}{56}$$

**Beispiel 14:**
Eine spezielle Darstellung einer Divisionsaufgabe zweier Brüche ist der sogenannte Doppelbruch. Hierbei handelt es sich um einen Bruch, bei dem sowohl der Zähler als auch der Nenner selbst wieder aus einem Bruch bestehen. Ein Beispiel ist der Bruch $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{6}{2}}$, bei dem im Zähler $\frac{3}{4}$ steht und im Nenner $\frac{6}{2}$. Statt dieser Schreibweise können wir auch den mittleren Bruchstrich als Divisionszeichen interpretieren:

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{6}{2}} = \frac{3}{4} : \frac{6}{2}$$

An dieser Stelle rechnen wir wie im obigen Beispiel weiter: Die Division wird als Multiplikation mit dem Umkehrbruch aufgelöst:

$$\frac{3}{4} : \frac{6}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{6} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 6} = \frac{1}{4}.$$

Der Wert des Doppelbruchs bzw. das Ergebnis der Division ist somit

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{6}{2}} = \frac{1}{4}$$

**Aufgabe 8:**
Dividieren Sie 4 durch $\frac{2}{3}$, indem Sie mit dem Umkehrbruch multiplizieren. Kürzen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

$4 : \frac{2}{3} = 4 \cdot$ ? $=$ ?

**Lösung:**
$4 : \frac{2}{3} = 4 \cdot \frac{3}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{12}{2} = \frac{6}{1} = 6$

Dividieren Sie $\frac{5}{9}$ durch $\frac{5}{3}$ und kürzen Sie das Ergebnis so weit wie möglich.

$\frac{5}{9} : \frac{5}{3} =$ ?

**Lösung:**
$\frac{5}{9} : \frac{5}{3} = \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{5} = \frac{5 \cdot 3}{9 \cdot 5} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$

Vereinfachen Sie den Doppelbruch $\frac{\frac{15}{7}}{\frac{10}{21}}$ und kürzen Sie so weit wie möglich.

$\frac{\frac{15}{7}}{\frac{10}{21}} =$ ?

**Lösung:**
$\frac{\frac{15}{7}}{\frac{10}{21}} = \frac{15}{7} : \frac{10}{21} = \frac{15}{7} \cdot \frac{21}{10} = \frac{9}{2}$

**Brüche und Dezimalschreibweise**

Zahlen setzen sich aus Ziffern zusammen. Die Zahl 562 etwa besteht aus den Ziffern 2, 5 und 6. Für die Zahlen von Null bis Neun gilt, dass die Schreibweise für die Zahl auch der Ziffer entspricht, z.B. steht 7 für die Ziffer und auch die Zahl zur selben Zeit. Die Zahl 562 können wir auch als Summe schreiben: 500 + 60 + 2. Dann wird deutlicher, dass die Ziffern an den verschiedenen Stellen eine andere Bedeutung haben. Für die Zahl 562 gibt die Ziffer 5 die Anzahl der Hunderter an, die Ziffer 6 die Anzahl der Zehner und die Ziffer 2 die Anzahl der Einer an. Ist eine Stelle nicht besetzt, schreiben wir eine Null, also etwa 102. Nur vor der größten besetzten Stelle schreiben wir nichts. **Unüblich** wäre es also 00102 zu schreiben und damit 102 zu meinen.

**Stellenwerttafel:**

| Zehntausender | Eintausender | Hunderter | Zehner | Einer | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 5 | 6 | 2 | *üblich* |
| 0 | 0 | 5 | 6 | 2 | *unüblich* |

Um Brüche im Dezimalsystem darzustellen, erweitern wir die Stellenwerttafel nun noch zusätzlich nach rechts um Zehntel, Hundertstel, Tausendstel, Zehntausendstel und entsprechend fortgeführt. Diese zusätzlichen Stellen werden beim Schreiben mit dem Dezimalkomma abgetrennt - z.B. $4,235$ oder $0,15$. Das Dezimalkomma steht immer rechts von der Einer-Stelle. Wenn es keine Stelle rechts von der Einer-Stelle gibt, die besetzt ist, kann das Dezimalkomma zusammen mit allen Nullen entfallen: $95,000 = 95$.

| Zehner | Einer | Zehntel | Hundertstel | Tausendstel | Zehntausendstel |
|---|---|---|---|---|---|
| | 4 | 2 | 3 | 5 | 0 |
| | 0 | 1 | 5 | 0 | 0 |
| 9 | 5 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Je nach Rechensituation kann es sinnvoll sein, Nullen auf der rechten Seite des Kommas zu ergänzen.

**Beispiel 15:**

Beispiele für die Ergänzung von Nullen auf der rechten Seite des Kommas:

- $4,235 = 4,2350$
- $0,15 = 0,1500$
- $95 = 95,0000$
- Aber $55 \neq 550$, da die Null nicht auf der rechten Seite des Kommas ergänzt wurde.

**Beispiel 16:**

Im Alltag werden Dezimalzahlen mit Zehntel- und Hundertstel- Stellen benutzt, um bspw. Preise in Euro anzugeben - etwa $9,99$ €.

Auf der Zahlengeraden interpretieren wir Dezimalzahlen folgendermaßen: Die Strecke zwischen zwei benachbarten ganzen Zahlen wird in 10 gleich große Stücke geteilt. Ein Zehntel entspricht dann der Länge eines dieser Stücke und drei Zehntel der Länge von dreien dieser Stücke hintereinander. Für ein Hundertstel wird dieselbe Strecke gedanklich in Hundert Teile geteilt, für Tausendstel in Tausend und entsprechend fortgeführt. Zum Eintragen auf der Zahlengeraden nehmen wir die Länge alle dieser Teilstrecken zusammen.

