UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Virtuelles Eingangstutorium
studiVEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn
FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Virtuelles Eingangstutorium
VEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

khdm
kompetenzzentrum
hochschuldidaktik
mathematik

LE 2 - Rechnen mit rationalen Zahlen

2.2 Prozentrechnung

Im Folgenden finden Sie die Abschnitte:

Übersicht ..... S. 1
Hinführung ..... S. 2
Inhalte mit Erklärungen ..... S. 3
Aufgaben ..... S. 9
Anwendung ..... S. 13

Übersicht

In diesem Kapitel werden Sie in die Prozentrechnung eingeführt. Wir behandeln die Aspekte

- Einführung in die Prozentrechnung
- Umgang und Bestimmung von prozentualen Anteilen
- Verschiedene Darstellungsformen und ihre Umrechnung
- Einfache Anwendungsbeispiele für Prozentrechnung

Hinführung

Im Alltag begegnen uns häufig Angaben in Prozent. Die Mehrwertsteuer wird zum Beispiel in Prozent angegeben und beträgt 19% (Stand 2015). 1 Prozent - oft geschrieben als 1% - bedeutet ein Teil von Hundert, d.h. $1\% = \frac{1}{100}$. Zum Beispiel ist 1% von 100EUR genau 1EUR. Wie sieht das nun aus, wenn wir uns fragen, was 1% von 3356EUR ist? Hier hilft die Bruchrechnung weiter, um einen Teil von Hundert zu bestimmen: $3356\text{EUR} \cdot \frac{1}{100} = \frac{3356}{100}\text{EUR} = 33,56\text{EUR}$.

Wie viel EUR müssen zusätzlich bezahlt werden, wenn auf 3356EUR noch 19% Mehrwertsteuer aufgeschlagen werden?

Es gilt $19\% = \frac{19}{100}$. Weiter entspricht 19% von 3356EUR also $3356\text{EUR} \cdot \frac{19}{100} = 33,56\text{EUR} \cdot 19 = 637,64\text{EUR}$.

Prozente können auch über den Dreisatz berechnet werden:

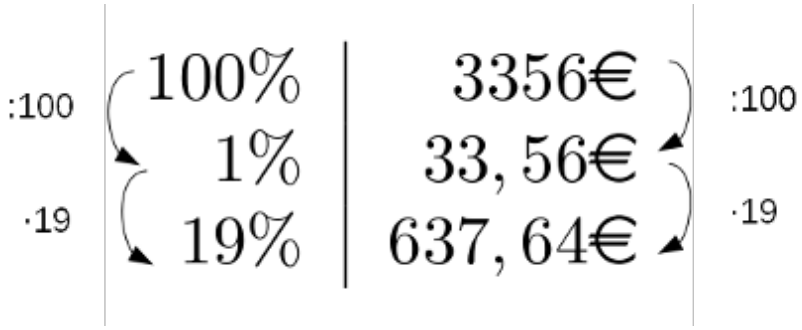


Bild 1

Zusammen mit der Mehrwertsteuer müsste also für ein Produkt im Wert von 3356EUR insgesamt $3356\text{EUR} + 637,64\text{EUR} = 3993,64\text{EUR}$ bezahlt werden.

Was passiert, wenn wir aus dem Gesamtpreis versuchen den Nettopreis zu berechnen? Vorsicht, die nachfolgende Rechnung enthält einen **Gedankenfehler**! 19% von 3993,64EUR sind $3993,64 \cdot \frac{19}{100} = 758,7916\text{EUR}$. Ziehen wir diese nun vom Gesamtpreis ab, erhalten wir $3993,64\text{EUR} - 758,7916\text{EUR} = 3234,8484\text{EUR}$. Das ist nicht dasselbe wie 3356EUR. Woran liegt das? Das können Sie in diesem Kapitel lernen!

Beispiel 1:

In einer Schulklasse der Jahrgangsstufe 7 befinden sich 32 Schülerinnen und Schüler. Die Klassenlehrerin findet im Internet eine Studie zur Smartphone-Benutzung, welche behauptet, dass 85% der Jugendlichen im Alter von 12 bis 13 Jahren bereits ein Smartphone benutzen. Nun fragt sie sich, wie viele Schülerinnen und Schüler aus ihrer Klasse nach dieser Studie ein Smartphone benutzen müssten.

Sie rechnet $32 \cdot \frac{85}{100} = 27,2$ und schlussfolgert daraus, dass vermutlich 27 oder vielleicht auch 28 Schülerinnen und Schüler ein Smartphone benutzen müssten, wenn diese Prozentangabe von 85% genau auf ihre Klasse zuträfe.

