

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn

FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

LE 3 - Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

3.3 Logarithmen

Im Folgenden finden Sie die Abschnitte:

Übersicht	S. 1
Hinführung	S. 2
Inhalte mit Erklärungen	S. 4
Aufgaben	S. 6
Anwendung	S. 14

Übersicht

In diesem Kapitel werden u.a. folgende Themen behandelt

- Definition des Logarithmus
- Einführung der Logarithmengesetze
- Beweis der Logarithmengesetze für alle Zahlenbereiche
- Klassische Anwendungen (z.B. logarithmische Skala, Rechenschieber, pH-Wert)

Hinführung

Um Gleichungen zu lösen, benötigt man Umkehroperationen, wie man an den folgenden Beispielen ($x \in \mathbb{R}, x > 0$) erkennen kann.

- $x - 15 = 0 \quad | +15 \quad \Rightarrow \quad x = 15$
- $3 \cdot x = 15 \quad | : 3 \quad \Rightarrow \quad x = 5$
- $x^2 = 25 \quad | \sqrt{} \quad \Rightarrow \quad x = 5$

Doch wie lautet nun die Lösung der Gleichung $5^x = 125$ und durch welche Umkehroperation (zum Potenzieren) erh"alt man sie? Diese ist der Logarithmus. Man sucht die Zahl x , für die $5^x = 125$ gilt und bezeichnet x als den Logarithmus von 125 zur Basis 5. Nach Definition des Logarithmus gilt also

$$5^x = 125 \quad \Rightarrow \quad x = \log_5(125) = 3.$$

Das Ergebnis ist somit die Zahl 3, da man die Basis 5 zur dritten Potenz erheben muss, um das Ergebnis 125 zu bekommen ($5^3 = 125$). So folgt z.B. aus $a^1 = a$ die Tatsache, dass $\log_a(a) = 1$ ist für $a > 0, a \neq 1$.

Wir stellen uns nun die Frage, ob man den Logarithmus von einem Produkt zweier Zahlen vereinfacht darstellen kann. Dazu untersuchen wir das Produkt $9 \cdot 27$. Betrachten wir die Gleichungen $3^2 = 9$ und $3^3 = 27$, so erhalten wir mit der Definition des Logarithmus

$$\begin{aligned} 3^2 = 9 & \Rightarrow 2 = \log_3(9) \\ 3^3 = 27 & \Rightarrow 3 = \log_3(27) \end{aligned}$$

Ausgehend von $9 \cdot 27$ verwenden wir nun obige logarithmische Darstellungen der Exponenten 2 und 3, sowie das erste Potenzgesetz. Es ergibt sich

$$9 \cdot 27 = 3^2 \cdot 3^3 = 3^{\log_3(9)} \cdot 3^{\log_3(27)} = 3^{\log_3(9) + \log_3(27)}.$$

Des Weiteren gilt nach Definition des Logarithmus

$$9 \cdot 27 = 3^{\log_3(9 \cdot 27)}.$$

Vergleicht man die Exponenten der rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen, so bekommt man schlie"slich

$$\log_3(9) + \log_3(27) = \log_3(9 \cdot 27).$$

Versuchen Sie nun bei folgenden Gleichungen die fehlenden Operationen anzugeben. (Hinweis: Bei der ersten Gleichung gibt es zwei Möglichkeiten.)

- $\log_2(8) \square \log_2(4) = \log_2(8 \square 4)$
- $\log_2(4^3) = 3 \square \log_2(4)$

Formulieren Sie, unter Berücksichtigung obiger Beispiele, allgemeine Gesetze für Logarithmen (ähnlich wie bei den Potenzgesetzen). "Überprüfen Sie ihre Vermutungen an weiteren Beispielen.

Lösung:

Es gilt

- $\log_2(8) + \log_2(4) = \log_2(8 \cdot 4)$ oder $\log_2(8) - \log_2(4) = \log_2(8 / 4)$
- $\log_2(4^3) = 3 \cdot \log_2(4)$

Inhalte mit Erklärungen

Satz 1:

Seien die reellen Zahlen $a > 0$, $a \neq 1$, und $b > 0$ gegeben. Die Gleichung $a^c = b$ besitzt genau eine reelle Zahl c als Lösung.

Definition 1:

Seien die reellen Zahlen $a > 0$, $a \neq 1$, und $b > 0$ gegeben. Die reelle Zahl c , die die Gleichung $a^c = b$ erfüllt, bezeichnet man als **Logarithmus** von b zur Basis a und schreibt $c = \log_a(b)$.
Kurz:

$$\log_a(b) = c \Leftrightarrow a^c = b.$$

Der Logarithmus $\log_a(b)$ ist also diejenige reelle Zahl, mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten.

