UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Virtuelles Eingangstutorium
studiVEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn
FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Virtuelles Eingangstutorium
VEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

khdm
kompetenzzentrum
hochschuldidaktik
mathematik

LE 5 - Elementare Funktionen

5.0 Intro Funktionen

Im Folgenden finden Sie die Abschnitte:

Einstiegsaufgabe ..... S. 1
Funktionsbegriff ..... S. 9
Wichtige Funktionen ..... S. 16
Kurvendiskussion ..... S. 25
Ausblick ..... S. 28

Willkommen!

In der Kurzversion dieser Lerneinheit werden wir uns mit folgenden Themen beschäftigen:

- Funktionsbegriff
- wichtige Funktionen
- Kurvendiskussion

Die mathematischen Inhalte in diesem Kurs sind in eine Einstiegsaufgabe eingebettet.

Einstiegsaufgabe

Eine Programmiererin möchte eine kleine Animation erstellen: Ein blaues Auto soll von links nach rechts 6 cm weit über den Bildschirm fahren. Das Auto soll sich in konstantem Tempo bewegen und es soll 2 min dauern, bis es auf der rechten Seite ankommt. Es fährt also sehr langsam.

Preview fehlt:
`h5p/blaues_auto_animation`

Video 1 *(nur in digitaler Version)*

Wie muss die Funktion aussehen, die die Position des Autos in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt?

Um im Programm Variablen anzulegen, muss die Programmiererin sich als erstes überlegen, in welchem Bereich seine Variable x für die Zeit und seine Variable y für den Ort des Autos liegen müssen und welche Art von Variable er dafür braucht.

Aufgabe 1:
Sie möchte die Zeit, während der sich das Auto bewegt, in seinem Programm in Sekunden angeben. Sie wählt dazu eine Zahlenvariable x. Ein Wert wie $x = 2$ wird dann im Sachkontext als 2 s (s steht für *Sekunden*) interpretiert.

Der Startwert liegt also bei $x = 0$. Welchen Zahlenwert kann x maximal annehmen (also zu dem Zeitpunkt, wenn das Auto die ganzen 6 cm zurückgelegt hat)? ?

Lösung:
Das Auto soll sich in einem Zeitraum von 2 min = 120 s über den Bildschirm bewegen, also ist $x = 120$ der Maximalwert.

Auch für die Variable y, die die Position des Autos beschreibt, muss er Minimal- und Maximalwert kennen. Sie möchte die Position in mm berechnen und legt fest, dass der Startpunkt auf der linken Seite des Bildschirms mit $y = 0$ bezeichnet werden soll.

Wie groß kann die Zahlenvariable y (die die Position in mm beschreibt) hier maximal werden?

?

Lösung:
Das Auto befindet sich zunächst ganz auf der linken Seite, also am Ort $y = 0$. Es soll sich insgesamt um 6 cm bewegen, also kann die Orts-Variable maximal den Wert 6 cm, also 60 mm, annehmen. Also ist $y = 60$ der Maximalwert.

In der Mathematik gibt man die Menge möglicher Werte für Variablen stets an. Hier kann man also schreiben:

$0 \leq x \leq$?

$0 \leq y \leq$?

Lösung:

Da x zwischen 0 und 120 variiert, schreibt man $0 \leq x \leq 120$.

y variiert zwischen dem Minimalwert 0 und dem Maximalwert 60, sodass man $0 \leq y \leq 60$ schreibt.

Die Werte, die die Zeit-Variable annimmt, bilden hier die **Definitionsmenge**.

Die Werte, die die Orts-Variable (in Abhängigkeit von der Zeit-Variablen) annimmt, bilden die **Wertemenge**.

Auch wenn man in der Realität nur endliche Dezimalzahlen messen kann und ein üblicher Computer Zahlen auch nur als endliche Dezimalzahlen mit z.B. 14 Stellen repräsentiert, betrachtet man in der Mathematik in der Regel Teilintervalle der reellen Zahlen als Definitions- und Wertemenge. Man schreibt daher:

Definitionsmenge: $\{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x \leq 120\} = [0; 120]$ und

Wertemenge: $\{y \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq y \leq 60\} = [0; 60]$,

wobei der Ausdruck auf der rechten Seite eine Kurzschreibweise darstellt: Die eckigen Klammern bezeichnen ein geschlossenes Intervall in der Menge der reellen Zahlen.