Inhalte mit Erklärungen

Prozentschreibweise
Einführung

Da wir im Zehnersystem rechnen, hat sich über die Jahrhunderte herausgestellt, dass dem Bruch $\frac{1}{100}$ eine relativ hohe Bedeutung zukommt. Es hat sich daher ein eigener Name für ihn eingebürgert, nämlich das Wort „Prozent“. Es stammt aus dem Lateinischen und bedeutet „von Hundert“. Ihm zugeordnet ist das Prozentzeichen %, das man statt des Bruches $\frac{1}{100}$ verwenden kann.

Analog hat sich auch für den Bruch $\frac{1}{1000}$ ein eigener Name entwickelt: Der Begriff „Promille“ stammt ebenfalls aus dem Lateinischen und bedeutet „von Tausend“. Für den Bruch $\frac{1}{1000}$ kann man auch das Zeichen ‰ verwenden. Allerdings ist dies weniger stark verbreitet als das Prozentzeichen.

Das Prozentzeichen % ist eine andere Schreibweise für den Bruch $\frac{1}{100}$.

Der Ausdruck $p\%$ bedeutet also $\frac{p}{100}$.

Aufgabe 1:
Schreiben Sie folgende Prozentangaben in Brüche um und kürzen Sie so weit wie möglich!

$5\% =$?

$25\% =$?

$80\% =$?

Lösung:

$5\% = \frac{5}{100} = \frac{5 \cdot 1}{5 \cdot 20} = \frac{1}{20}$

$25\% = \frac{25}{100} = \frac{25 \cdot 1}{25 \cdot 4} = \frac{1}{4}$

$80\% = \frac{80}{100} = \frac{8 \cdot 10}{10 \cdot 10} = \frac{8}{10} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{5}$

Regel 1:

Um einen Bruch als Prozentangabe auszudrücken, erweitert man ihn auf den Nenner 100.

Beispiel: $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{75}{100} = 75\%$

Brüche, bei denen die Erweiterung auf den Nenner 100 nicht möglich ist, werden zunächst in eine Dezimalzahl umgewandelt und anschließend mit 100 multipliziert, um auf die Prozentangabe zu kommen.

Aufgabe 2:
Schreiben Sie folgende Zahlen in Prozentangaben um.

$\frac{3}{10} =$?

$2 =$?

$\frac{7}{25} =$?

Lösung:

$\frac{3}{10} = \frac{3 \cdot 10}{10 \cdot 10} = \frac{30}{100} = 30\%$

$2 = \frac{2}{1} = \frac{2 \cdot 100}{1 \cdot 100} = \frac{200}{100} = 200\%$

$\frac{7}{25} = \frac{7 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{28}{100} = 28\%$

Besitzt eine Dezimalzahl maximal zwei Nachkommastellen, so kann man die dazugehörige Prozentangabe direkt ablesen.

Beispiel 2:

$0,34 = \frac{3}{10} + \frac{4}{100} = \frac{30}{100} + \frac{4}{100} = \frac{34}{100} = 34\%$

$0,89 = \frac{89}{100} = 89\%$

Um eine Dezimalzahl mit mehr Nachkommastellen in eine Prozentangabe umzuwandeln, „erweitert“ man sie mit dem Bruch $\frac{100}{100}$. Dann kann man den Zähler mit der Dezimalzahl multiplizieren und das verbleibende $\frac{1}{100}$ in das Prozentzeichen umwandeln.

Beispiel 3:

Auf einen Einkauf von 10027EUR wird ein Nachlass von 1289EUR gewährt. Wie viel % entspricht das, also der Anteil $\frac{1289}{10027}$?

Ein Taschenrechner zeigt als Ergebnis $0,12855291$. Das ist ein gerundetes Ergebnis. Auf zwei Stellen genau hinter dem Komma gilt:

$$\frac{1289}{10027} \approx 0,1286 = 12,86\%$$

Beispiel 4:

$0,271 = 0,271 \cdot \frac{100}{100} = 0,271 \cdot 100 \cdot \frac{1}{100} = 27,1 \cdot \frac{1}{100} = 27,1\%$

$42,15036 = 42,15036 \cdot 100 \cdot \frac{1}{100} = 4215,036 \cdot \frac{1}{100} = 4215,036\%$

Hier kann man eine Regelmäßigkeit entdecken (die Umwandlung entspricht einer Multiplikation mit 100):

Regel 2:

Bei der Umwandlung einer Dezimalzahl in eine Prozentangabe verschiebt sich das Komma um zwei Stellen nach rechts.

Beispiel 5:

$0,351 = 35,1\%$

Aufgabe 3:
Schreiben Sie folgende Dezimalzahlen in Prozentangaben um.

$0,773 =$?

$2,01 =$?

$0,009 =$?

Lösung:

$0,773 = 77,3 \cdot \frac{1}{100} = 77,3\%$

$2,01 = 201 \cdot \frac{1}{100} = 201\%$

$0,009 = 0,9 \cdot \frac{1}{100} = 0,9\%$

Der Weg über die Dezimalschreibweise ist auch hilfreich, wenn man Brüche, deren Nenner sich nicht auf 100 erweitern lässt, in Prozentangaben umwandeln möchte: In diesem Fall wandelt man zunächst den Bruch in die zugehörige Dezimalzahl um und schließlich die Dezimalzahl in eine Prozentangabe.

