

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn

FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

LE 3 - Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

3.1 Potenzen mit ganzzahligem Exponenten

Im Folgenden finden Sie die Abschnitte:

Übersicht	S. 1
Hinführung	S. 2
Inhalte mit Erklärungen	S. 4
Aufgaben	S. 9
Anwendung	S. 11

Übersicht

In diesem Kapitel geht es um die Themen

- Einführung der Potenzgesetze für ganzzahlige Exponenten
- Begründungen der Potenzgesetze
- Einüben der Anwendung von Potenzgesetzen

Hinführung

So wie die Multiplikation eine verkürzte Schreibweise für eine wiederholte Addition ist, sind Potenzen eine verkürzte Schreibweise für eine wiederholte Multiplikation - insofern der Exponent eine natürliche Zahl ist. Statt $6 + 6 + 6 + 6$ können Sie demnach auch $4 \cdot 6$ schreiben und analog dazu können Sie $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$ als 6^4 schreiben.

Aufgabe 1:

1. Man betrachte folgende Gleichung

$$2^3 \cdot 2^5 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{3\text{-mal}} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5\text{-mal}} = 2^8$$

- a) Berechnen Sie analog zum Beispiel: $3^2 \cdot 3^7 = \boxed{\quad ? \quad}$
 b) Welche Gesetzmäßigkeit lässt sich bei beiden Beispielen erkennen? Formulieren Sie ein allgemeingültiges Gesetz für obige Gleichungen.

2. Es gilt

$$(2^3)^5 = \underbrace{2^3 \cdot \dots \cdot 2^3}_{5\text{-mal}} = 2^{15}$$

- a) Berechnen Sie analog: $(3^2)^7 = \boxed{\quad ? \quad}$
 b) Stellen Sie auch hier eine allgemeine Formel auf.

3. Ein weiteres Rechenbeispiel für Potenzen ist

$$2^5 \cdot 3^5 = \underbrace{2 \cdot \dots \cdot 2}_{5\text{-mal}} \cdot \underbrace{3 \cdot \dots \cdot 3}_{5\text{-mal}} = \underbrace{(2 \cdot 3) \cdot \dots \cdot (2 \cdot 3)}_{5\text{-mal}} = (2 \cdot 3)^5 = 6^5$$

- a) Wie lautet demzufolge das Ergebnis für $3^7 \cdot 5^7$?
 $3^7 \cdot 5^7 = \boxed{\quad ? \quad}$
 b) Wie kann man diese Berechnungen verallgemeinern?

Lösung:

1. a) $3^2 \cdot 3^7 = \underbrace{3 \cdot 3}_{2\text{-mal}} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{7\text{-mal}} = 3^9$

- b) Es gilt für $n, m \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ die Formel $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.

2. a) $(3^2)^7 = \underbrace{3^2 \cdot \dots \cdot 3^2}_{7\text{-mal}} = 3^{14}$

- b) Es gilt für $n, m \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ die Formel $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

3. a) $3^7 \cdot 5^7 = \underbrace{3 \cdot \dots \cdot 3}_{7\text{-mal}} \cdot \underbrace{5 \cdot \dots \cdot 5}_{7\text{-mal}}$
 $= \underbrace{(3 \cdot 5) \cdot \dots \cdot (3 \cdot 5)}_{7\text{-mal}} = 15^7$

- b) Es gilt für $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ die Formel $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.

Sie haben nun die Potenzgesetze f"ur nat"urliche Exponenten entdeckt. Diese m"ussen allerdings noch bewiesen werden. Die Potenzgesetze lassen sich dann auch auf ganzzahlige, rationale und reelle Exponenten erweitern.

Inhalte mit Erklärungen

Definition 1: (Einführung von Potenzen)

Sei $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Man definiert

$$1. \ a^n := \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}$$

Wir nennen a^n eine Potenz. Dabei heißt a Basis und n ist der Exponent (der Potenz). Insbesondere gilt $a^1 = a$ und wir setzen $a^0 := 1$.

$$2. \text{ Für } a \neq 0$$

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n}$$

Insbesondere gilt $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Wir formulieren die Potenzgesetze für beliebige ganzzahlige Exponenten wie folgt:

Satz 1: (Potenzgesetze (für ganzzahlige Exponenten))

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$ und $m, n \in \mathbb{Z}$ gelten folgende Rechenregeln:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (\mathbf{P'1})$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (\mathbf{P'2})$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad (\mathbf{P'3})$$

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad (\mathbf{P'4})$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (\mathbf{P'5})$$

Aufgabe 2:

Lösen Sie die Aufgaben aus dem unten folgenden Video mithilfe des Potenzgesetzes (**P'1**).