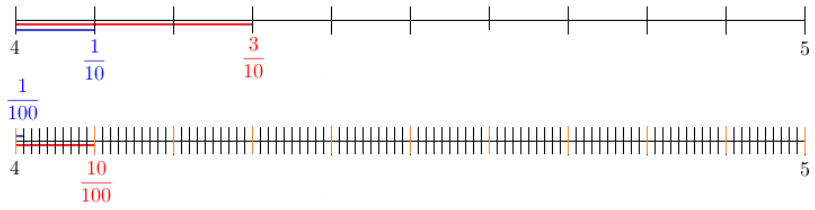



**Bild 9**

**Info 4: (Bedeutung von Dezimalzahlen als Brüche)**

$$\begin{aligned} 2,3518 &= 2 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{8}{10000} \\ &= 2 + \frac{3518}{10000} \\ &= \frac{23518}{10000} \end{aligned}$$

An dem Beispiel wird deutlich, dass sich Dezimalzahlen auch als Brüche schreiben lassen, die aus einer Summe von Brüchen mit 10er- Potenzen im Nenner entstehen.

### Wie kann ein beliebiger Bruch $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, als Dezimalzahl dargestellt werden?

**Beispiel 17:**

Wir stellen den Bruch $\frac{1}{2}$ als Dezimalzahl dar.

Dazu wird $\frac{1}{2}$ so erweitert, dass gilt $\frac{1}{2} = \frac{}{10^n}$. Also soll so erweitert werden, dass im Nenner eine Zehnerpotenz steht. In diesem Fall gelingt dies durch Erweitern des Bruches mit 5:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10} = 0,5.$$

**Beispiel 18:**

Wir stellen den Bruch $\frac{9}{8}$ als Dezimalzahl dar.

Wir suchen ein Vielfaches von 8, welche eine Zehnerpotenz ist: $8 \cdot 125 = 1000$. Also:

$$\frac{9}{8} = \frac{9 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{1125}{1000} = 1,125.$$

Eine Umwandlung von einem Bruch in eine Dezimalzahl kann man auch mithilfe des erweiterten Divisionsalgorithmus' durchführen:

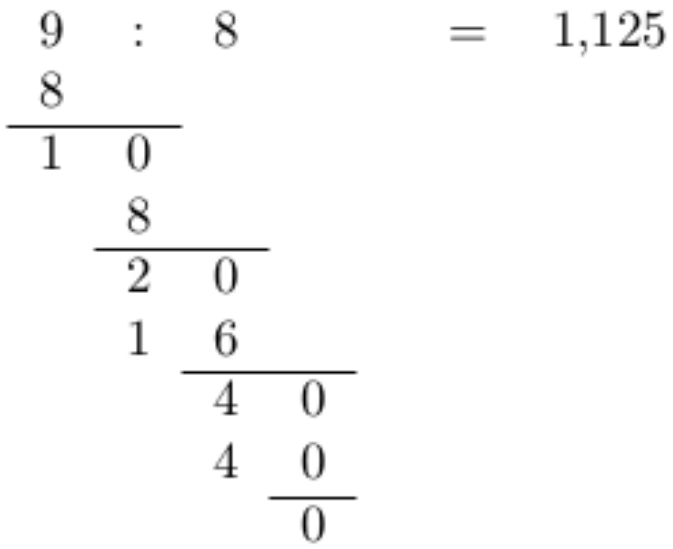



**Bild 10**

Es gilt also $\frac{9}{8} = 1,125$.

**Welche Brüche können in Dezimalzahlen umgewandelt werden?**

Zehnerpotenzen enthalten immer die Primfaktoren 2 und 5, denn $10^n = 2^n \cdot 5^n$. Ein vollständig gekürzter Bruch $\frac{p}{q}$ kann nur dann umgewandelt werden, wenn $q$ als Primfaktoren ausschließlich die 2 und die 5 enthält. Was passiert nun, wenn an den Divisionsalgorithmus auf einen Bruch anwendet, von dem man schon weiß, dass er nicht als Dezimalzahl darstellbar ist, z.B. $\frac{1}{3}$?

$$
\begin{array}{rcl}
1 : 3 & = & 0{,}3333\ldots \\
0 & & \\
\hline
1\ 0 & & \\
\quad 9 & & \\
\hline
\quad 1\ 0 & & \\
\quad\ \ 9 & & \\
\hline
\quad\ \ 1\ 0 & & \\
\quad\ \ \ 9 & & \\
\hline
\quad\ \ \ 1\ 0 & & \\
\quad\ \ \ \ 9 & & \\
\hline
\quad\ \ \ \ 1 & &
\end{array}
$$

**Bild 11**

Der Divisionsprozess endet nicht, man sieht aber, dass immer wieder der Rest 1 bleibt, sodass zum Ergebnis immer eine Ziffer 3 hinzugefügt wird. Diese Ziffer bezeichnet man als Periode und schreibt kurz $\frac{1}{3} = 0,3333\ldots = 0,\overline{3}$.

Es kann gezeigt werden, dass für jeden Bruch eine solche Darstellung als unendliche periodische Dezimalzahl gefunden werden kann.

**Beispiel 19:**

Wir geben einige Brüche mit ihrer periodischen Dezimalzahldarstellung an:

- $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$
- $\frac{3}{7} = 0,\overline{428571}$
- $\frac{5}{3} = 1,\overline{6}$
- $\frac{6}{13} = 0,\overline{461538}$

Betrachten wir als weiteres Beispiel $\frac{1}{90}$.