Das Intervallhalbierungsverfahren zur Bestimmung von Logarithmen

Wir möchten die Zahl x bestimmen, für die die Gleichung $5^x = 10$ erfüllt ist. Nach der Definition des Logarithmus ist also die Zahl $x = \log_5(10)$ gesucht. Wir verwenden wieder das Intervallhalbierungsverfahren, um x annähernd zu bestimmen, und fangen mit dem Intervall $[1; 2]$ an, da 10 zwischen den beiden Zahlen $5^1 = 5$ und $5^2 = 25$ liegt. Aufgrund der Tatsache, dass $5^{1,5} = 11,180339889 \dots > 10$ gilt, befindet sich die Zahl x zwischen 1 und 1,5. Nach weiteren Schritten erhält man folgende Tabelle

Abschätzung für 10	Abschätzung für $x = \log_5(10)$	Intervall für $x = \log_5(10)$
$5^1 < 10 < 5^2$	$1 < \log_5(10) < 2$	$[1; 2]$
$5^1 < 10 < 5^{1,5}$	$1 < \log_5(10) < 1,5$	$[1; 1,5]$
$5^{1,25} < 10 < 5^{1,5}$	$1,25 < \log_5(10) < 1,5$	$[1,25; 1,5]$
$5^{1,375} < 10 < 5^{1,5}$	$1,375 < \log_5(10) < 1,5$	$[1,375; 1,5]$
$5^{1,375} < 10 < 5^{1,4375}$	$1,375 < \log_5(10) < 1,4375$	$[1,375; 1,4375]$
$5^{1,40625} < 10 < 5^{1,4375}$	$1,40625 < \log_5(10) < 1,4375$	$[1,40625; 1,4375]$
$5^{1,421875} < 10 < 5^{1,4375}$	$1,421875 < \log_5(10) < 1,4375$	$[1,421875; 1,4375]$
$5^{1,429688} < 10 < 5^{1,4375}$	$1,429688 < \log_5(10) < 1,4375$	$[1,429688; 1,4375]$

Der Logarithmus $\log_5(10)$ liegt also zwischen 1,429688 und 1,4375. Fährt man weiter fort, bekommt man beliebig kleine Intervalle und kann so auch die Zahl $\log_5(10) \approx 1,430676558$ beliebig genau annähern.

Ähnliche Verfahren, wie das an dieser Stelle betrachtete Intervallhalbierungsverfahren, finden im Taschenrechner Verwendung, um Zahlen anzunähern.

Regel 1: ((Logarithmengesetze))

Für alle $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$, $a \neq 1$, alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y > 0$ und alle $\beta \in \mathbb{R}$ und gilt:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y), \quad (\mathbf{L1})$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y), \quad (\mathbf{L2})$$

$$\log_a(x^\beta) = \beta \log_a(x). \quad (\mathbf{L3})$$

Wir beweisen nun die Logarithmengesetze mithilfe der bereits eingeführten Potenzgesetze.

- **(L1)** Gehen wir von dem Ausdruck $a^{\log_a(x) + \log_a(y)}$ aus und wenden nun das erste Potenzgesetz an, so erhalten wir

$$a^{\log_a(x) + \log_a(y)} = a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)} = x \cdot y.$$

Der Logarithmus $\log_a(x \cdot y)$ ist der Exponent von a , mit dem sich $x \cdot y$ ergibt. Die Gleichung zeigt, dass dies durch $\log_a(x) + \log_a(y)$ erfüllt wird. Also folgt

$$\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(x \cdot y).$$

- **(L2)** Betrachten wir nun

$$a^{\log_a(x) - \log_a(y)} = a^{\log_a(x)} a^{-\log_a(y)} = \frac{a^{\log_a(x)}}{a^{\log_a(y)}} = \frac{x}{y}.$$

Der Logarithmus $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)$ ist der Exponent von a , mit dem sich $\frac{x}{y}$ ergibt. Aus der obigen Gleichung folgt durch den Vergleich der Exponenten das zweite Logarithmusgesetz.

- **(L3)** Wendet man das dritte Potenzgesetz auf den Ausdruck $a^{\beta \log_a(x)}$ an, so bekommt man

$$a^{\beta \log_a(x)} = \left(a^{\log_a(x)}\right)^\beta = x^\beta.$$

Der Logarithmus $\log_a(x^\beta)$ ist der Exponent von a , für den man x^β erhält. Also ergibt sich $\beta \cdot \log_a(x) = \log_a(x^\beta)$.