Beispiel 6:

$\frac{1}{8} = 0,125 = 12,5\%$

Wir betrachten den Bruch $\frac{1}{3}$, dessen Nenner nicht auf 100 erweitert werden kann. Als Dezimalzahl schreiben wir $\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$ also $\frac{1}{3} = 0,33333\ldots$. Nach der obigen Regel können wir somit direkt ablesen: $\frac{1}{3} = 0,333333\ldots = 33,3333\ldots\% = 33,\overline{3}\%$.

Beispiel 7:

Umwandlung einer Prozentangabe in einen Bruch:

$5\% = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$

$1,24\% = \frac{1,24}{100} = \frac{1,24 \cdot 100}{100 \cdot 100} = \frac{124}{10000}$

Um eine Prozentangabe in eine Dezimalzahl zu verwandeln, multipliziert man den Faktor $\frac{1}{100}$, der dem Prozentzeichen entspricht, mit der Dezimalzahl.

Beispiel 8:

$5,6\% = 5,6 \cdot \frac{1}{100} = 5,6 : 100 = 0,056$

$0,2\% = 0,2 \cdot \frac{1}{100} = 0,2 : 100 = 0,002$

Auch hier kann man eine Regelmäßigkeit entdecken (die Umwandlung entspricht der Division durch 100):

Regel 3:

Bei der Umwandlung einer Prozentangabe in eine Dezimalzahl verschiebt sich das Komma um zwei Stellen nach links.

Beispiel 9:

$4,5\% = \frac{4,5}{100} = 0,045$

Aufgabe 4:
Schreiben Sie folgende Prozentangaben in Dezimalzahlen um.

$88,6\% =$?

$7\% =$?

$100\% =$?

$0,04\% =$?

Lösung:

$$\begin{aligned} 88,6\% &= 88,6 \cdot \frac{1}{100} = \frac{88}{100} + 0,6 \cdot \frac{1}{100} \\ &= \frac{80}{100} + \frac{8}{100} + 0,6 : 100 = \frac{8}{10} + \frac{8}{100} + 0,006 \\ &= 0,8 + 0,08 + 0,006 = 0,886 \\ 7\% &= 7 \cdot \frac{1}{100} = \frac{7}{100} = 0,07 \\ 100\% &= 100 \cdot \frac{1}{100} = \frac{100}{100} = 1 \\ 0,04\% &= 0,04 \cdot \frac{1}{100} = 0,04 : 100 = 0,0004 \end{aligned}$$

Rechnen mit Prozentangaben

Da Prozentangaben nur eine andere Schreibweise für Brüche und Dezimalzahlen sind, wandelt man sie zunächst in einen Bruch oder eine Dezimalzahl um und kann dann die bekannten Rechenregeln anwenden.

Info 1:

Wichtig: Die Ausdrucksweise „p Prozent **von**...“ bedeutet hier, dass $\frac{p}{100}$ mit dem nachfolgenden Term **multipliziert** wird. Zum Beispiel entspricht „8% von 120“ dem Ausdruck $\frac{8}{100} \cdot 120$.

Beispiel 10:

Eine Bank bietet ihren Kunden $1,24\%$ jährliche Zinsen an. Wieviel Zinsen erhält ein Anleger nach einem Jahr, wenn er 3000EUR anlegt?

Diese Aufgabe kann man entweder lösen, indem man die Prozentangabe in einen Bruch umrechnet

$1,24\% = 1,24 \cdot \frac{1}{100} = \frac{1,24}{100} = \frac{124}{10000}$

und dann mit dem Bruch weiterrechnet:

$1,24\% \cdot 3000\text{EUR} = \frac{124}{10000} \cdot 3000\text{EUR} = \frac{124 \cdot 3000}{10000}\text{EUR} = \frac{124 \cdot 3}{10}\text{EUR}$
$= \frac{372}{10}\text{EUR} = 37,2\text{EUR}$ oder $1,24\% \cdot 3000\text{EUR} = \frac{1,24}{100} \cdot 3000\text{EUR} = 1,24 \cdot 30\text{EUR} = 37,2\text{EUR}$

Schneller geht es aber, wenn man die Prozentangabe direkt in eine Dezimalzahl umwandelt:

$1,24\% = 1,24 : 100 = 0,0124$

und mit dieser Dezimalzahl weiterrechnet:

$1,24\% \cdot 3000\text{EUR} = 0,0124 \cdot 3000\text{EUR} = 37,2\text{EUR}$

Auf allen Rechenwegen erhält man das Ergebnis, dass der Kunde $37,20$EUR Zinsen erhält.