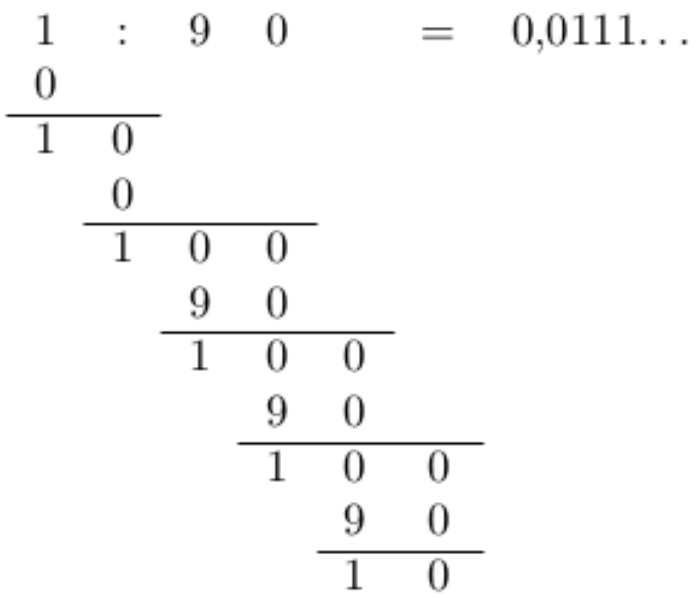



**Bild 12**

Wir schreiben $\frac{1}{90} = 0,0\overline{1}$ und nennen 0 in diesem Fall die Vorperiode.

Brüche mit periodischer Dezimalzahldarstellung und Vorperiode:

- $\frac{1}{90} = 0,0\overline{1}$ mit Vorperiode: 0
- $\frac{38}{90} = 0,4\overline{2}$ mit Vorperiode: 4
- $\frac{12251}{2100} = 5,83\overline{380952}$ mit Vorperiode: 83

## Aufgaben

**Aufgabe 9:**
Erweitern Sie den Bruch mit der jeweiligen Zahl und geben Sie das Ergebnis in Bruchschreibweise an:

1. $\frac{18}{10}$ mit 10: ?

2. $\frac{9}{9}$ mit 16: ?

**Lösung:**

1. $\frac{18}{10} = \frac{18 \cdot 10}{10 \cdot 10} = \frac{180}{100}$

2. $\frac{9}{9} = \frac{9 \cdot 16}{9 \cdot 16} = \frac{144}{144}$

**Aufgabe 10:**
Erweitern Sie den Bruch mit der jeweiligen Zahl und geben Sie das Ergebnis in Bruchschreibweise an:

1. $\frac{1}{4}$ mit 16: ?

2. $\frac{4}{18}$ mit 22: ?

**Lösung:**

1. $\frac{1}{4} = \frac{16}{64}$

2. $\frac{4}{18} = \frac{88}{396}$

**Aufgabe 11:**
Kürzen Sie den Bruch mit der jeweiligen Zahl und geben Sie das Ergebnis in Bruchschreibweise an:
1. $\frac{20}{10}$ mit 5: ?

2. $\frac{20}{10}$ mit 10: ?

3. $\frac{15}{30}$ mit 15: ?

**Lösung:**

1. $\frac{20}{10} = \frac{20:5}{10:5} = \frac{4}{2}$

2. $\frac{20}{10} = \frac{20:10}{10:10} = \frac{2}{1} = 2$

3. $\frac{15}{30} = \frac{15:15}{30:15} = \frac{1}{2}$

**Aufgabe 12:**
Kürzen Sie den Bruch mit der jeweiligen Zahl und geben Sie das Ergebnis in Bruchschreibweise an:

1. $\frac{15}{30}$ mit 5: ?  2. $\frac{16}{48}$ mit 8: ?  3. $\frac{8}{64}$ mit 2: ?

4. $\frac{25}{125}$ mit 25: ?  5. $\frac{64}{16}$ mit 16: ?

**Lösung:**

1. $\frac{15}{30} = \frac{3}{6}$  2. $\frac{16}{48} = \frac{2}{6}$  3. $\frac{8}{64} = \frac{4}{32}$

4. $\frac{25}{125} = \frac{1}{5}$  5. $\frac{64}{16} = \frac{4}{1} = 4$

**Aufgabe 13:**
Erweitern Sie den Bruch auf den jeweiligen Nenner und geben Sie das Ergebnis in Bruchschreibweise an:
1. $\frac{1}{3}$ auf den Nenner 12: ?

2. $\frac{5}{20}$ auf den Nenner 100: ?

3. $\frac{4}{6}$ auf den Nenner 36: ?

**Lösung:**

1. $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{4}{12}$

2. $\frac{5}{20} = \frac{5 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{25}{100}$

3. $\frac{4}{6} = \frac{4 \cdot 6}{6 \cdot 6} = \frac{24}{36}$

**Aufgabe 14:**
Erweitern Sie den Bruch auf den jeweiligen Nenner und geben Sie das Ergebnis in Bruchschreibweise an:
1. $\frac{3}{9}$ auf den Nenner 81: ?

2. $\frac{10}{17}$ auf den Nenner 51: ?

3. $\frac{11}{20}$ auf den Nenner 60: ?

4. $\frac{9}{13}$ auf den Nenner 169: ?

**Lösung:**

1. $\frac{3}{9} = \frac{3 \cdot 9}{9 \cdot 9} = \frac{27}{81}$

2. $\frac{10}{17} = \frac{10 \cdot 3}{17 \cdot 3} = \frac{30}{51}$

3. $\frac{11}{20} = \frac{11 \cdot 3}{20 \cdot 3} = \frac{33}{60}$

4. $\frac{9}{13} = \frac{9 \cdot 13}{13 \cdot 13} = \frac{117}{169}$

**Aufgabe 15:**
Kürzen Sie die Brüche so weit wie möglich:

1. $\frac{2}{4} =$ ?

2. $\frac{6}{8} =$ ?

3. $\frac{14}{16} =$ ?