Aufgaben

Aufgabe 1:

Rechenaufgaben

1. Es ist $\log_3(2) \approx 0,6$. Berechnen Sie ohne Taschenrechner!
(Beispiel: $\log_3(\frac{2}{3}) = \log_3(2) - \log_3(3) \approx 0,6 - 1 = -0,4$)

- $\log_3(18)$
- $\log_3(\frac{1}{6})$
- $\log_3(4 \cdot \sqrt{27})$

Lösung:

- $\log_3(18) = \log_3(2 \cdot 9) = \log_3(2) + \log_3(9)$
 $\approx 0,6 + 2 \approx 2,6$
- $\log_3(\frac{1}{6}) = \log_3(1) - \log_3(6)$
 $= 0 - \log_3(2 \cdot 3) = -(\log_3(2) + \log_3(3))$
 $\approx -(0,6 + 1) \approx -1,6$
- $\log_3(4 \cdot \sqrt{27}) = \log_3(2^2 \cdot 27^{\frac{1}{2}})$
 $= \log_3(2^2) + \log_3(27^{\frac{1}{2}})$
 $= 2 \log_3(2) + \frac{1}{2} \log_3(27)$
 $\approx 2 \cdot 0,6 + \frac{1}{2} \cdot 3 \approx 2,7$

2. Vereinfachen Sie

- $\log_{10}(2^5 \cdot 5^5)$
- $\log_v((v^2)^3 \cdot v^6 : (v^3)^4)$

Lösung:

- $\log_{10}(2^5 \cdot 5^5) = \log_{10}((2 \cdot 5)^5)$
 $= \log_{10}(10^5) = 5$
- $\log_v((v^2)^3 \cdot v^6 : (v^3)^4)$
 $= \log_v(v^{2 \cdot 3} \cdot v^6 : v^{3 \cdot 4})$
 $= \log_v(v^6 \cdot v^6 : v^{12})$
 $= \log_v(v^{12} : v^{12}) = \log_v(1) = 0$

3. Schreiben Sie folgenden Ausdruck als einen Logarithmusterm:

- $\log_r(2a^2) + \log_r(7b) - (\log_r(14c) + \log_r(b))$
- $\log_z(x^5) + \log_z(x^7)$
- $\log_4((l+k)^4) - \log_4(l^2 + 2lk + k^2)$

Lösung:

- $$\begin{aligned} & \log_r(2a^2) + \log_r(7b) - (\log_r(14c) + \log_r(b)) \\ &= \log_r(2a^2 \cdot 7b) - \log_r(14c \cdot b) \\ &= \log_r(14a^2b) - \log_r(14cb) \\ &= \log_r\left(\frac{14a^2b}{14cb}\right) = \log_r\left(\frac{a^2}{c}\right) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} & \log_z(x^5) + \log_z(x^7) = \log_z(x^5 \cdot x^7) \\ &= \log_z(x^{5+7}) \\ &= \log_z(x^{12}) = 12 \log_z(x) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} & \log_4((l+k)^4) - \log_4(l^2 + 2lk + k^2) \\ &= \log_4((l+k)^4) - \log_4((l+k)^2) \\ &= \log_4\left(\frac{(l+k)^4}{(l+k)^2}\right) = \log_4((l+k)^2) \\ &= 2 \log_4(l+k) \end{aligned}$$

4. Schreiben Sie als Summe bzw. Differenz mit einfachen Logarithmen.

- $$\log_z\left(\sqrt[3]{\frac{a}{g^3 \cdot h^6}}\right)$$
- $$\log_a\left(\frac{1}{(cu)^2}\right)$$

Lösung:

- $$\begin{aligned} & \log_z\left(\sqrt[3]{\frac{a}{g^3 \cdot h^6}}\right) = \log_z\left(\left(\frac{a}{g^3 \cdot h^6}\right)^{\frac{1}{3}}\right) \\ &= \frac{1}{3} \log_z\left(\frac{a}{g^3 \cdot h^6}\right) \\ &= \frac{1}{3}(\log_z(a) - \log_z(g^3 \cdot h^6)) \\ &= \frac{1}{3}(\log_z(a) - (\log_z(g^3) + \log_z(h^6))) \\ &= \frac{1}{3}(\log_z(a) - 3 \log_z(g) - 6 \log_z(h)) \\ &= \frac{1}{3} \log_z(a) - \log_z(g) - 2 \log_z(h) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} & \log_a\left(\frac{1}{(cu)^2}\right) = \log_a(1) - \log_a((cu)^2) \\ &= 0 - 2 \log_a(cu) = -2 \log_a(c) - 2 \log_a(u) \end{aligned}$$

Aufgabe 2:

Suchen Sie in der folgenden Umformung nach dem Fehler.

$$\log_{25}(5) = 2$$

Lösung:

Bei dieser Umformung wird vermutlich eine Fehlvorstellung des Logarithmierens deutlich. Es gilt $\log_a(b) = c \Leftrightarrow a^c = b$. Somit suchen wir diejenige Zahl x , für die gilt $25^x = 5$. Laut Definition ist dies $x = \frac{1}{2}$, da $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$ (laut Definition sind nur positive Zahlen zugelassen).