Weitere Infos:

Funktionsbegriff

Aufgabentext noch einmal ansehen *(Aufklapptext)*

> Eine Programmiererin möchte eine Animation programmieren, bei der ein blaues Auto innerhalb von 120 s gleichmäßig von der Startposition aus 60 mm weit fährt.

Als nächstes muss die Programmiererin eine Funktionsvorschrift finden, die den Ort des blauen Autos in Abhängigkeit von der Zeit in mathematischer Sprache ausdrückt, denn nur die kann der Computer interpretieren.

Das Auto soll sich gleichmäßig vorwärts bewegen, d.h. in 1 s wird immer ein gleichlanger Weg zurückgelegt: Die Ortsvariable y muss linear mit der Zeit x zunehmen. Es kommt deswegen nur die Funktionsvorschrift

$$y = m \cdot x + b$$

in Frage.

Dies ist die Funktionsvorschrift einer linearen Funktion. Sie muss also die Steigung m und den Achsenabschnitt b bestimmen.

Start- und Endpunkt sind ihm bekannt:

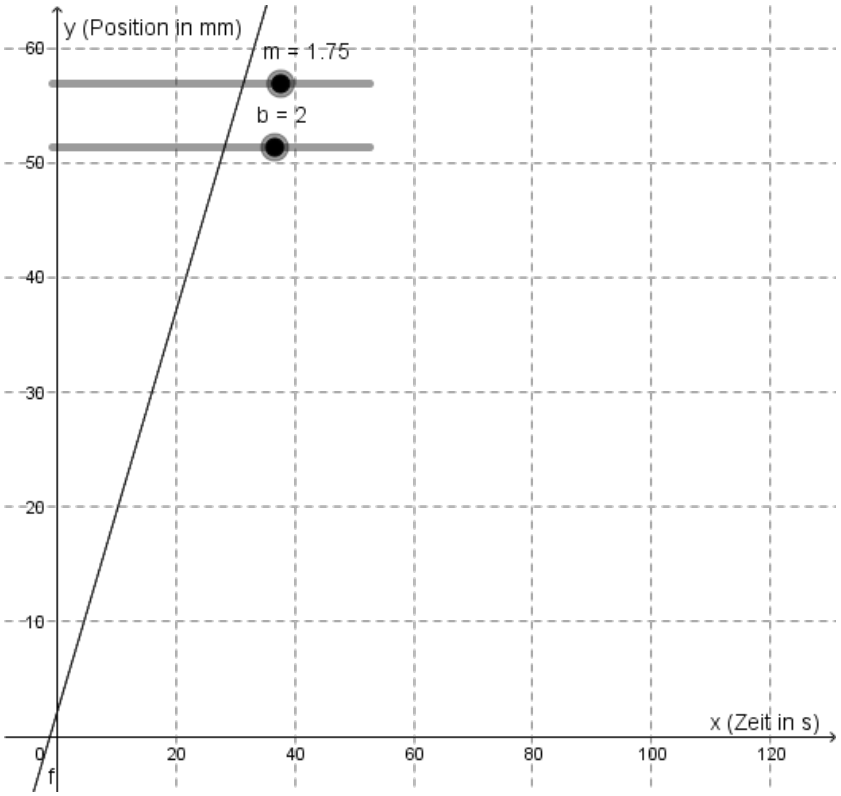
Zeit x in s	Position y in mm
0	0
120	60

Aufgabe 2:
Versuchen Sie, die Steigung m und den Achsenabschnitt b mithilfe des Applets so zu wählen, dass der Graph die in der Wertetabelle festgelegten Punkte durchläuft.
Welche Werte erhalten Sie für m und b?
Geben Sie m als Kommazahl ein.

$m =$?

$b =$?

Lösung:
Durch Ablesen erhält man: $b = 0$ und $m = 0.5$.



Interaktion 1 *(nur in digitaler Version)*

Aufgabentext noch einmal ansehen *(Aufklapptext)*

> Eine Programmiererin möchte eine Animation programmieren, bei der ein blaues Auto innerhalb von 120 s gleichmäßig von der Startposition aus 60 mm weit fährt.