**Lösung:**

1. $\frac{2}{4} = \frac{2:2}{4:2} = \frac{1}{2}$

2. $\frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$

3. $\frac{14}{16} = \frac{14:2}{16:2} = \frac{7}{8}$

**Aufgabe 16:**
Kürzen Sie die Brüche so weit wie möglich:

1. $\frac{15}{5} =$ ? 2. $\frac{3}{9} =$ ? 3. $\frac{8}{12} =$ ?

4. $\frac{17}{17} =$ ? 5. $\frac{14}{21} =$ ? 6. $\frac{17}{51} =$ ?

7. $\frac{16}{52} =$ ? 8. $\frac{45}{50} =$ ? 9. $\frac{56}{80} =$ ?

**Lösung:**

1. $\frac{15}{5} = \frac{3}{1}$ 2. $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ 3. $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

4. $\frac{17}{17} = \frac{1}{1} = 1$ 5. $\frac{14}{21} = \frac{2}{3}$ 6. $\frac{17}{51} = \frac{1}{3}$

7. $\frac{16}{52} = \frac{4}{13}$ 8. $\frac{45}{50} = \frac{9}{10}$ 9. $\frac{56}{80} = \frac{7}{10}$

**Aufgabe 17:**
Geben Sie jeweils an, ob der Bruch gekürzt werden kann.

1. $\frac{3}{7}$ ☐ Ja
   ☐ Nein

2. $\frac{101}{30}$ ☐ Ja
   ☐ Nein

3. $\frac{1024}{4}$ ☐ Ja
   ☐ Nein

**Lösung:**

1. $\frac{3}{7}$ kann nicht gekürzt werden, da Nenner und Zähler aus verschiedenen Primzahlen bestehen.
2. $\frac{101}{30}$ kann nicht gekürzt werden, da der Zähler eine Primzahl ist und vom Nenner verschieden.
3. $\frac{1024}{4}$ kann gekürzt werden, z.B. $\frac{1024}{4} = \frac{1024:4}{4:4} = \frac{256}{1} = 256$

**Aufgabe 18:**
Geben Sie jeweils an, ob der Bruch gekürzt werden kann.

1. $\frac{30}{101}$ ☐ Ja
   ☐ Nein

2. $\frac{10}{50}$ ☐ Ja
   ☐ Nein

3. $\frac{8}{8}$ ☐ Ja
   ☐ Nein

4. $\frac{35}{36}$ ☐ Ja
   ☐ Nein

5. $\frac{56}{48}$

- ☐ Ja
- ☐ Nein

6. $\frac{32}{17}$ ☐ Ja
   ☐ Nein

7. $\frac{37}{75}$ ☐ Ja
   ☐ Nein

8. $\frac{1}{64}$ ☐ Ja
   ☐ Nein

**Lösung:**

1. $\frac{30}{101}$ kann nicht gekürzt werden.
2. $\frac{10}{50}$ kann gekürzt werden: $\frac{10}{50} = \frac{1}{5}$
3. $\frac{8}{8}$ kann gekürzt werden: $\frac{8}{8} = \frac{1}{1} = 1$
4. $\frac{35}{36}$ kann nicht gekürzt werden.
5. $\frac{56}{48}$ kann gekürzt werden: $\frac{56}{48} = \frac{7}{6}$
6. $\frac{32}{17}$ kann nicht gekürzt werden.
7. $\frac{37}{75}$ kann nicht gekürzt werden.
8. $\frac{1}{64}$ kann nicht gekürzt werden.

**Aufgabe 19:**
Quiz:

1. Es ist möglich, jeden positiven Bruch zu kürzen. ☐ Richtig ☐ Falsch
2. Es ist möglich, jeden negativen Bruch zu erweitern. ☐ Richtig ☐ Falsch
3. Es ist möglich, jeden Bruch so zu kürzen bzw. zu erweitern, dass 16 im Nenner steht. ☐ Richtig ☐ Falsch

4. Brüche liegen immer zwischen 0 und 1 auf der Zahlengeraden. ☐ Richtig ☐ Falsch

**Lösung:**

1. Es ist nicht möglich, jeden positiven Bruch zu kürzen. Machen wir uns das am Beispiel $\frac{1}{2}$ klar:
   Laut der Regel dürfen wir nur mit natürlichen Zahlen größer als 1 kürzen, die Teiler des Zählers und Teiler des Nenners sind.
   In unserem Beispiel ist der einzige gemeinsame Teiler von 1 und 2 die Zahl 1. Mit 1 dürfen wir nach der Regeln aber nicht kürzen.

2. Es ist möglich, jeden negativen Bruch zu erweitern, da immer mit z.B. 2 erweitert werden kann.
   Ein Beispiel: $-\frac{1}{2} = -\frac{1\cdot 2}{2\cdot 2} = -\frac{2}{4}$
   Allgemein für zwei natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$: $-\frac{m}{n} = -\frac{m\cdot 2}{n\cdot 2} = -\frac{2m}{2n}$. Allgemein können wir auch mit jeder anderen natürlichen Zahl außer der 1 erweitern.

3. Nicht jeder Bruch kann so erweitert bzw. gekürzt werden, dass 16 im Nenner steht. Betrachten wir dazu zwei Beispiele.
   Beispiel 1: $\frac{1}{17}$
   Wegen $17 > 16$ müssten wir kürzen, um auf das gewünschte Ergebnis zu kommen. Wir können nur mit Teilern von 17 kürzen, also nur mit 1 und 17.
   Das Kürzen mit 1 ist nach der Regel nicht erlaubt. Mit 17 können wir aber auch nicht kürzen, weil 17 kein Teiler des Zählers 1 ist.
   Wir haben also keine Möglichkeit, $\frac{1}{17}$ so zu kürzen (oder erweitern), dass wir 16 im Nenner erhalten.
   Beispiel 2: $\frac{1}{7}$
   Wegen $7 < 16$ müssten wir erweitern. 16 ist kein Vielfaches von 7, d.h. wir können das gewünschte Ergebnis nicht erhalten: $\frac{1}{7} = \frac{1\cdot 2}{7\cdot 2} = \frac{2}{14} = \frac{1\cdot 3}{7\cdot 3} = \frac{3}{21}$

4. Brüche liegen nicht immer zwischen 0 und 1 auf der Zahlengeraden.
   Alle negativen Brüche sind nämlich kleiner als 0. Außerdem gibt es Brüche mit Werten größer als 1, z.B. $\frac{3}{2} = 1,5$.
   Wir können allerdings genau bestimmen, welche Brüche zwischen 0 und 1 liegen: alle Brüche, die positiv sind und deren Nenner größer als der Zähler ist. Dass diese Aussage stimmt, lässt sich anhand des Prinzips Teilen mit Rest verdeutlichen (zur Umwandlung von Brüchen in Dezimalzahlen).