Aufgabe 3:

Begründungsaufgabe

1. Ein Studentin soll beweisen, dass $\log_{10}(7)$ keine rationale Zahl ist und gibt folgende Beweisschritte ohne Erläuterungen ab:

$$\begin{aligned}\log_{10}(7) &= \frac{p}{q} \Rightarrow 7 = 10^{\frac{p}{q}} \\ \Rightarrow 7^q &= 10^p \quad \text{Widerspruch!}\end{aligned}$$

Erläutern und vervollständigen Sie die Beweisführung!

2. Überprüfen und beweisen Sie analog, ob die folgenden Logarithmen aus $\mathbb{Q}$ sind oder nicht:

- $\log_5(30)$
- $\log_2(4)$
- $\log_{27}(1/3)$

Lösung:

1. Mit der Implikationskette

$$\begin{aligned}\log_{10}(7) &= \frac{p}{q} \Rightarrow 7 = 10^{\frac{p}{q}} \\ \Rightarrow 7^q &= (10^{\frac{p}{q}})^q = 10^{\frac{p}{q} \cdot q} = 10^p\end{aligned}$$

sieht man, dass wenn die Zahl $\log_{10}(7)$ rational ist, zwei ganze Zahlen p und q existieren müssen, die die Eigenschaft

$$7^q = 10^p$$

erfüllen. Jede natürliche Zahl besitzt eine Zerlegung in Primfaktoren, die eindeutig ist. Die Primfaktorzerlegung von 10 ist $2 \cdot 5$ und damit ist die Primfaktorzerlegung von 10^p durch $2^p \cdot 5^p$ gegeben, während die Primfaktorzerlegung der linken Zahl der Gleichung bereits durch 7^q gegeben ist. Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung folgt aus $7^q = 2^p \cdot 5^p$ die Tatsache, dass $p = q = 0$ ist. Also gibt es keine rationale Zahl $\frac{p}{q}$ mit $\log_{10}(7) = \frac{p}{q}$.

2.
 - $\log_5(30)$ ist irrational. Beweis analog zu 1.
 - $\log_2(4) = 2$ und somit ist $\log_2(4)$ rational.
 - $\log_{27}(1/3) = \log_{27}(1) - \log_{27}(3) = -\log_{27}(3) = -\log_{3^3}(3) = -\frac{1}{3}$ und somit ist $\log_{27}(1/3)$ ebenfalls rational.

Aufgabe 4:

Suchen Sie in der folgenden Umformung nach dem Fehler.

$$\log_a(x + 5y) = \log_a(x) \log_a(5y)$$

Lösung:

In diesem Fall wollte die oder der Lernende vermutlich das erste Logarithmengesetz anwenden, obwohl dies hier gar nicht möglich ist. Ursache: Durch Vertauschung der Operationen $+$ und $\cdot$ wurde der Einsatz des nun falschen Gesetzes möglich. Der Ausgangsterm kann so nicht vereinfacht werden.

Aufgabe 5:

Entwickeln Sie selbst:

1. Leiten Sie ein Logarithmengesetz für Doppelbrüche (also für $\log_a\left(\frac{b}{\frac{c}{d}}\right)$) her und beweisen Sie es!
2. Machen Sie das gleiche für folgenden Term: $\log_a\left(\sqrt[b]{c^d}\right)$!
3. Vergleichen Sie $\log_{10}(5)$ und $\log_{10}\left(\frac{1}{5}\right)$ sowie $\log_{10}(7)$ und $\log_{10}\left(\frac{1}{7}\right)$. Was stellen Sie fest? Formulieren Sie ein Gesetz und begründen Sie dieses!

Lösung:

1. $\log_a\left(\frac{b}{\frac{c}{d}}\right) = \log_a(b) - \log_a\left(\frac{c}{d}\right)$
 $= \log_a(b) - (\log_a(c) - \log_a(d))$
 $= \log_a(b) - \log_a(c) + \log_a(d)$
2. $\log_a(\sqrt[b]{c^d}) = \log_a((c^d)^{\frac{1}{b}}) = \log_a(c^{d \cdot \frac{1}{b}})$
 $= \log_a(c^{\frac{d}{b}}) = \frac{d}{b} \log_a(c)$
3. $\log_{10}(1/5) = \log_{10}(1) - \log_{10}(5)$
 $= 0 - \log_{10}(5) = -\log_{10}(5)$
 $\log_{10}(1/7) = \log_{10}(1) - \log_{10}(7)$
 $= 0 - \log_{10}(7) = -\log_{10}(7)$