Der Ausgangswert in obigem Beispiel war die Zahl 3000; diesen nennen wir im Allgemeinen Grundwert. Die Prozentangabe $1,24\%$ nennen wir auch Prozentsatz. Das Ergebnis $(37,2)$, wenn wir den prozentualen Anteil des Prozentsatzes vom Grundwert angeben, heißt auch Prozentwert.

Definition 1:

Wenn eine reelle Zahl G mit einer positiven reellen Zahl p als Prozentangabe multipliziert wird und ein reelles Ergbenis E dabei herauskommt, legen wir folgende Benennungen fest:

- G heißt Grundwert
- p heißt Prozentsatz
- E heißt Prozentwert.

Anschaulich aufgeschrieben gilt also Grundwert$\cdot$Prozentsatz = Prozentwert oder kürzer $G \cdot p = E$.

Wir betrachten die neu eingeführten Begriffe nun noch einmal im Zusammenhang mit einem Beispiel.

Beispiel 11:

Wie verändert sich der Preis eines Produkts, wenn dieser zuerst um 20% erhöht wird und von dem neuen Preis ausgehend im Anschluss um 20% reduziert wird?

Wir untersuchen diese Frage anhand des Beispiels einer Tasche, die 80EUR kostet. Der Grundwert ist also 80. Die Erhöhung um 20% entspricht dem Prozentsatz. Es gilt $20\% = \frac{20}{100}$. Damit kann der Prozentwert berechnet werden: $80\text{EUR} \cdot \frac{20}{100} = 16\text{EUR}$. Nach einer Erhöhung des Preises von 80EUR um 20% kostet die Tasche also $80\text{EUR} + 16\text{EUR} = 96\text{EUR}$.

Um den erhöhten Preis auszurechnen, kann man auch schreiben

$$80 + \frac{20}{100} \cdot 80 = 80 \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right) = 80 \cdot 1,2$$

Bei Erhöhung um 20% errechnet sich der neue Preis durch Multiplikation mit $1,2$.

Um den Preis nach einer anschließenden Reduzierung um 20% (Prozentsatz) zu berechnen, muss nun von dem neuen Preis 96EUR als Grundwert ausgegangen werden. Wir berechnen den neuen Prozentwert: $96 \cdot \frac{20}{100} = 19,20$EUR. Wird der Preisnachlass von dem Grundwert abgezogen, erhalten wir $96\text{EUR} - 19,20\text{EUR} = 76,80$EUR. Damit ist die Tasche also am Ende günstiger als zu Beginn.

Es ist also wichtig sich darüber im Klaren zu sein, was Grundwert, Prozentsatz und Prozentwert jeweils für einen Aufgabenkontext bedeuten. Wären wir in beiden Fällen von dem Grundwert 80EUR ausgegangen (anstatt die im ersten Schritt vorgenommene Erhöhung des Grundwertes auf 96EUR zu berücksichtigen), so wären wir am Ende (fälschlicherweise!) wieder auf das Ergebnis 80EUR gekommen.

Wie verändert sich der Preis eines Produkts, wenn wir es umgekehrt machen und zuerst 20% Rabatt vom Preis abziehen, um den Preis anschließend um 20% zu erhöhen? Überlegen Sie!

Regel 4:

1. Wird ein Grundwert G um p% erhöht, so ergibt sich als neuer Wert $G \cdot (1 + \frac{p}{100})$.
2. Wird ein Grundwert G um p% verringert, so ergibt sich als neuer Wert $G \cdot (1 - \frac{p}{100})$.

Beispiel 12:

Wir gehen von dem Grundwert 80EUR aus. Bei einer Erhöhung um 40% ergibt sich als neuer Wert $80\text{EUR} \cdot (1 + \frac{40}{100}) = 80 \cdot 1,4 = 112$EUR. Eine Verringerung des Grundwertes um 40% ergäbe $80\text{EUR} \cdot (1 - \frac{40}{100}) = 80\text{EUR} \cdot 0,6 = 48$EUR.

Beispiel 13:

Wir gehen von dem Grundwert 522 aus. Bei einer Erhöhung um $7,99$% ergibt sich als neuer Wert $522 \cdot (1 + \frac{7,99}{100}) = 522 \cdot 0,0799 = 563,7078$. Eine Verringerung des Grundwertes um $7,99$% ergäbe $522 \cdot (1 - \frac{7,99}{100}) = 522 \cdot 0,9201 = 480,2922$EUR.

Aufgaben

Aufgabe 5:
Schreiben Sie die folgenden Dezimalzahlen in die Prozentschreibweise um:
1. $0,45 =$?
2. $1,98 =$?
3. $0,0075 =$?

