

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn

FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Anwendung

Beispiel 1:

Termvereinfachungen

Wir wenden nun die Definitionen und Gesetze von Potenzen und Logarithmen an einigen einfachen Beispielen an. Folgende Ausdrücke werden wir, ohne einen Taschenrechner zu verwenden, berechnen.

1. $\log_4(64)$
2. $\log_6(2) + \log_6(3)$
3. $\log_2(4^{25})$
4. $\log_2(\sqrt[3]{2})$
5. $\log_9(162) - \log_9(2)$

Lösung:

1. Nach der Definition des Logarithmus ist der Exponent x gesucht, für den $4^x = 64$ gilt. Also folgt $\log_4(64) = 3$.
2. Mit (**L1**) erhalten wir $\log_6(2) + \log_6(3) = \log_6(2 \cdot 3) = \log_6(6) = 1$.
3. Mit (**L3**) ergibt sich $\log_2(4^{25}) = 25 \cdot \log_2(4) = 25 \cdot 2 = 50$.
4. Mit der Definition des Logarithmus erhalten wir $\log_2(\sqrt[3]{2}) = \log_2(2^{\frac{1}{3}}) = \frac{1}{3}$.
5. Mit Hilfe von (**L2**) bekommen wir

$$\log_9(162) - \log_9(2) = \log_9\left(\frac{162}{2}\right)$$

$$= \log_9(81) = 2.$$

Beispiel 2:

Lösen von Gleichungen

Anhand einiger Beispiele werden wir nun sehen, wie die erlernten Definitionen und Gesetze angewendet werden können, um Gleichungen zu lösen.

Sei $a > 1$ und $x > 0$.

1. $\log_2(x) = 3$
2. $\log_{a-1}(9) = 2$
3. $\log_2(\sqrt{x}) = 2$
4. $2 \cdot \log_{10}(x) - \log_{10}(4x - 4) = 0$

Lösung:

1. Nach der Definition des Logarithmus ergibt sich $\log_2(x) = 3 \Rightarrow x = 2^3 = 8$.

2. Gem" a"s der Definition des Logarithmus folgt aus $\log_{a-1}(9) = 2$ die Gleichung $(a-1)^2 = 9$. Diese quadratische Gleichung besitzt die zwei L"sungen $a = 4$ und $a = -2$, wobei die letztere wegf"allt, da nach Definition des Logarithmus $a-1 > 0$ sein muss.
3. Mit (L3) folgt aus $\log_2(\sqrt{x}) = \log_2(x^{\frac{1}{2}}) = 2$ die Gleichung $\frac{1}{2} \log_2(x) = 2$. Multiplikation mit 2 bringt $\log_2(x) = 4$ und somit $x = 2^4 = 16$.
4. Da der Logarithmus nur f"ur positive Zahlen erkl"art ist, muss zun"achst $x > 0$ und $4x-4 = 4(x-1) > 0$ sein, also $x > 1$. Nun formen wir mit den Logarithmusregeln um:
 $\log_{10}(x^2) - \log_{10}(4x-4)$
 $= \log_{10}\left(\frac{x^2}{4x-4}\right) = 0.$

Wir erheben beide Seiten in die Potenz zur Basis 10:

$$\frac{x^2}{4x-4} = 10^0 = 1.$$

Dies f"uhrt auf die quadratische Gleichung:

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

bzw.

$$(x-2)^2 = 0$$

mit der L"sung

$$x = 2.$$

Beispiel 3:

Rechenschieber

Als es noch keine Taschenrechner gab, benutzte man im Schulunterricht und in der Praxis Rechenschieber. Rechenschiebern liegt das Rechnen mit Logarithmen zugrunde. Wir machen das Prinzip an der Multiplikation klar.

Es gilt:

$$2 \cdot 3 = 10^{\log_{10}(2)} \cdot 10^{\log_{10}(3)} = 10^{\log_{10}(2) + \log_{10}(3)} = 10^{\log_{10}(2 \cdot 3)} = 10^{\log_{10}(6)} = 6.$$

Die Multiplikation $2 \cdot 3$ wird auf dem Rechenschieber durch die Addition der Logarithmen $\log_{10}(2) + \log_{10}(3)$ simuliert. (Man addiert, indem man St"abe aneinander legt).