### Addition und Subtraktion

**Aufgabe 20:**
Addieren Sie folgende Brüche. Geben Sie das Ergebnis wieder in Bruchschreibweise an und kürzen Sie dieses so weit wie möglich.

1. $\frac{4}{2} + \frac{3}{2} =$ ?
2. $\frac{8}{2} + \frac{1}{4} =$ ?
3. $\frac{2}{10} + \frac{4}{5} =$ ?
4. $\frac{1}{5} + \frac{20}{10} =$ ?

**Lösung:**

1. $\frac{4}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2}$
2. $\frac{8}{2} + \frac{1}{4} = \frac{8 \cdot 2}{2 \cdot 2} + \frac{1}{4} = \frac{16}{4} + \frac{1}{4} = \frac{16+1}{4} = \frac{17}{4}$
3. $\frac{2}{10} + \frac{4}{5} = \frac{2:2}{10:2} + \frac{4}{5} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = \frac{1+4}{5} = \frac{5}{5} = 1$
4. $\frac{1}{5} + \frac{20}{10} = \frac{1}{5} + \frac{20:2}{10:2} = \frac{1}{5} + \frac{10}{5} = \frac{1+10}{5} = \frac{11}{5}$

**Aufgabe 21:**
Addieren Sie folgende Brüche. Geben Sie das Ergebnis wieder in Bruchschreibweise an und kürzen Sie dieses so weit wie möglich.

1. $\frac{4}{7} + \frac{3}{14} =$ ?
2. $\frac{20}{8} + \frac{18}{24} =$ ?
3. $\frac{14}{21} + \frac{18}{9} =$ ?
4. $\frac{4}{16} + \frac{2}{1} =$ ?
5. $\frac{2}{5} + \frac{10}{24} =$ ?
6. $\frac{14}{25} + \frac{9}{21} =$ ?
7. $\frac{1}{7} + \frac{12}{21} =$ ?
8. $\frac{23}{13} + \frac{9}{14} =$ ?
9. $\frac{11}{12} + \frac{5}{12} =$ ?

**Lösung:**

1. $\frac{4}{7} + \frac{3}{14} = \frac{11}{14}$
2. $\frac{20}{8} + \frac{18}{24} = \frac{13}{4}$
3. $\frac{14}{21} + \frac{18}{9} = \frac{8}{3}$
4. $\frac{4}{16} + \frac{2}{1} = \frac{9}{4}$
5. $\frac{2}{5} + \frac{10}{24} = \frac{49}{60}$
6. $\frac{14}{25} + \frac{9}{21} = \frac{173}{175}$
7. $\frac{1}{7} + \frac{12}{21} = \frac{5}{7}$
8. $\frac{23}{13} + \frac{9}{14} = \frac{439}{182}$
9. $\frac{11}{12} + \frac{5}{12} = \frac{4}{3}$

**Aufgabe 22:**
Subtrahieren Sie folgende Brüche. Geben Sie das Ergebnis wieder in Bruchschreibweise an und kürzen Sie dieses so weit wie möglich.

1. $\frac{10}{20} - \frac{1}{2} =$ ?
2. $\frac{7}{8} - \frac{1}{2} =$ ?
3. $\frac{5}{7} - \frac{3}{7} =$ ?
4. $\frac{3}{6} - \frac{1}{12} =$ ?

**Lösung:**

1. $\frac{10}{20} - \frac{1}{2} = \frac{10:10}{20:10} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1-1}{2} = \frac{0}{2} = 0$

2. $\frac{7}{8} - \frac{1}{2} = \frac{7}{8} - \frac{1\cdot4}{2\cdot4} = \frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{7-4}{8} = \frac{3}{8}$

3. $\frac{5}{7} - \frac{3}{7} = \frac{5-3}{7} = \frac{2}{7}$

4. $\frac{3}{6} - \frac{1}{12} = \frac{3\cdot2}{6\cdot2} - \frac{1}{12} = \frac{6}{12} - \frac{1}{12} = \frac{6-1}{12} = \frac{5}{12}$

**Aufgabe 23:**
Subtrahieren Sie folgende Brüche. Geben Sie das Ergebnis wieder in Bruchschreibweise an und kürzen Sie dieses so weit wie möglich.

1. $\frac{13}{5} - \frac{2}{10} =$ ?
2. $\frac{21}{44} - \frac{3}{12} =$ ?
3. $\frac{8}{29} - \frac{1}{2} =$ ?
4. $\frac{60}{12} - \frac{17}{51} =$ ?
5. $\frac{1}{2} - \frac{46}{60} =$ ?
6. $\frac{32}{21} - \frac{56}{60} =$ ?
7. $\frac{10}{58} - \frac{6}{29} =$ ?
8. $\frac{7}{35} - \frac{9}{56} =$ ?
9. $\frac{17}{4} - \frac{19}{3} =$ ?
10. $\frac{13}{132} - \frac{1}{22} =$ ?
11. $\frac{91}{93} - \frac{61}{62} =$ ?