Lösung:

$$\begin{aligned}
1. \quad 0,45 &= \frac{4}{10} + \frac{5}{100} = \frac{40}{100} + \frac{5}{100} = \frac{45}{100} = 45\% \\
2. \quad 1,98 &= \frac{198}{100} = 198\% \\
3. \quad 0,0075 &= 0,0075 \cdot \frac{100}{100} = 0,0075 \cdot 100 \cdot \frac{1}{100} \\
&= 0,75 \cdot \frac{1}{100} = 0,75\%
\end{aligned}$$

Aufgabe 6:
Schreiben Sie die folgenden Dezimalzahlen in die Prozentschreibweise um:

1. $0,9568 =$?
2. $3,58 =$?
3. $0,1156 =$?
4. $0,0268 =$?
5. $10,80 =$?
6. $1,22 =$?

Lösung:

1. $0,9568 = 95,68\%$
2. $3,58 = 358\%$
3. $0,1156 = 11,56\%$
4. $0,0268 = 2,68\%$
5. $10,80 = 1080\%$
6. $1,22 = 122\%$

Aufgabe 7:
Schreiben Sie die folgenden Prozentangaben in die Dezimalschreibweise um:
1. $68\% =$?
2. $0,2\% =$?
3. $208\% =$?

Lösung:

1. $68\% = 68 \cdot \frac{1}{100} = 68 : 100 = 0,68$
2. $0,2\% = 0,2 \cdot \frac{1}{100} = 0,2 : 100 = 0,002$
3. $208\% = 208 \cdot \frac{1}{100} = 208 : 100 = 2,08$

Aufgabe 8:
Schreiben Sie die folgenden Prozentangaben in die Dezimalschreibweise um:

1. $9,2\% =$?
2. $359,2\% =$?
3. $36\% =$?
4. $58,6\% =$?
5. $0,002\% =$?
6. $100,01\% =$?

Lösung:

1. $9,2\% = 0,092$
2. $359,2\% = 3,592$
3. $36\% = 0,36$
4. $58,6\% = 0,586$
5. $0,002\% = 0,00002$
6. $100,01\% = 1,0001$

Aufgabe 9:
Schreiben Sie die folgenden Brüche in Prozentangaben um:

1. $\frac{1}{4} =$?
2. $\frac{6}{5} =$?
3. $\frac{1}{500} =$?

Lösung:

1. $\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{25}{100} = 25 \cdot \frac{1}{100} = 25\%$
2. $\frac{6}{5} = \frac{6 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{120}{100} = 120\%$
3. $\frac{1}{500} = \frac{1 \cdot 2}{500 \cdot 2} = \frac{2}{1000} = 0,2 \cdot \frac{1}{100} = 0,2\%$

Aufgabe 10:
Schreiben Sie die folgenden Brüche in Prozentangaben um:

1. $\frac{6}{20} =$?
2. $\frac{7}{8} =$?
3. $\frac{137}{200} =$?
4. $\frac{532}{250} =$?
5. $\frac{86}{50} =$?
6. $\frac{157}{1250} =$?

Lösung:

1. $\frac{6}{20} = 30\%$
2. $\frac{7}{8} = 87,5\%$
3. $\frac{137}{200} = 68,5\%$
4. $\frac{532}{250} = 212,8\%$
5. $\frac{86}{50} = 172\%$
6. $\frac{157}{1250} = 12,56\%$

Aufgabe 11:
Berechnen Sie die folgenden Prozentwerte:
1. 45% von $100 =$?
2. $0,2\%$ von $255 =$?
3. 130% von $1200 =$?

Lösung:

$$
\begin{aligned}
1. \quad 45\% \text{ von } 100 &= \frac{45}{100} \cdot 100 = 45 \\
2. \quad 0,2\% \text{ von } 255 &= 0,2 \cdot \frac{1}{100} \cdot 255 = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{100} \cdot 255 \\
&= \frac{510}{1000} = \frac{51}{100} = 0,51 \\
3. \quad 130\% \text{ von } 1200 &= \frac{130}{100} \cdot 1200 = 130 \cdot 12 = 1560
\end{aligned}
$$

Aufgabe 12:
Berechnen Sie die folgenden Prozentwerte:
1. 23% von $58 =$?
2. $0,54\%$ von $100 =$?
3. $200,3\%$ von $60 =$?
4. 87% von $500 =$?
5. 30% von $69 =$?
6. 10% von $50 =$?

Lösung:

1. 23% von $58 = 13,34$
2. $0,54\%$ von $100 = 0,54$
3. $200,3\%$ von $60 = 120,18$
4. 87% von $500 = 435$
5. 30% von $69 = 20,7$
6. 10% von $50 = 5$

Aufgabe 13:
Berechnen Sie den gegebenen Prozentsatz:
1. 37 von 100 = ?
2. 12,5 von 1000 = ?
3. 24 von 20 = ?

Lösung:
1. $37 \text{ von } 100 = 37 \cdot \frac{1}{100} \cdot 100 = 37\%$
2. $12,5 \text{ von } 1000 = 12,5 \cdot \frac{1}{1000} \cdot 100 = 1,25\%$
3. $24 \text{ von } 20 = 24 \cdot \frac{1}{20} \cdot 100 = 120\%$

Aufgabe 14:
Berechnen Sie den gegebenen Prozentsatz:
1. 0,2 von 25 = ?
2. 23 von 800 = ?
3. 45 von 1000 = ?
4. 820 von 800 = ?
5. 63 von 84 = ?
6. 375 von 500 = ?