Aufgabe 3:

Lösen Sie die Aufgaben aus dem unten folgenden Video mithilfe des Potenzgesetzes (**P'2**).

Aufgabe 4:

Lösen Sie die Aufgaben aus dem unten folgenden Video mithilfe des Potenzgesetzes (**P'3**).

Aufgabe 5:

Lösen Sie die Aufgaben aus dem unten folgenden Video mithilfe des Potenzgesetzes (P'4).

Aufgabe 6:

Lösen Sie die Aufgaben aus dem unten folgenden Video mithilfe des Potenzgesetzes (P'5).

Bemerkung: Bei Umformungen sind beide Richtungen der Regeln wichtig, also z.B. auch $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$.

Klicken Sie hier, um den Beweis der Potenzgesetze anzuzeigen. (Aufklapptext)

Wir zeigen nun, wie die Potenzgesetze schrittweise bewiesen werden können. Auf den Fall ausschließlich natürlicher Exponenten gehen wir ausführlich ein. Für ganzzahlige Exponenten werden wir exemplarisch das erste Potenzgesetz (P'1) beweisen.

Es sei für den gesamten Beweis $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$.

1. Zunächst möchten wir die Potenzgesetze für jene Potenzen beweisen, bei denen nur natürliche Zahlen im Exponenten auftauchen. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{(P'1):} \\ a^m \cdot a^n &= \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m\text{-mal}} \cdot \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}} \\ &= \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{(m+n)\text{-mal}} = a^{m+n} \end{aligned}$$

$$\text{(P'2):} \\ \frac{a^m}{a^n} = \frac{\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m\text{-mal}}}{\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}}$$

$$\text{Wenn } m \geq n \text{ ist, dann folgt mit Kürzen } \frac{\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m\text{-mal}}}{\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}} = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{(m-n)\text{-mal}} = a^{m-n}.$$

$$\text{Im anderen Fall ist } m < n \text{ und es ergibt sich } \frac{\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m\text{-mal}}}{\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{(n-m)\text{-mal}}} = \frac{1}{a^{n-m}} = \frac{1}{a^{-(m-n)}} = a^{m-n}.$$

$$\text{(P'3):} \\ (a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{n\text{-mal}} = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m \cdot n\text{-mal}} = a^{m \cdot n}$$

2. $\mathbb{Z}$: Die Potenzgesetze f"ur ganzzahlige Exponenten erh"alt man aus $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ und einer Reihe von Fallunterscheidungen. Es gilt exemplarisch f"ur das erste Potenzgesetz ($m, n \in \mathbb{Z}$)

I: Es gelte $m = 0$ oder $n = 0$. Dann folgt

- Sei $m = 0$.

$$a^m \cdot a^n = a^0 \cdot a^n = 1 \cdot a^n = a^n$$

$$= a^{0+n} = a^{m+n}$$
- Sei $n = 0$.

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^0 = a^m \cdot 1 = a^m$$

$$= a^{m+0} = a^{m+n}$$

II: $m, n \in \mathbb{N}$: siehe 1.

III: $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}, n < 0$

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^{-(-n)} \stackrel{*}{=} a^m \cdot \frac{1}{a^{-n}} = \frac{a^m}{a^{-n}} = \underbrace{\frac{\overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{m\text{-mal}}}{\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{(-n)\text{-mal}}}}$$

* Da $(-n) \in \mathbb{N}$ gilt, kann die Definition f"ur negative Exponenten angewendet werden.

Gilt $m > -n$, dann folgt mit K"urzen $\underbrace{\frac{\overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{m\text{-mal}}}{\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{(-n)\text{-mal}}}}_{m - (-n)\text{-mal}} = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m - (-n)\text{-mal}} = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{m+n\text{-mal}} = a^{m+n}.$

Andernfalls ist $m \leq -n$ und es ergibt sich $\underbrace{\frac{\overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{m\text{-mal}}}{\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{(-n)\text{-mal}}}}_{(-n-m)\text{-mal}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{(-n-m)\text{-mal}}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{-(m+n)\text{-mal}}} = a^{m+n}.$

In beiden F"allen kommt man also auf $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

IV: $m \in \mathbb{Z}, m < 0, n \in \mathbb{N}$: analog zu III.