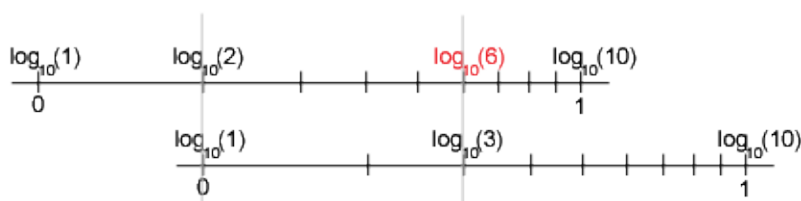


Bild 1 Das Prinzip des Rechenschiebers am Beispiel der Multiplikation von 2 und 3.

Bei der Multiplikation zweier beliebiger Zahlen spielen nur Mantissen (Vorfaktoren von Zehnerpotenzen) eine Rolle:

$$2000 \cdot 0,3 = 2 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 10^{-1} = 2 \cdot 3 \cdot 10^{3-1} = 6 \cdot 10^2 = 600.$$

Wir m"ussen also wie vorhin nur die Multiplikation der Mantissen 2 und 3 bewerkstelligen. Das machen wir mit dem Rechenschieber. Das Komma wird durch eigene, die mechanische Arbeit

begleitende, Kopfrechnung gesetzt. Auf dem Rechenschieber wird eine logarithmische Skala der Zahlen 1 bis 10 abgetragen. Dass wir nur die Mantissen brauchen ist sehr praktisch, sonst wären Rechenschieber unendlich lang.

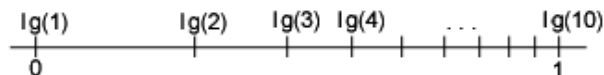


Bild 2 Logarithmische Skala: Die Logarithmusfunktion ist umkehrbar eindeutig. Auf einer Skala von 0 bis 1 markieren wir die Logarithmen der Zahlen 1 bis 10.

Beispiel 4:

Der pH-Wert

Der pH-Wert ist definiert als der negative dekadische Logarithmus der Wasserstoffionenkonzentration

$$\text{pH} := -\log_{10} (H_3O^+).$$

Er ist ein Maß für die Stärke der sauren bzw. basischen Wirkung einer Lösung. Der Name leitet sich von **p**ondus **H**ydrogenii (lat. pondus = Gewicht; hydrogenium = Wasserstoff) ab. Im natürlichen System liegt der pH-Wert im allgemeinen zwischen 0 und 14, wobei ein niedriger Wert auf einen sauren Charakter und ein hoher Wert auf einen basischen Charakter hindeutet. Der Wert einer neutralen Lösung liegt bei 7. In der folgenden Tabelle werden einige typische Säuren und Basen zu ihren pH-Werten zugeordnet.

0 - 2	3 - 4	5 - 6	7	8 - 9	10 - 11	12 - 14
stark sauer			neutral			stark basisch
Schwefelsäure, Batteriesäure, Essigessenz, Sanitärreiniger	Zitronensaft, Magensaft, Seen in Schweden, Saurer Regen	Essigsäure, Regenwasser, Lakritz, Obst	Kochsalz- lösung, Neutralseife, Zuckerlösung	Speichel, Seifenlösung, Mineralwasser, Blut	Gülle, Ammoniak, Fensterputz mittel	Zement, Kalkwasser, Rohrfrei, Domestos

Nehmen wir an, wir haben eine Lösung gegeben, bei der sich 0,01 H_3O^+ -Ionen in 1 Mol wässriger Flüssigkeit befinden. Der pH-Wert dieser Lösung beträgt demnach

$$\text{pH} = -\log_{10}(0,01) = -\log_{10}(10^{-2}) = -(-2) = 2.$$

Es handelt sich also bei der Lösung um eine starke Säure.