Allgemein ergibt sich:

$$\log_a(1/b) = \log_a(1) - \log_a(b) = 0 - \log_a(b) \\ = -\log_a(b)$$

Aufgabe 6:

Suchen Sie in der folgenden Umformung nach dem Fehler.

$$\log_a(w) + \log_b(w) = \log_{a+b}(w)$$

Lösung:

Logarithmen können nur zusammengefasst werden, wenn die Basis gleich ist. Eine Addition der Basen wie in diesem Fall ist nicht zulässig und eine Umformung des linken Terms auch hier nicht möglich!

Aufgabe 7:

Berechnung von Stellen

1. Es gelte $\log_{10}(x) = 4,7$. Wie viele Stellen vor dem Komma hat die Zahl x ?
2. Ermitteln Sie begründet die Anzahl der Stellen von 6^{13} und 3^{721} !
Hinweis: Mit der $\log$ - Taste ihres Taschenrechners berechnen Sie dekadische Logarithmen!
3. Versuchen Sie, eine begründete Vorstellung von der Länge der Primzahl $2^{132049} - 1$ zu vermitteln!

Lösung:

Wir stellen drei Methoden vor, wie man die Anzahl der Vorkommastellen einer beliebigen Potenz ermitteln kann.

1. Nehmen wir an, wir suchen die Zahl x , für die $\log_{10}(x) = 5,9$ gilt. Es folgt nach der Definition des Logarithmus $x = 10^{5,9}$ und damit

$$10^5 \leq x < 10^6.$$

Da alle Zahlen im Intervall $[10^5; 10^6)$ genau 6 Stellen besitzen, gilt dies auch für die Zahl x . Betrachten wir die Zahl x mit der Eigenschaft $x = a^b$ mit allgemeiner Basis a und allgemeinen Exponenten b , so transformieren wir zunächst die Zahl x in eine Potenz mit Basis 10.

$$\begin{aligned} x &= a^b = 10^y \\ \Rightarrow y &= \log_{10}(a^b) = b \cdot \log_{10}(a). \end{aligned}$$

Also folgt mit obiger Überlegung aus $10^{n-1} \leq 10^y < 10^n$ mit $n \in \mathbb{N}$, dass die Zahl x genau n Stellen besitzt.

2. Betrachten wir exemplarisch die Zahl 2005. Diese Zahl hat offensichtlich vier Stellen, was sich durch folgende Umformung entdecken lässt:

$$2005 = 2,005 \cdot 10^3$$

Da die Zahl 10^3 vierstellig und $1 \leq 2,005 < 10$ ist, besitzt auch die Zahl 2005 vier Stellen. Allgemein gilt, dass $a \cdot 10^m$ genau $m + 1$ Vorkommastellen besitzt, falls $1 \leq a < 10$ ist. Um von einer beliebigen Zahl x die Anzahl der Vorkommastellen zu bestimmen, muss man also nur x als $a \cdot 10^m$ darstellen ($m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}, 1 \leq a < 10$). Wir schreiben zunächst x als 10^b ($b \in \mathbb{R}$). Dann teilen wir b in eine nichtnegative ganze Zahl m und eine reelle Zahl y auf, die kleiner ist als 1, also $b = m + y$. Für die Zahl $x = 10^b$ gilt dann mit $a := 10^y$

$$\begin{aligned} x &= 10^b = 10^{m+y} = 10^m \cdot 10^y = 10^y \cdot 10^m \\ &= a \cdot 10^m. \quad (1 \leq a < 10) \end{aligned}$$

Wegen $x = 10^b$ ist nach der Definition des Logarithmus $b = \log_{10}(x) = m + y$, also beträgt die Anzahl der Vorkommastellen n der Zahl x

$$n = m + 1 = \log_{10}(x) - y + 1.$$

3. Die mathematisch eleganteste Aussage ist die Folgende: Für die Anzahl der Vorkommastellen n einer reellen Zahl $x > 0$ gilt mit der Gaußklammer $[]$ ($[x]$ ist die größte, ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist)

$$n = [\log_{10}(x)] + 1.$$

Der Beweis dieser Aussage folgt mit

$$\begin{aligned} x &= 10^{\log_{10}(x)} \\ x &= 10^{y + [\log_{10}(x)]} \\ &\quad \text{mit geeignetem } y \quad (0 \leq y < 1) \\ x &= 10^y \cdot 10^{[\log_{10}(x)]} \\ &\quad (1 = 10^0 \leq 10^y < 10^1 = 10). \end{aligned}$$

Wegen $1 \leq 10^y < 10$ ist n gegeben durch $[\log_{10}(x)] + 1$.