V: $m, n \in \mathbb{Z}, m, n < 0$: analog zu II.

Die Rechengesetze (P'4) und (P'5) folgen aus der Definition der Potenz sowie dem Gesetz (P'3). Die ausformulierten Beweise finden Sie in den L"osungen der nachfolgenden Aufgaben. Vielleicht gelingt Ihnen der Beweis aber auch selbst!

Aufgabe 7:

Beweisen Sie das Potenzgesetz (P'4):

f"ur alle $a, b \in \mathbb{R}, a, b \neq 0$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Tipp: Machen Sie eine Fallunterscheidung f"ur $n > 0, n = 0$ und $n < 0$.

Lösung:

Wir beweisen das Potenzgesetz (P'4), indem wir die Aussage zunächst für $n \in \mathbb{N}$ zeigen und anschließend die Fälle $n = 0$ und $n < 0$ betrachten.

- 1. Fall: $n \in \mathbb{Z}$ mit $n > 0$

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}} \cdot \underbrace{b \cdot \dots \cdot b}_{n\text{-mal}} = \underbrace{(a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}_{n\text{-mal}} = (a \cdot b)^n$$

- 2. Fall: $n = 0$

$$a^n \cdot b^n = a^0 \cdot b^0 = 1 \cdot 1 = 1 = (a \cdot b)^0 = (a \cdot b)^n$$

- 3. Fall: $n \in \mathbb{Z}$ mit $n < 0$

$$a^n \cdot b^n = a^{-(-n)} \cdot b^{-(-n)} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{1}{a^{-n}} \cdot \frac{1}{b^{-n}} = \frac{1}{a^{-n} \cdot b^{-n}}$$

Der Nenner des Bruchs ist das Produkt $a^{-n} \cdot b^{-n}$, das aus zwei Potenzen mit positivem Exponenten besteht (n ist negativ, also ist $-n$ positiv). Daher können wir das im 1. Fall bewiesene Gesetz (P'4) für positive Exponenten anwenden und es gilt $a^{-n} \cdot b^{-n} = (a \cdot b)^{-n}$.

$$\frac{1}{a^{-n} \cdot b^{-n}} = \frac{1}{(a \cdot b)^{-n}} \stackrel{\text{Def.}}{=} (a \cdot b)^n$$

Demnach gilt (P'4).

Aufgabe 8:

Beweisen Sie das Potenzgesetz (P'5):

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \neq 0$ und $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Tipp: Machen Sie eine Fallunterscheidung für $n > 0$, $n = 0$ und $n < 0$.

Lösung:

- 1. Fall: $n \in \mathbb{Z}$ mit $n > 0$

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{\overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{n\text{-mal}}}{\underbrace{b \cdot \dots \cdot b}_{n\text{-mal}}} = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}_{n\text{-mal}} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

- 2. Fall: $n = 0$

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{a^0}{b^0} = \frac{1}{1} = 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^0 = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

- 3. Fall: $n \in \mathbb{Z}$ mit $n < 0$

$$\frac{a^n}{b^n} = a^n \cdot \frac{1}{b^n} = a^{-(-n)} \cdot \frac{1}{b^n} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{1}{a^{-n}} \cdot b^{-n} = \frac{b^{-n}}{a^{-n}}$$

Der Zähler und Nenner des Bruchs sind jeweils eine Potenz mit positivem Exponenten (n ist negativ, also ist $-n$ positiv). Daher können wir das im 1. Fall bewiesene Gesetz (P'5) für positive Exponenten anwenden und es gilt $\frac{b^{-n}}{a^{-n}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$.

$$\frac{b^{-n}}{a^{-n}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-1 \cdot n} \stackrel{\text{(P'3)}}{=} \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{-1}\right)^n \stackrel{\text{Def.}}{=} \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Also gilt (P'5).

Aufgaben

Aufgabe 9:

Vervollständigen Sie die unten stehenden Gleichungen so, dass sich die Potenzgesetze (P'1) bis (P'5) ergeben.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a, b \neq 0$ sowie $m, n \in \mathbb{Z}$.