Lösung:
1. $0,2 \text{ von } 25 = 0,8\%$
2. $23 \text{ von } 800 = 2,875\%$
3. $45 \text{ von } 1000 = 4,5\%$
4. $820 \text{ von } 800 = 102,5\%$
5. $63 \text{ von } 84 = 75\%$
6. $375 \text{ von } 500 = 75\%$

Anwendung

Aufgabe 15:
a) Eine Bank bietet ihren Kunden auf dem Sparbuch $0,25\%$ jährliche Zinsen an. Wieviel Zinsen erhält ein Anleger nach einem Jahr, wenn er 1200EUR anlegt? Antwort: ?
b) Wieviel muss ein Kunde anlegen, um nach einem Jahr 105EUR Zinsen zu erhalten, wenn der Zinssatz bei $0,25\%$ bleibt? Antwort: ?
c) Eine Kundin einer anderen Bank erhält nach einem Jahr 204,03EUR Zinsen bei einer Anlagensumme von 3400,50EUR von ihrer Bank. Wie hoch ist der jährliche Zinssatz in Prozent? Antwort: ?

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} 0,25\% \cdot 1200\text{EUR} &= 0,25 \cdot \frac{1}{100} \cdot 1200\text{EUR} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1200}{100}\text{EUR} \\ &= \frac{300}{100}\text{EUR} \\ &= \frac{3}{1}\text{EUR} \\ &= 3\text{EUR} \end{aligned}$$

Bei einer Anlage von 1200EUR erhalten Kunden der Bank 3EUR Zinsen im Jahr bei einem jährlichen Zinssatz von $0,25\%$.

b)

$$\begin{aligned} 105\text{EUR} : 0,25\% &= 105 \cdot \frac{10000}{25}\text{EUR} \\ &= 105 \cdot 400\text{EUR} \\ &= 42\ 000\text{EUR} \end{aligned}$$

Bei einer Anlage von 42 000EUR erhalten Kunden der Bank 105EUR Zinsen im Jahr bei einem jährlichen Zinssatz von $0,25\%$.

c)

$$\begin{aligned} & (204,03\text{EUR} : 3400,50\text{EUR}) \cdot 100\% \\ = & \left(\frac{20403}{100} : \frac{34005}{10}\right) \cdot 100\% \\ = & \left(\frac{20403}{100} \cdot \frac{10}{34005}\right) \cdot 100\% \\ = & \ 6\% \end{aligned}$$

Bei einer Anlage von 3400,50EUR und einem jährlichen Zinswert von 204,03EUR erhält die Kundin jährlichen Zinssatz von 6%.

Aufgabe 16:
Von einem monatlichen Gehalt von 2340EUR müssen Beiträge zur Sozialversicherung (Rentenversicherung, Krankenversicherung, Arbeitslosenversicherung und Pflegeversicherung) bezahlt werden. Dabei lagen die Prozentsätze der Beiträge im Jahr 2015 bei:
Rentenversicherung: $18,7\%$
Krankenversicherung: $14,6\%$
Arbeitslosenversicherung: $3,0\%$
Pflegeversicherung: $2,35\%$ (für Kinderlose: $2,6\%$)

Wieviele Beiträge führen Kinderlose ab? ?
Wieviele Beiträge führen Eltern insgesamt ab? ?

Lösung:

Für Kinderlose gilt:

$$\begin{aligned}
& 18,7\% \cdot 2340\text{EUR} + 14,6\% \cdot 2340\text{EUR} \\
& \quad +3,0\% \cdot 2340\text{EUR} + 2,6\% \cdot 2340\text{EUR} \\
= \; & 18,7 \cdot \frac{1}{100} \cdot 2340\text{EUR} + 14,6 \cdot \frac{1}{100} \cdot 2340\text{EUR} \\
& \quad +3,0 \cdot \frac{1}{100} \cdot 2340\text{EUR} + 2,6 \cdot \frac{1}{100} \cdot 2340\text{EUR} \\
= \; & \frac{187}{10} \cdot \frac{1}{100} \cdot 2340\text{EUR} + \frac{146}{10} \cdot \frac{1}{100} \cdot 2340\text{EUR} \\
& \quad +\frac{3}{1} \cdot \frac{1}{100} \cdot 2340\text{EUR} + \frac{26}{10} \cdot \frac{1}{100} \cdot 2340\text{EUR} \\
= \; & 437,58\text{EUR} + 341,64\text{EUR} + 70,2\text{EUR} + 60,84\text{EUR} \\
= \; & 910,26\text{EUR}
\end{aligned}$$

Alternative Rechnung für Kinderlose:

$$\begin{aligned}
& 18,7\% \cdot 2340\text{EUR} + 14,6\% \cdot 2340\text{EUR} \\
& \quad +3,0\% \cdot 2340\text{EUR} + 2,6\% \cdot 2340\text{EUR} \\
= \; & (18,7\% + 14,6\% + 3\% + 2,6\%) \cdot 2340\text{EUR} \\
= \; & 38,9\% \cdot 2340\text{EUR} \\
= \; & 910,26\text{EUR}
\end{aligned}$$

Aus der Rechnung ist ersichtlich, dass für Kinderlose $38,9\%$ an Abzügen fällig werden.