Zweiter L"osungsweg:

Lösung:

1. Mit obiger Formel erhalten wir

$$\begin{aligned} n &= [\log_{10}(x)] + 1 = [\log_{10}(10^{4,7})] + 1 \\ &= [4,7] + 1 = 4 + 1 = 5. \end{aligned}$$

Das Ergebnis stimmt, denn aus $\log_{10}(x) = 4,7$ folgt nach der Definition des Logarithmus $x = 10^{4,7} \approx 50118,72$ und somit hat x genau 5 Vorkommastellen.

2. Es ergibt sich f"ur 6^{13}

$$\begin{aligned} n &= [\log_{10}(6^{13})] + 1 = [13 \log_{10}(6)] + 1 \\ &= [13 \cdot 0,77815125 \dots] + 1 \\ &= [10,11596626 \dots] + 1 = 10 + 1 = 11 \end{aligned}$$

und f"ur 3^{721}

$$\begin{aligned} n &= [\log_{10}(3^{721})] + 1 = [721 \log_{10}(3)] + 1 \\ &= [721 \cdot 0,477121255 \dots] + 1 \\ &= [344,0044247 \dots] + 1 = 344 + 1 = 345 \end{aligned}$$

3. Zunächst einmal lässt sich feststellen, dass die letzte Stelle von 2^n mit $n \in \mathbb{N}$ nie mit einer 0 endet, da 2^n nicht durch 5 und folglich auch nicht durch 10 teilbar ist. Also besitzt die Zahl $2^n - 1$ genau so viele Stellen wie die Zahl 2^n . Somit betrachten wir statt $2^{132049} - 1$ die Zahl 2^{132049} , die nach unseren Vor"uberlegungen dieselbe Stellenanzahl besitzt.

$$\begin{aligned} n &= [\log_{10}(2^{132049})] + 1 \\ &= [132049 \log_{10}(2)] + 1 \\ &= [132049 \cdot 0,301029996 \dots] + 1 \\ &= [39750,7099 \dots] + 1 = 39750 + 1 \\ &= 39751 \end{aligned}$$

Aufgabe 8:

Fehlersuche

Suchen Sie bei den folgenden Umformungen nach den Fehlern und korrigieren Sie sie gegebenenfalls!

1. $\log_g\left(\frac{4a}{-d}\right) = \log_g(4a) - \log_g(d)$
2. $\log_z\left(b \cdot \left(4b - b \cdot \frac{28}{7}\right)\right) = \log_z(b) + \log_z\left(4b - b \cdot \frac{28}{7}\right)$
3. $((2h)^4)^5 = 5(2h)^4$
4. $\log_{65}(\sqrt[5]{k^9}) = \frac{5}{9} \cdot \log_{65}(k)$

Lösung:

1. Eine richtige Anwendung des zweiten Logarithmengesetzes (**L2**) bringt $\log_g\left(\frac{4a}{-d}\right) = \log_g(4a) - \log_g(-d)$
2. Das Rechengesetz (**L1**) wurde an dieser Stelle richtig angewendet. Betrachten wir allerdings das Argument des linken Terms genauer, so ergibt sich $b \cdot \left(4b - b \cdot \frac{28}{7}\right) = b \cdot (4b - 4b) = b \cdot 0 = 0$. Der Logarithmus ist aber f"ur die Stelle 0 nicht definiert.
3. Hier wurde das dritte Potenzgesetz mit dem dritten Logarithmusgesetz vertauscht. Die richtige L"osung folgt mit (**P3**) und lautet: $((2h)^4)^5 = (2h)^{4 \cdot 5} = (2h)^{20}$
4. An dieser Stelle liegt der Fehler bei der Termumformung von $\sqrt[5]{k^9}$ in $k^{\frac{5}{9}}$. Richtig ist aber: $\log_{65}(\sqrt[5]{k^9}) = \log_{65}((k^9)^{\frac{1}{5}}) = \log_{65}(k^{\frac{9}{5}}) = \frac{9}{5} \cdot \log_{65}(k)$

Aufgabe 9:

Suchen Sie in der folgenden Umformung nach dem Fehler.

$$\log_x(-m) = -\log_x(m)$$

Lösung:

Auch hier wurde eine Regel angewandt, die falsch ist, da Faktoren auf diese Weise nicht aus der Klammer gezogen werden d"urfen. Zudem gilt zwar f"ur $a, b, c > 0$ nach dem ersten Potenzgesetz $\log_c(ab) = \log_c(a) + \log_c(b)$, allerdings ist der Logarithmus f"ur negative Zahlen nicht definiert, sodass $\log_x(-m) = \log_x(-1 \cdot m)$ auch auf diesem Weg nicht auseinandergezogen werden darf! Somit gibt es in diesem Fall erneut keine Vereinfachungsm"oglichkeit.