Durch Ablesen hat sie also folgende Funktionsvorschrift ermittelt:

$y = 0,5 \cdot x + 0$ für alle $x \in [0; 120]$.

Man schreibt auch $f : D \to \mathbb{R}$ mit $y = f(x) = 0,5 \cdot x$, wobei $D = [0; 120]$ die Definitionsmenge ist. Die Funktion f beschreibt den Zusammenhang zwischen der Zeit x und der zurückgelegten Strecke y über den Ausdruck $y = 0,5x$. Dabei können nur Zeiten betrachtet werden, für die x in D, hier also x in $[0; 120]$ liegt. Der Ort $y \in \mathbb{R}$ wird durch eine reelle Zahl beschrieben, für die es keine Einschränkung gibt.

Aufgabe 3:
Welche Position y wird das blaue Auto also nach $x = 28$ s haben?

$y =$?

Lösung:
Durch Einsetzen des x-Wertes erhält man: $y = 0,5 \cdot 28 = 14$.
Das Auto wird sich also 14 mm weit nach rechts bewegt haben.

Weitere Infos:
Funktionsbegriff

Aufgabentext noch einmal ansehen *(Aufklapptext)*

> Eine Programmiererin möchte eine Animation programmieren, bei der ein blaues Auto innerhalb von 120 s gleichmäßig von der Startposition aus 60 mm weit fährt.

Die Programmiererin möchte die Animation nun interessanter gestalten, indem er ein rotes Auto hinzufügt. Das rote Auto soll langsamer losfahren und dadurch zunächst hinter dem blauen zurückliegen. Im Laufe der Zeit soll es das blaue Auto aber überholen und schließlich als Erstes an der „Ziellinie“ bei 60 mm ankommen. Insgesamt soll das rote Auto 100 s brauchen, um die 60 mm lange Strecke zurückzulegen.

Aufgabe 4:
Welcher der folgenden Graphen zeigt eine Funktion, die den gewünschten Ort des roten Autos in Abhängigkeit der Zeit beschreiben könnte?

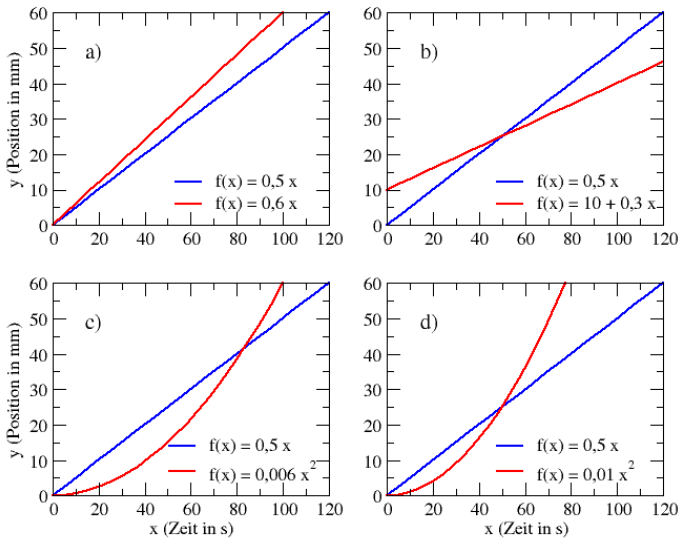


Bild 1

- ☐ Graph a)
- ☐ Graph b)
- ☐ Graph c)
- ☐ Graph d)

Lösung:
Graph c) ist richtig. Eine ausführliche Erklärung finden Sie im Folgenden.

Weitere Infos:
Wichtige Funktionen

Im Folgenden wird nachgerechnet, dass die Funktion $f : [0; 120] \to \mathbb{R}$ mit der Funktionsvorschrift $f(x) = 0,006 \cdot x^2$ tatsächlich alle Anforderungen erfüllt.