Für Eltern gilt:

$$\begin{aligned}
& 18,7\% \cdot 2340\text{EUR} + 14,6\% \cdot 2340\text{EUR} \\
& \quad +3,0\% \cdot 2340\text{EUR} + 2,35\% \cdot 2340\text{EUR} \\
= \; & 437,58\text{EUR} + 341,64\text{EUR} + 70,2\text{EUR} + 2,35 \cdot \frac{1}{100} \cdot 2340\text{EUR} \\
= \; & 849,42\text{EUR} + \frac{235}{100} \cdot \frac{1}{100} \cdot 2340\text{EUR} \\
= \; & 849,42\text{EUR} + 54,99\text{EUR} \\
= \; & 904,41\text{EUR}
\end{aligned}$$

Aufgabe 17:

Im Laden A wurde ein Laptop von 800EUR auf 740EUR reduziert. In einem Laden B kostet derselbe Laptop 900EUR abzüglich einem Rabatt von 18% angeboten.
In welchem Laden ist der Laptop am günstigsten? ☐ Laden A

☐ Laden B

Wie viel kostet der Laptop im Laden B? ?

Um wie viel Prozent wurde der Laptop im Laden A reduziert? ?

Lösung:

Laden B:

$$\begin{aligned} 900 - 900\text{EUR} \cdot 18\% &= 900 - 900\text{EUR} \cdot \frac{18}{100} \\ &= 900 - 9\text{EUR} \cdot 18 \\ &= 900 - 162\text{EUR} \\ &= 738\text{EUR} \end{aligned}$$

Im Laden B ist der Laptop um 2EUR günstiger als im Laden A.

Laden A:

$$\begin{aligned} \frac{800\text{EUR} - 740\text{EUR}}{800\text{EUR}} \cdot 100\% &= \frac{60}{800} \cdot 100\% \\ &= \frac{3}{40} \cdot 100\% \\ &= \frac{75}{1000} \cdot 100\% \\ &= 0,075 \cdot 100\% = 7,5\% \end{aligned}$$

Laden B bietet also einen Rabatt von $7,5\%$.

Aufgabe 18:

Auf einer Nebenkostenabrechnung wird der Preis meist erst ohne Mehrwertsteuer angeben. Die Mehrwertsteuer kann je nach Produkt endweder bei 7% oder 19% liegen. Auf die Grundsteuer wird keine Mehrwertsteuer erhoben.
Grundsteuer 95EUR
Strom 50EUR zzgl. 19%
Wasser 75EUR zzgl. 7%
Heizkosten 100EUR zzgl. 19%

Wie hoch ist die Nebenkostenabrechnung inklusive Mehrwertsteuer?
?

Lösung:

Für die Mehrwertsteuer gilt:

$$\begin{aligned} & 50\text{EUR} \cdot 19\% + 75\text{EUR} \cdot 7\% + 100\text{EUR} \cdot 19\% \\ = \; & (50+100)\text{EUR} \cdot 19\% + 75\text{EUR} \cdot 7\% \\ = \; & 150\text{EUR} \cdot \frac{19}{100} + 75\text{EUR} \cdot \frac{7}{100} \\ = \; & 28,5\text{EUR} + 5,25\text{EUR} \\ = \; & 33,75\text{EUR} \end{aligned}$$

Die Nebenkosten inklusive der Mehrwertsteuer ergeben:

$$95\text{EUR} + 50\text{EUR} + 75\text{EUR} + 100\text{EUR} + 33,75\text{EUR} = 353,75\text{EUR}$$

Aufgabe 19:

Mieter, die ihren Zweitwohnsitz in Dortmund gemeldet haben, zahlen für diesen eine Zweitwohnungssteuer. Diese betrug im Jahr 2015 zum Beispiel 12% der Nettokaltmiete. Berechnen Sie den Betrag der Steuer für eine 55 m^2-Wohnung mit einer Nettokaltmiete von 320EUR.
Antwort: ?
In Bielefeld lag die Zweitwohnungssteuer 2015 bei 11%. Berechnen Sie den Betrag der Steuer für eine 35 m^2-Wohnung mit einer Nettokaltmiete von 210EUR.
Antwort: ?