Aufgabe 10:

Suchen Sie in der folgenden Umformung nach dem Fehler.

$$a^{\log_a(-1)} = -1$$

Lösung:

Zwar gilt für $a, c > 0$: $a^{\log_a(c)} = c$, allerdings ist der Logarithmus einer negativen Zahl nicht definiert, sodass erneut eine Vereinfachung nicht möglich ist.

Aufgabe 11:

Suchen Sie in der folgenden Umformung nach dem Fehler.

$$c = x^2 \Leftrightarrow x = \log_2(c)$$

Lösung:

Die Ursache für diesen Fehler liegt in der Verwechslung der Gegenoperationen und damit vermutlich in einer Fehlvorstellung bezüglich des Logarithmierens. Es wurde $c = 2^x$ statt $c = x^2$ gelesen, daher wurde fälschlicherweise der Logarithmus angewandt. Die Gegenoperation zum Quadrieren ist das Wurzelziehen, nicht das Logarithmieren. Einfach gesagt: Mit Hilfe des Wurzelziehens reduziert man eine Potenz auf die Basis, mithilfe des Logarithmierens errechnet man ihren Exponenten.

$$|x| = \sqrt{c}$$

Anwendung

Beispiel 1:

Termvereinfachungen

Wir wenden nun die Definitionen und Gesetze von Potenzen und Logarithmen an einigen einfachen Beispielen an. Folgende Ausdrücke werden wir, ohne einen Taschenrechner zu verwenden, berechnen.

1. $\log_4(64)$
2. $\log_6(2) + \log_6(3)$
3. $\log_2(4^{25})$
4. $\log_2(\sqrt[3]{2})$
5. $\log_9(162) - \log_9(2)$

Lösung:

1. Nach der Definition des Logarithmus ist der Exponent x gesucht, für den $4^x = 64$ gilt. Also folgt $\log_4(64) = 3$.
2. Mit (**L1**) erhalten wir $\log_6(2) + \log_6(3) = \log_6(2 \cdot 3) = \log_6(6) = 1$.
3. Mit (**L3**) ergibt sich $\log_2(4^{25}) = 25 \cdot \log_2(4) = 25 \cdot 2 = 50$.
4. Mit der Definition des Logarithmus erhalten wir $\log_2(\sqrt[3]{2}) = \log_2(2^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3}$.
5. Mit Hilfe von (**L2**) bekommen wir

$$\log_9(162) - \log_9(2) = \log_9\left(\frac{162}{2}\right)$$

$$= \log_9(81) = 2.$$

Beispiel 2:

Lösen von Gleichungen

Anhand einiger Beispiele werden wir nun sehen, wie die erlernten Definitionen und Gesetze angewendet werden können, um Gleichungen zu lösen.

Sei $a > 1$ und $x > 0$.

1. $\log_2(x) = 3$
2. $\log_{a-1}(9) = 2$
3. $\log_2(\sqrt{x}) = 2$
4. $2 \cdot \log_{10}(x) - \log_{10}(4x - 4) = 0$

Lösung:

1. Nach der Definition des Logarithmus ergibt sich $\log_2(x) = 3 \Rightarrow x = 2^3 = 8$.

2. Gem" a"s der Definition des Logarithmus folgt aus $\log_{a-1}(9) = 2$ die Gleichung $(a-1)^2 = 9$. Diese quadratische Gleichung besitzt die zwei L"sungen $a = 4$ und $a = -2$, wobei die letztere wegf"allt, da nach Definition des Logarithmus $a-1 > 0$ sein muss.
3. Mit (L3) folgt aus $\log_2(\sqrt{x}) = \log_2(x^{\frac{1}{2}}) = 2$ die Gleichung $\frac{1}{2} \log_2(x) = 2$. Multiplikation mit 2 bringt $\log_2(x) = 4$ und somit $x = 2^4 = 16$.
4. Da der Logarithmus nur f"ur positive Zahlen erkl"art ist, muss zun"achst $x > 0$ und $4x-4 = 4(x-1) > 0$ sein, also $x > 1$. Nun formen wir mit den Logarithmusregeln um:
 $\log_{10}(x^2) - \log_{10}(4x-4)$
 $= \log_{10}\left(\frac{x^2}{4x-4}\right) = 0.$

Wir erheben beide Seiten in die Potenz zur Basis 10:

$$\frac{x^2}{4x-4} = 10^0 = 1.$$

Dies f"uhrt auf die quadratische Gleichung:

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

bzw.

$$(x-2)^2 = 0$$

mit der L"sung

$$x = 2.$$

Beispiel 3:

Rechenschieber

Als es noch keine Taschenrechner gab, benutzte man im Schulunterricht und in der Praxis Rechenschieber. Rechenschiebern liegt das Rechnen mit Logarithmen zugrunde. Wir machen das Prinzip an der Multiplikation klar.

