

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn

FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Hinführung

Um Gleichungen zu lösen, benötigt man Umkehroperationen, wie man an den folgenden Beispielen ($x \in \mathbb{R}, x > 0$) erkennen kann.

- $x - 15 = 0 \quad | +15 \quad \Rightarrow \quad x = 15$
- $3 \cdot x = 15 \quad | :3 \quad \Rightarrow \quad x = 5$
- $x^2 = 25 \quad | \sqrt{} \quad \Rightarrow \quad x = 5$

Doch wie lautet nun die Lösung der Gleichung $5^x = 125$ und durch welche Umkehroperation (zum Potenzieren) erh"alt man sie? Diese ist der Logarithmus. Man sucht die Zahl x , für die $5^x = 125$ gilt und bezeichnet x als den Logarithmus von 125 zur Basis 5. Nach Definition des Logarithmus gilt also

$$5^x = 125 \quad \Rightarrow \quad x = \log_5(125) = 3.$$

Das Ergebnis ist somit die Zahl 3, da man die Basis 5 zur dritten Potenz erheben muss, um das Ergebnis 125 zu bekommen ($5^3 = 125$). So folgt z.B. aus $a^1 = a$ die Tatsache, dass $\log_a(a) = 1$ ist für $a > 0, a \neq 1$.

Wir stellen uns nun die Frage, ob man den Logarithmus von einem Produkt zweier Zahlen vereinfacht darstellen kann. Dazu untersuchen wir das Produkt $9 \cdot 27$. Betrachten wir die Gleichungen $3^2 = 9$ und $3^3 = 27$, so erhalten wir mit der Definition des Logarithmus

$$\begin{aligned} 3^2 = 9 &\Rightarrow 2 = \log_3(9) \\ 3^3 = 27 &\Rightarrow 3 = \log_3(27) \end{aligned}$$

Ausgehend von $9 \cdot 27$ verwenden wir nun obige logarithmische Darstellungen der Exponenten 2 und 3, sowie das erste Potenzgesetz. Es ergibt sich

$$9 \cdot 27 = 3^2 \cdot 3^3 = 3^{\log_3(9)} \cdot 3^{\log_3(27)} = 3^{\log_3(9) + \log_3(27)}.$$

Des Weiteren gilt nach Definition des Logarithmus

$$9 \cdot 27 = 3^{\log_3(9 \cdot 27)}.$$

Vergleicht man die Exponenten der rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen, so bekommt man schlie"slich

$$\log_3(9) + \log_3(27) = \log_3(9 \cdot 27).$$

Versuchen Sie nun bei folgenden Gleichungen die fehlenden Operationen anzugeben. (Hinweis: Bei der ersten Gleichung gibt es zwei Möglichkeiten.)

- $\log_2(8) \square \log_2(4) = \log_2(8 \square 4)$
- $\log_2(4^3) = 3 \square \log_2(4)$

Formulieren Sie, unter Berücksichtigung obiger Beispiele, allgemeine Gesetze für Logarithmen (ähnlich wie bei den Potenzgesetzen). "Überprüfen Sie ihre Vermutungen an weiteren Beispielen.

Lösung:

Es gilt

- $\log_2(8) + \log_2(4) = \log_2(8 \cdot 4)$ oder $\log_2(8) - \log_2(4) = \log_2(8 / 4)$
- $\log_2(4^3) = 3 \cdot \log_2(4)$