Lösung:

In Dortmund gilt:

$$\begin{aligned} 320\text{EUR} \cdot 12\% &= 320\text{EUR} \cdot \frac{12}{100} \\ &= 38,4\text{EUR} \end{aligned}$$

In Bielefeld gilt:

$$\begin{aligned} 210\text{EUR} \cdot 11\% &= 210\text{EUR} \cdot \frac{11}{100} \\ &= 23,1\text{EUR} \end{aligned}$$

Die Größe der jeweiligen Wohnung spielt hier keine Rolle.

Aufgabe 20:

Die Mehrwertsteuer ist in jedem Land unterschiedlich. Für Bücher galten 2015 laut europäischer Kommission die Mehrwertsteuersätze:
Deutschland 7%
Bulgarien 20%
Luxemburg 3%

Frankreich $5,5\%$
Dänemark 25%

Wie teuer ist ein Buch inklusive Mehrwertsteuer bei einem Grundpreis von 23EUR in den verschieden Ländern? Runden Sie auf zwei Nachkommastellen.

Deutschland ?
Bulgarien ?
Luxemburg ?
Frankreich ?
Dänemark ?

Lösung:

Für Deutschland gilt:

$$\begin{aligned} 23\text{EUR} + 23\text{EUR} \cdot 7\% &= 23\text{EUR} + 23\text{EUR} \cdot \frac{7}{100} \\ &= 23\text{EUR} + 1,61\text{EUR} \\ &= 24,61\text{EUR} \end{aligned}$$

Für Bulgarien gilt:

$$\begin{aligned} 23\text{EUR} + 23\text{EUR} \cdot 20\% &= 23\text{EUR} + 23\text{EUR} \cdot \frac{20}{100} \\ &= 23\text{EUR} + 4,60\text{EUR} \\ &= 27,60\text{EUR} \end{aligned}$$

Für Luxemburg gilt:

$$\begin{aligned} 23\text{EUR} + 23\text{EUR} \cdot 3\% &= 23\text{EUR} + 23\text{EUR} \cdot \frac{3}{100} \\ &= 23\text{EUR} + 0,69\text{EUR} \\ &= 23,69\text{EUR} \end{aligned}$$

Für Frankreich gilt:

$$\begin{aligned} 23\text{EUR} + 23\text{EUR} \cdot 5,5\% &= 23\text{EUR} + 23\text{EUR} \cdot \frac{55}{1000} \\ &= 23\text{EUR} + 1,265\text{EUR} \\ &\approx 24,27\text{EUR} \end{aligned}$$

Für Dänemark gilt:

$$\begin{aligned} 23\text{EUR} + 23\text{EUR} \cdot 25\% &= 23\text{EUR} + 23\text{EUR} \cdot \frac{25}{100} \\ &= 23\text{EUR} + 5,75\text{EUR} \\ &= 28,75\text{EUR} \end{aligned}$$

Aufgabe 21:
In vielen Einkaufsläden kann mithilfe einer Kundenkarte ein wenig gespart werden. Diese versprechen beispielsweise 3% Sofort-Rabatt bei jedem Einkauf bundesweit und beim Online-Einkauf.
Wie viel wird gespart bei einem Kauf einer Schreibtischlampe im Wert von 19EUR?
Antwort: ?
Wie viel wird bei einem Kauf eines Fahrrads im Wert von 578EUR gespart?
Antwort: ?

Lösung:
Für eine Schreibtischlampe im Wert von 19EUR gilt:

$$\begin{aligned} 19\text{EUR} \cdot 3\% &= 19\text{EUR} \cdot \frac{3}{100} \\ &= 0,57\text{EUR} \end{aligned}$$

Für ein Fahrrad im Wert von 578EUR gilt:

$$\begin{aligned} 578\text{EUR} \cdot 3\% &= 578\text{EUR} \cdot \frac{3}{100} \\ &= 17,34\text{EUR} \end{aligned}$$

Aufgabe 22:
In den Benzinpreisen sind verschiedene Steuern enthalten - wie die Mehrwertsteuer (19%) und die Energiesteuer (49%). Die Mehrwertsteuer wird auf den Benzingrundpreis und der Energiesteuer berechnet.
Wie viel kostete 2015 ein Liter Benzin ohne Mehrwert- und Energiesteuer bei einem Benzinpreis von $1,329$EUR pro Liter?
Berechnen Sie den Grundpreis und runden Sie auf zwei Nachkommastellen:
?

Lösung:
Der Benzinpreis werde mit x bezeichnet, dann ist der Benzinpreis mit Energiesteuer $x \cdot 1,49$ und der Benzinpreis mit Energiesteuer und Mehrwertsteuer ist $(x \cdot 1,49) \cdot 1,19$

Ein Liter Benzin kostet laut Aufgabenstellung $1,329$EUR, also gilt $(x \cdot 1,49) \cdot 1,19 = 1,329$EUR

Wir stellen die Gleichung nach x um und berechnen: $x = \frac{1,329\text{EUR}}{1,49 \cdot 1,19} \approx 0,75\text{EUR}$.