Es gilt:

$$2 \cdot 3 = 10^{\log_{10}(2)} \cdot 10^{\log_{10}(3)} = 10^{\log_{10}(2) + \log_{10}(3)} = 10^{\log_{10}(2 \cdot 3)} = 10^{\log_{10}(6)} = 6.$$

Die Multiplikation $2 \cdot 3$ wird auf dem Rechenschieber durch die Addition der Logarithmen $\log_{10}(2) + \log_{10}(3)$ simuliert. (Man addiert, indem man St"abe aneinander legt).

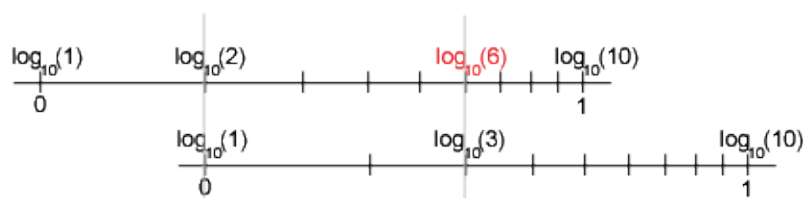


Bild 1 Das Prinzip des Rechenschiebers am Beispiel der Multiplikation von 2 und 3.

Bei der Multiplikation zweier beliebiger Zahlen spielen nur Mantissen (Vorfaktoren von Zehnerpotenzen) eine Rolle:

$$2000 \cdot 0,3 = 2 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-1} = 2 \cdot 3 \cdot 10^{3-1} = 6 \cdot 10^2 = 600.$$

Wir m"ussen also wie vorhin nur die Multiplikation der Mantissen 2 und 3 bewerkstelligen. Das machen wir mit dem Rechenschieber. Das Komma wird durch eigene, die mechanische Arbeit

begleitende, Kopfrechnung gesetzt. Auf dem Rechenschieber wird eine logarithmische Skala der Zahlen 1 bis 10 abgetragen. Dass wir nur die Mantissen brauchen ist sehr praktisch, sonst wären Rechenschieber unendlich lang.

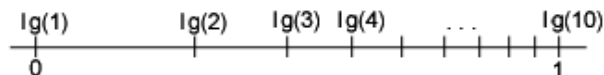


Bild 2 Logarithmische Skala: Die Logarithmusfunktion ist umkehrbar eindeutig. Auf einer Skala von 0 bis 1 markieren wir die Logarithmen der Zahlen 1 bis 10.

Beispiel 4:

Der pH-Wert

Der pH-Wert ist definiert als der negative dekadische Logarithmus der Wasserstoffionenkonzentration

$$\text{pH} := -\log_{10} (H_3O^+).$$

Er ist ein Maß für die Stärke der sauren bzw. basischen Wirkung einer Lösung. Der Name leitet sich von **p**ondus **H**ydrogenii (lat. pondus = Gewicht; hydrogenium = Wasserstoff) ab. Im natürlichen System liegt der pH-Wert im allgemeinen zwischen 0 und 14, wobei ein niedriger Wert auf einen sauren Charakter und ein hoher Wert auf einen basischen Charakter hindeutet. Der Wert einer neutralen Lösung liegt bei 7. In der folgenden Tabelle werden einige typische Säuren und Basen zu ihren pH-Werten zugeordnet.

0 - 2	3 - 4	5 - 6	7	8 - 9	10 - 11	12 - 14
stark sauer			neutral			stark basisch
Schwefelsäure, Batteriesäure, Essigessenz, Sanitärreiniger	Zitronensaft, Magensaft, Seen in Schweden, Saurer Regen	Essigsäure, Regenwasser, Lakritz, Obst	Kochsalz- lösung, Neutralseife, Zuckerlösung	Speichel, Seifenlösung, Mineralwasser, Blut	Gülle, Ammoniak, Fensterputz mittel	Zement, Kalkwasser, Rohrfrei, Domestos

Nehmen wir an, wir haben eine Lösung gegeben, bei der sich 0,01 H_3O^+ -Ionen in 1 Mol wässriger Flüssigkeit befinden. Der pH-Wert dieser Lösung beträgt demnach

$$\text{pH} = -\log_{10}(0,01) = -\log_{10}(10^{-2}) = -(-2) = 2.$$

Es handelt sich also bei der Lösung um eine starke Säure.