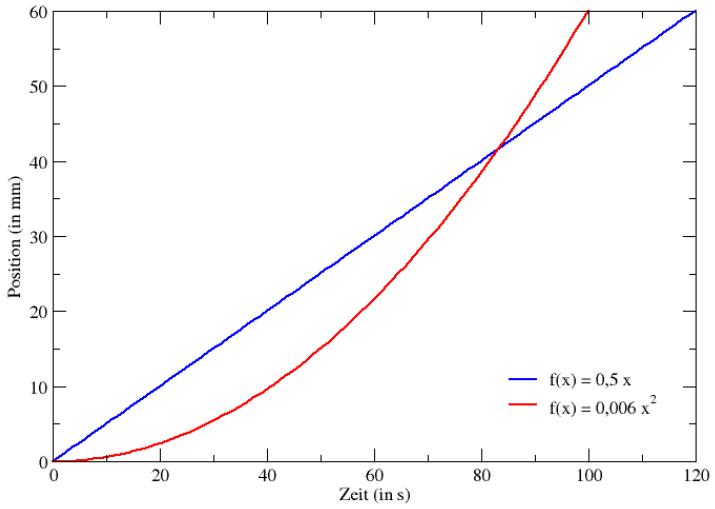


Bild 2

Wir überprüfen zuerst mögliche Nullstellen.

Wir suchen also eine Stelle x_0 mit $f(x_0) = 0$, d.h. $0,006 \cdot x_0^2 = 0$. Das gilt genau dann, wenn $x_0 = 0$ ist, denn ein Produkt wird immer genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist. Somit ist $x_0 = 0$ und es gibt keine weiteren Nullstellen.

Info 1: (Hinweis zur Variablenverwendung)

Man verwendet die Variable x oft, um eine Funktionsvorschrift zu formulieren. x variiert dabei in der Definitionsmenge, hat also keinen festen Wert.

Mit x_0, x_1, ..., x_n werden dagegen meist bestimmte (wenn auch häufig unbekannte) Zahlen bezeichnet.

Dann rechnen wir nach, ob das rote Auto tatsächlich nach 100 s ankommt, also ob sich für $x_1 = 100$ tatsächlich $f(x_1) = 60$ ergibt.

Dadurch erhalten wir:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(100) &= 0,006 \cdot 100^2 \\ &= 0,006 \cdot 10000 \\ &= \frac{6}{1000} \cdot 10000 \\ &= 6 \cdot 10 \\ &= 60\,. \end{aligned}$$

Es ergibt sich also wie gewünscht $f(100) = 60$.

Anschließend überprüfen wir, ob es einen Punkt gibt, an dem die beiden Autos gleichauf liegen, also zum gleichen Zeitpunkt x die gleiche Position y einnehmen.

Aufgabe 5:
Wie findet man diesen Punkt im Graphen?

- ☐ Gar nicht, man kann ihn nur rechnerisch bestimmen.
- ☐ Er ist dadurch erkennbar, dass die beiden Kurven dort die gleiche Steigung haben.
- ☐ Er entspricht einem Schnittpunkt oder Berührungspunkt der beiden Kurven.

Lösung:
Die beiden Autos liegen gleichauf. Das bedeutet, dass sie sich zum gleichen Zeitpunkt x an der gleichen Position y befinden. Hier müssen also beide Kurven an der gleichen Stelle x_2 den gleichen Funktionswert $f(x_2)$ haben. Das ist nur an Schnittpunkten und an Berührungspunkten der Fall.

Als letztes ermitteln wir, ob das rote Auto vor dem Überholvorgang hinter dem blauen zurückliegt und später vor dem blauen Auto liegt.

Aufgabe 6:
Was muss gelten, damit das rote Auto vor dem Überholvorgang hinter dem blauen zurückliegt, aber vor dem blauen Auto ankommt?

- ☐ Beide Kurven müssen Geraden sein und die Steigung der roten Gerade muss größer sein als die der blauen.
- ☐ Links vom Schnittpunkt muss die rote Kurve geringere Funktionswerte annehmen als die blaue, rechts vom Schnittpunkt muss sie höhere Funktionswerte annehmen als die blaue Kurve.
- ☐ Die blaue Kurve muss zunächst eine geringere Steigung haben als die rote Kurve und später eine größere Steigung als die rote Kurve.