**Lösung:**

1. $\frac{13}{5} - \frac{2}{10} = \frac{12}{5}$
2. $\frac{21}{44} - \frac{3}{12} = \frac{5}{22}$
3. $\frac{8}{29} - \frac{1}{2} = -\frac{13}{58}$
4. $\frac{60}{12} - \frac{17}{51} = \frac{14}{3}$
5. $\frac{1}{2} - \frac{46}{60} = -\frac{4}{15}$
6. $\frac{32}{21} - \frac{56}{60} = \frac{62}{105}$
7. $\frac{10}{58} - \frac{6}{29} = -\frac{1}{29}$
8. $\frac{7}{35} - \frac{9}{56} = \frac{11}{280}$
9. $\frac{17}{4} - \frac{19}{3} = -\frac{25}{12}$
10. $\frac{13}{132} - \frac{1}{22} = \frac{7}{132}$
11. $\frac{91}{93} - \frac{61}{62} = -\frac{1}{186}$

### Multiplikation und Division

**Aufgabe 24:**
Multiplizieren Sie folgende Brüche. Geben Sie das Ergebnis wieder in Bruchschreibweise an und kürzen Sie dieses so weit wie möglich.

1. $\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} =$ ?
2. $\frac{6}{7} \cdot \frac{14}{6} =$ ?
3. $\frac{5}{3} \cdot \frac{4}{10} =$ ?
4. $\frac{7}{8} \cdot \frac{9}{14} =$ ?

**Lösung:**

1. $\frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$
2. $\frac{6}{7} \cdot \frac{14}{6} = 2$
3. $\frac{5}{3} \cdot \frac{4}{10} = \frac{2}{3}$
4. $\frac{7}{8} \cdot \frac{9}{14} = \frac{9}{16}$

**Aufgabe 25:**
Multiplizieren Sie folgende Brüche. Geben Sie das Ergebnis wieder in Bruchschreibweise an und kürzen Sie dieses so weit wie möglich.

1. $\frac{10}{11} \cdot \frac{5}{3} =$ ?
2. $\frac{29}{17} \cdot \frac{13}{31} =$ ?
3. $\frac{14}{69} \cdot \frac{23}{7} =$ ?
4. $\frac{24}{61} \cdot \frac{3}{4} =$ ?
5. $\frac{17}{41} \cdot \frac{11}{34} =$ ?
6. $\frac{46}{118} \cdot \frac{59}{37} =$ ?
7. $\frac{20}{6} \cdot \frac{17}{18} =$ ?
8. $\frac{130}{71} \cdot \frac{142}{125} =$ ?
9. $\frac{37}{148} \cdot \frac{25}{11} =$ ?
10. $\frac{3}{111} \cdot \frac{37}{16} =$ ?
11. $\frac{21}{17} \cdot \frac{11}{12} =$ ?

**Lösung:**

1. $\frac{10}{11} \cdot \frac{5}{3} = \frac{50}{33}$
2. $\frac{29}{17} \cdot \frac{13}{31} = \frac{377}{527}$
3. $\frac{14}{69} \cdot \frac{23}{7} = \frac{2}{3}$
4. $\frac{24}{61} \cdot \frac{3}{4} = \frac{18}{61}$
5. $\frac{17}{41} \cdot \frac{11}{34} = \frac{11}{82}$
6. $\frac{46}{118} \cdot \frac{59}{37} = \frac{23}{37}$
7. $\frac{20}{6} \cdot \frac{17}{18} = \frac{85}{27}$
8. $\frac{130}{71} \cdot \frac{142}{125} = \frac{52}{25}$
9. $\frac{37}{148} \cdot \frac{25}{11} = \frac{25}{44}$
10. $\frac{3}{111} \cdot \frac{37}{16} = \frac{1}{16}$
11. $\frac{21}{17} \cdot \frac{11}{12} = \frac{77}{68}$

**Aufgabe 26:**
Dividieren Sie folgende Brüche. Geben Sie das Ergebnis wieder in Bruchschreibweise an und kürzen Sie dieses so weit wie möglich.

1. $\frac{3}{5} : \frac{2}{5} =$ ?
2. $\frac{4}{15} : \frac{32}{30} =$ ?
3. $\frac{11}{26} : \frac{1}{2} =$ ?
4. $\frac{16}{15} : \frac{4}{23} =$ ?

**Lösung:**

1. $\frac{3}{5} : \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$
2. $\frac{4}{15} : \frac{32}{30} = \frac{4}{15} \cdot \frac{30}{32} = \frac{1}{4}$
3. $\frac{11}{26} : \frac{1}{2} = \frac{11}{26} \cdot \frac{2}{1} = \frac{11}{13}$
4. $\frac{16}{15} : \frac{4}{23} = \frac{16}{15} \cdot \frac{23}{4} = \frac{92}{15}$

**Aufgabe 27:**
Dividieren Sie folgende Brüche. Geben Sie das Ergebnis wieder in Bruchschreibweise an und kürzen Sie dieses so weit wie möglich.

1. $\frac{30}{11} : \frac{12}{44} =$ ?
2. $\frac{56}{11} : \frac{3}{11} =$ ?
3. $\frac{18}{19} : \frac{6}{5} =$ ?
4. $\frac{3}{35} : \frac{21}{7} =$ ?
5. $\frac{24}{45} : \frac{132}{6} =$ ?
6. $\frac{7}{86} : \frac{14}{33} =$ ?
7. $\frac{13}{26} : \frac{11}{17} =$ ?
8. $\frac{46}{39} : \frac{161}{5} =$ ?
9. $\frac{125}{8} : \frac{25}{4} =$ ?
10. $\frac{11}{4} : \frac{19}{16} =$ ?
11. $\frac{29}{141} : \frac{6}{58} =$ ?