- (P'1): $a^m \cdot a^n = \boxed{?}$
- (P'2): $\boxed{?} = a^{m-n}$
- (P'3): $\boxed{?} = a^{m \cdot n}$
- (P'4): $a^n \cdot b^n = \boxed{?}$
- (P'5): $\frac{a^n}{b^n} = \boxed{?}$

Lösung:

Für alle $a, b \in \mathbb{R}, a, b \neq 0$ und $m, n \in \mathbb{Z}$ gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
 a^m \cdot a^n &= a^{m+n}, & (\text{P'1}) \\
 \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n}, & (\text{P'2}) \\
 (a^m)^n &= a^{m \cdot n}, & (\text{P'3}) \\
 a^n \cdot b^n &= (a \cdot b)^n, & (\text{P'4}) \\
 \frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n. & (\text{P'5})
 \end{aligned}$$

Aufgabe 10:

Sei $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Vereinfachen Sie durch Ausklammern: $5a^3 - 7a^5 = \boxed{?}$

Lösung:

Wir erhalten durch Ausklammern $5a^3 - 7a^5 = a^3(5 - 7a^2)$.

Aufgabe 11:

Welcher Fehler wurde hier gemacht?

$$10^n = 100 \Rightarrow n = 10$$

Lösung:

Eine Möglichkeit ist, dass hier ein Fehler im Grundverständnis bezüglich des Potenzierens vorliegt: Die oder der Lernende könnte gedacht haben, es gelte $10^{10} = 100$. Allerdings ist $10 \cdot 10 = 10^2 = 100$ und somit das richtige Ergebnis $x = 2$.

Aufgabe 12:

Vereinfachen Sie durch Ausklammern, wobei $a, b \in \mathbb{R}, a, b \neq 0$.

$$2a^8b^5 - 7a^5b^3 + a^7(-b)^4 = \boxed{?}$$

Lösung:

$$\text{Wir erhalten } 2a^8b^5 - 7a^5b^3 + a^7(-b)^4 = a^5b^3(2a^3b^2 - 7 + a^2b).$$

Aufgabe 13:

Welcher Fehler wurde hier gemacht?

$$a^{-2xz} = a^{(-2x)^z}, \quad \text{wobei } a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ und } x, z \in \mathbb{Z}$$

Lösung:

Vermutlich hat die oder der Lernende bei dieser Umformung an das richtige Gesetz gedacht, danach allerdings die Klammern falsch gesetzt. Aus $a^{-2xz} = a^{(-2x)^z}$ folgt $-2xz = (-2x)^z$, aber diese Gleichheit gilt im Allgemeinen nicht, wie wir mit Zahlenbeispielen belegen können. Eine richtige Umformung wäre $a^{-2xz} = (a^{-2x})^z$ gewesen.

Anwendung

Beispiel 1:

Wie kann ich Terme mit Potenzen vereinfachen?

Wir wenden nun die Definitionen und Gesetze von Potenzen an einigen Beispielen an. Folgende Ausdrücke werden wir berechnen, ohne einen Taschenrechner zu verwenden.

1. $3^{12} \cdot 3^{(-9)}$

Mit **(P'1)** erhalten wir $3^{12} \cdot 3^{(-9)} = 3^{12+(-9)} = 3^{12-9} = 3^3 = 27$.

2. $\frac{5^9}{5^6}$

Mit **(P'2)** erhalten wir $\frac{5^9}{5^6} = 5^{9-6} = 5^3 = 125$.

3. $(3^2)^2$

Aus **(P'3)** resultiert $(3^2)^2 = 3^{2 \cdot 2} = 3^4 = 81$.

4. $8^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5$

Mit **(P'4)** ergibt sich $8^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 = (8 \cdot \frac{1}{4})^5 = 2^5 = 32$.

5. $\frac{14^4}{7^4}$

Aus **(P'5)** resultiert $\frac{14^4}{7^4} = \left(\frac{14}{7}\right)^4 = 2^4 = 16$.

Beispiel 2:

Wie löse ich Gleichungen mit Potenzen?

Anhand einiger Beispiele werden wir nun sehen, wie die erlernten Definitionen und Gesetze angewendet werden können, um Gleichungen zu lösen.

Sei $n \in \mathbb{Z}$.

1. $\frac{1}{2} \cdot 4^n = 8$

Durch Multiplikation der Gleichung $\frac{1}{2} \cdot 4^n = 8$ mit 2 erhalten wir $4^n = 16$. Die Lösung ist somit $n = 2$.

2. $2^n = 4^n$

Teilen wir die Gleichung $2^n = 4^n$ durch 2^n und wenden **(P'5)** an, so ergibt sich $1 = \frac{4^n}{2^n} = \left(\frac{4}{2}\right)^n = 2^n$ und damit $n = 0$.