Lösung:
Damit das rote Auto vor dem Überholvorgang hinter dem blauen zurückliegt, muss seine Position in diesem Zeitintervall stets geringere Werte annehmen als die Position des blauen Autos. Da Funktionswert y die Position der Autos angibt, muss also die rote Kurve in diesem Bereich kleinere Funktionswerte aufweisen als die blaue Kurve.

Nach dem Überholvorgang, also nach dem Schnittpunkt der Kurven, soll das rote Auto vorne liegen. Das heißt, dass seine Position y in diesem Bereich größere Werte annehmen muss. Also muss die rote Kurve in diesem Bereich größere Funktionswerte y annehmen als die blaue Kurve.

Die ausgewählte Funktion erfüllt also alle Anforderungen.

Weitere Infos:
Kurvendiskussion

Was Sie in der ausführlichen Lerneinheit dieses Wissensbereichs erwartet, können Sie im Ausblick nachlesen:

Intro Funktionen

Funktionsbegriff

Was ist eine Funktion?

Der Begriff der Funktion ist in der Mathematik sehr allgemein gefasst. Wir beschränken uns hier auf Funktionen, die eine reelle Zahl x mithilfe einer Funktionsvorschrift in eine reelle Zahl y überführen. Da die *Zielmenge*, in der die Funktionswerte liegen, hier also stets die reellen Zahlen sind, nennt man diese Funktionen reellwertige Funktionen.

Info 2:

Gegeben sei eine Menge D, genannt **Definitionsmenge**, und eine Menge Z, genannt **Zielmenge**. Eine **Funktion** f ordnet jedem Element $x \in D$ genau ein Element $f(x) \in Z$ zu. Man schreibt:

$$f : D \to Z, \quad x \mapsto f(x)$$

Die Definitionsmenge ist dabei ein wesentlicher Bestandteil der Definition einer Funktion, eine Funktionsvorschrift alleine reicht nicht aus!

Mit dem Zeichen $\subset$ bezeichnet man eine Teilmenge. Der Ausdruck $D \subset \mathbb{R}$ bedeutet also beispielsweise, dass die Definitionsmenge D eine Teilmenge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ umfasst.

Info 3:

Seien D_f, D_g, Z_f, Z_g Mengen. Seien $f : D_f \to Z_f$ und $g : D_g \to Z_g$ zwei Funktionen. Die Funktionen f und g heißen **gleich**, wenn $D_f = D_g$ und $Z_f = Z_g$ und wenn für jedes $x \in D$ gilt: $f(x) = g(x)$.

Beispiel 1:

Die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^2 + 7x - 3x - 4x$ sind gleich, da $D_f = D_g, Z_f = Z_g$ und $f(x) = g(x)$ gilt.

Beispiel 2:

Die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ und $g : [0; 2] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^2$ sind zwei verschiedene Funktionen, da ihre Definitionsbereiche nicht gleich sind. Die Funktion g beschreibt also nur den Teil der Funktion f, der die Werte zwischen 0 und 2 für x annimmt.

Wertetabelle

Zu einer Funktion f gehören also eine Definitionsmenge und eine Funktionsvorschrift, beispielsweise:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$, \quad f(x) = 0,5 \cdot (x-2)^2 + 0,7.$$

Den Verlauf einer Funktion kann man sich graphisch veranschaulichen.

Zum **Graph** einer Funktion gehören sämtliche Wertepaare $(x; y)$, für die $y = f(x)$ gilt.

Die Menge aller reellen Zahlenpaare $(x; y)$ bezeichnet man auch als $\mathbb{R}^2$, d.h. der Graph G von f ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$:

$$G(f) = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = f(x)\}.$$

Zeichnen kann man dagegen meist nur einen kleinen Ausschnitt eines Graphen, der nicht notwendigerweise alle wesentlichen Eigenschaften der Funktion erkennen lässt.

Um einen Funktionsgraphen zeichnen zu können, liefert eine Wertetabelle Anhaltspunkte.

Preview fehlt:
`h5p/wertetabelle01_geschnitten`

Video 2 *(nur in digitaler Version)*

Aufgabe 7:
Ergänzen Sie folgende Wertetabelle gemäß der Funktionsvorschrift

$$f(x) = 0,5 \cdot (x-2)^2 + 0,7$$

x	$f(x)$
-4	?
-2	?
$-0,5$	?
0	?
1	?
2	?
3	?
4	?
$5,5$	?
8	?