**Lösung:**

1. $\frac{30}{11} : \frac{12}{44} = 10$
2. $\frac{56}{11} : \frac{3}{11} = \frac{56}{3}$
3. $\frac{18}{19} : \frac{6}{5} = \frac{15}{19}$
4. $\frac{3}{35} : \frac{21}{7} = \frac{1}{35}$
5. $\frac{24}{45} : \frac{132}{6} = \frac{4}{165}$
6. $\frac{7}{86} : \frac{14}{33} = \frac{33}{172}$
7. $\frac{13}{26} : \frac{11}{17} = \frac{17}{22}$
8. $\frac{46}{39} : \frac{161}{5} = \frac{10}{273}$
9. $\frac{125}{8} : \frac{25}{4} = \frac{5}{2}$
10. $\frac{11}{4} : \frac{19}{16} = \frac{44}{19}$
11. $\frac{29}{141} : \frac{6}{58} = \frac{841}{423}$

**Aufgabe 28:**
Berechnen Sie die folgenden Terme. Geben Sie das Ergebnis wieder in Bruchschreibweise an und kürzen Sie dieses so weit wie möglich.

1. $\frac{5}{\frac{1}{2}} =$ ?
2. $\frac{7+1}{\frac{8}{5}} =$ ?
3. $\frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}} =$ ?
4. $\frac{\frac{6}{8-5}}{\frac{1+1}{5}} =$ ?

5. $\frac{\frac{8}{11}}{2} =$ ?

**Lösung:**

1. $\frac{5}{\frac{1}{2}} = 5 : \frac{1}{2} = 5 \cdot \frac{2}{1} = 5 \cdot 2 = 10$
2. $\frac{7+1}{\frac{8}{5}} = (7+1) : \frac{8}{5} = 8 \cdot \frac{5}{8} = \frac{8 \cdot 5}{8} = 5$
3. $\frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3} : \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 3}{3 \cdot 4} = 1$
4. $\frac{\frac{6}{8-5}}{\frac{1+1}{5}} = \frac{6}{8-5} : \frac{1+1}{5} = \frac{6}{3} : \frac{2}{5} = \frac{6}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 5$
5. $\frac{\frac{8}{11}}{2} = \frac{8}{11} : 2 = \frac{8}{11 \cdot 2} = \frac{4 \cdot 2}{11 \cdot 2} = \frac{4}{11}$

**Aufgabe 29:**
**Quiz**
Sind die folgenden Aussagen richtig?

1. Für die Subtraktion zweier Brüche gilt immer: Zähler minus Zähler, Nenner minus Nenner. ☐ Richtig ☐ Falsch
2. Den Hauptnenner zweier Brüchen erhält man, indem man die beiden gegeben Nenner multipliziert. ☐ Richtig ☐ Falsch
3. Zum Multiplizieren zweier Brüche müssen diese auf den gleichen Nenner gebracht werden. ☐ Richtig ☐ Falsch
4. Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit der Gegenzahl multipliziert. ☐ Richtig ☐ Falsch
5. Beim Addieren und Subtrahieren müssen die Brüche den gleichen Nenner haben. ☐ Richtig ☐ Falsch

**Lösung:**

1. Die Aussage ist falsch. $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$ und $\frac{1-1}{2-3} = \frac{0}{-1} = 0$.
2. Die Aussage ist falsch. Der Hauptnenner von $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{4}$ ist 4 und nicht 8. Allerdings können beide Brüche nach dieser Methode auf einen gemeinsamen Nenner erweitert werden.
3. Die Aussage ist falsch. Zum Multiplizieren zweier Brüche kann man direkt ihre Nenner und Zähler miteinander multiplizieren.

4. Die Aussage ist falsch. Man kann durch einen Bruch dividieren, indem man mit dem Umkehrbruch des Bruches multipliziert.

5. Die Aussage ist richtig, wenn man an das direkte rechnerische Addieren denkt.

**Aufgabe 30:**
Schreiben Sie die folgenden Brüche in die Dezimalschreibweise um:
1. $\frac{1}{2} =$ ?

2. $\frac{3}{5} =$ ?

3. $\frac{6}{8} =$ ?

**Lösung:**

1. $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5}{10} = 0,5$

2. $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10} = 0,6$

3. $\frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0,75$

**Aufgabe 31:**
Schreiben Sie die folgenden Brüche in die Dezimalschreibweise:

1. $\frac{9}{10} =$ ? 2. $\frac{6}{25} =$ ? 3. $\frac{29}{25} =$ ?

4. $\frac{7}{8} =$ ? 5. $\frac{13}{4} =$ ?

**Lösung:**

1. $\frac{9}{10} = 0,9$ 2. $\frac{6}{25} = 0,24$ 3. $\frac{29}{25} = 1,16$

4. $\frac{7}{8} = 0,875$ 5. $\frac{13}{4} = 3,25$

**Aufgabe 32:**
Schreiben Sie die folgenden Dezimalzahlen als Bruch und kürzen Sie Ihr Ergebnis so weit wie möglich.
1. $0,25 =$ ?

2. $0,55 =$ ?

3. $8,6 =$ ?

**Lösung:**

1. $0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$
2. $0,55 = \frac{55}{100} = \frac{11}{20}$
3. $8,6 = \frac{86}{10} = \frac{43}{5}$

**Aufgabe 33:**
Schreiben Sie die folgenden Dezimalzahlen als Bruch:

1. $1,625 =$ ? 2. $0,66 =$ ? 3. $4,66 =$ ?

4. $0,24 =$ ? 5. $0,865 =$ ?

**Lösung:**

1. $1,625 = \frac{13}{8}$ 2. $0,66 = \frac{33}{50}$ 3. $4,66 = \frac{233}{50}$

4. $0,24 = \frac{6}{25}$ 5. $0,865 = \frac{173}{200}$

**Aufgabe 34:**
Berechnen Sie folgende Terme. Geben Sie das Ergebnis in Bruchschreibweise an und kürzen Sie dieses so weit wie möglich.

1. $0,75 + \frac{1}{4} =$ ?
2. $\frac{2}{3} - 0,2 =$ ?
3. $7,5 \cdot \frac{2}{5} =$ ?

**Lösung:**

1. $0,75 + \frac{1}{4} = \frac{75}{100} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$
2. $\frac{2}{3} - 0,2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{10} = \frac{10}{15} - \frac{3}{15} = \frac{7}{15}$
3. $7,5 \cdot \frac{2}{5} = \frac{75}{10} \cdot \frac{2}{5} = \frac{75 \cdot 2}{10 \cdot 5} = \frac{15}{5} = 3$

**Aufgabe 35:**
Berechnen Sie folgende Terme. Geben Sie das Ergebnis in Bruchschreibweise an und kürzen Sie dieses so weit wie möglich.

1. $8,28 : \frac{9}{5} =$ ?

2. $\frac{11{,}25}{\frac{5}{4}} =$ ?

3. $\frac{\frac{7}{3}}{0{,}8} =$ ?

**Lösung:**

1. $8{,}28 : \frac{9}{5} = \frac{23}{5}$
2. $\frac{11{,}25}{\frac{5}{4}} = 9$
3. $\frac{\frac{7}{3}}{0{,}8} = \frac{35}{12}$

## Anwendung

**Aufgabe 36:**
Entscheiden Sie, welche Zahl größer ist:

1. ☐ $\frac{7}{8}$ oder
   ☐ $\frac{3}{4}$

2. ☐ $\frac{3}{25}$ oder
   ☐ $\frac{3}{20}$

3. ☐ $\frac{22}{23}$ oder
   ☐ $\frac{105}{115}$

**Lösung:**

1. $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8}$ Demnach gilt: $\frac{7}{8} > \frac{3}{4}$
2. $\frac{3}{25} = \frac{3 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{12}{100}$ und $\frac{3}{20} = \frac{3 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{15}{100}$ Demnach gilt: $\frac{3}{25} < \frac{3}{20}$
3. $\frac{105}{115} = \frac{105:5}{115:5} = \frac{21}{23}$ Demnach gilt: $\frac{22}{23} > \frac{21}{23}$

**Aufgabe 37:**
Folgendes Rezept gilt für 5 Personen.

Lava-Schokoküchlein für 5 Personen:
150 $g$ Butter
5 Eier
187,5 $g$ Schokolade (70% Kakaoanteil)
225 $g$ Zucker
100 $g$ Mehl
25 $g$ Kakaopulver



**Bild 13**

1. Eier mit Zucker schaumig rühren.
2. Schokolade mit Butter in einem Wasserbad schmelzen.

3. Die geschmolzene Schokoladenmasse unter die Eier-Zucker-Masse heben und mit dem Mehl verrühren.

In eingefettete Soufflé-Förmchen füllen und je nach Größe der Formen ca. 8 – 12 min bei einer Ober-/Unterhitze von 210 °C backen.

Rechnen Sie das Lava-Schokoküchlein-Rezept auf 3 Personen um:

| | |
|---|---|
| ? | $g$ Butter |
| ? | Eier |
| ? | $g$ Schokolade (70% Kakaoanteil) |
| ? | $g$ Zucker |
| ? | $g$ Mehl |
| ? | $g$ Kakaopulver |

**Lösung:**

Lava-Schokoküchlein für 3 Personen:

$150\ g\ \cdot \frac{3}{5} = 90\ [g \quad \text{Butter}]$

$5 \cdot \frac{3}{5} = 3$ [Eier]

$187,5 \cdot \frac{3}{5} = \frac{375}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{225}{2} = 112,5\ [g \quad \text{Schokolade}]$

$225 \cdot \frac{3}{5} = 135\ [g \quad \text{Zucker}]$

$100 \cdot \frac{3}{5} = 60\ [g \quad \text{Mehl}]$

$25 \cdot \frac{3}{5} = 15\ [g \quad \text{Kakaopulver}]$

**Aufgabe 38:**
Ein Kinderpunsch wird wie folgt zubereitet:

$\frac{3}{2}\ l$ Früchtetee

$0,7\ l$ Apfelsaft

$\frac{3}{4}\ l$ Orangensaft

$1Tl$ Zimt

etwas Honig

Reichen drei Schüsseln mit einem Fassungsvermögen von jeweils $0,8\ l$ für das Rezept?

- ☐ Ja.
- ☐ Nein.

Wenn nicht, wie viele Schüsseln wären mindestens nötig? ?

**Lösung:**

$$\begin{aligned}
&\tfrac{3}{2}\,l + \tfrac{7}{10}\,l + \tfrac{3}{4}\,l \\
&= \tfrac{30}{20}\,l + \tfrac{14}{20}\,l + \tfrac{15}{20}\,l \\
&= \tfrac{30+14+15}{20}\,l \\
&= \tfrac{59}{20}\,l \\
&= \tfrac{295}{100}\,l = 2,95\,l
\end{aligned}$$

Eine Mischung ergibt ungefähr $\frac{59}{20}\,l$.

$$\begin{aligned}
&\tfrac{59}{20}\,l : 0,8\,l \\
&= \tfrac{59}{20}\,l : \tfrac{4}{5}\,l \\
&= \tfrac{59}{20} \cdot \tfrac{5}{4} \\
&= \tfrac{59 \cdot 5}{5 \cdot 4 \cdot 4} \\
&= \tfrac{59}{16} = 3 + \tfrac{11}{16} = 3,6875
\end{aligned}$$

Demnach reichen drei Schüsseln nicht für die Mischung aus. Es sind 4 Schüsseln nötig.