Lösung:

x	$f(x)$
-4	$18,7$
-2	$8,7$
$-0,5$	$3,825$
0	$2,7$
1	$1,2$
2	$0,7$
3	$1,2$
4	$2,7$
$5,5$	$6,825$
8	$18,7$

Folgende Wertetabelle wurde also für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Funktionsvorschrift $f(x) = 0,5 \cdot (x-2)^2 + 0,7$ erstellt:

x	$f(x)$
-4	$18,7$
-2	$8,7$
$-0,5$	$3,825$
0	$2,7$
1	$1,2$
2	$0,7$
3	$1,2$
4	$2,7$
$5,5$	$6,825$
8	$18,7$

Daraus kann man nun einen Graphen erstellen.

Preview fehlt:
`h5p/wertetabelle02_geschnitten_lauter`

Video 3 *(nur in digitaler Version)*

Es fragt sich allerdings, wie man den Graph zwischen zwei Punkten „durchzeichnet“. Mit Computern kann man in kürzester Zeit sehr viele Wertepaare berechnen und sie als Punkte dicht nebeneinander einzeichnen, sodass der Eindruck einer durchgezogenen Linie entsteht:

Preview fehlt:
`h5p/funktion_aus_punkten_aufbauen`

Video 4 *(nur in digitaler Version)*

Hat man keinen Computer zur Verfügung, muss man sich den Verlauf durch mathematische Überlegungen erschließen.

Aufgabe 8:
Welche der folgenden Graphen können also zu der oben erstellten Wertetabelle gehören?

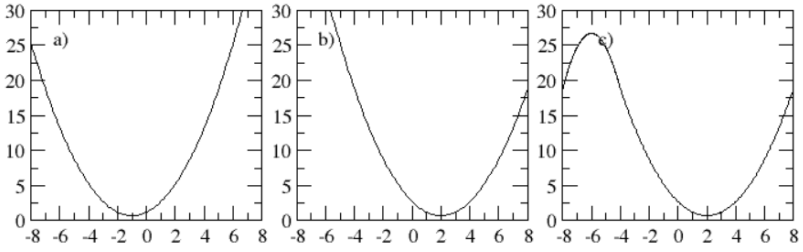


Bild 3

☐ Graph a)
☐ Graph b)

☐ Graph c)

Lösung:

Nur Graph b) und c) kommen in Frage, denn man erkennt an der Wertetabelle, dass der niedrigste dort ausgerechnete Funktionswert bei $x = 2$ liegen muss, was Graph a ausschließt. Die in der Wertetabelle ausgerechneten Funktionswerte stimmen sowohl mit Graph b) als auch mit Graph c) überein.

Da die Unterschiede zwischen Graph b) und c) im Bereich $-8 \leq x \leq -4$ liegen, der in der hier erstellten Wertetabelle nicht abgedeckt ist, kann man allein anhand dieser Wertetabelle nicht entscheiden, welcher der beiden Graphen zur Funktion f gehört.

Wie Sie sehen, kann man einen Graphen also **nicht** allein anhand einer Wertetabelle eindeutig einer Funktion zuordnen. Man muss weitere Überlegungen zu Definitionsmenge und Zuordnungsvorschrift anstellen, um den gesamten Verlauf eines Funktionsgraphen zu bestimmen.

Zieht man zusätzlich die Zuordnungsvorschrift zu rate, die eine quadratische Funktion beschreibt, so erkennt man, dass von den gezeigten Graphen nur Graph b) zur angegebenen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0,5 \cdot (x-2)^2 + 0,7$ gehören kann (siehe Wichtige Funktionen). Dies war hier aber nicht gefragt.

Definitions- und Wertemenge

Zusätzlich zur Definitionsmenge D kann man für jede Funktion eine Wertemenge ermitteln, der genau die Elemente der Zielmenge enthält, die als Werte $f(x)$ vorkommen, wenn x den Definitionsbereich „durchläuft“.

Info 4:

Die Menge aller Funktionswerte $f(x)$ in $\mathbb{R}$, die von f für $x \in D$ angenommen werden, wird als Wertemenge W_f von f bezeichnet.

$$W_f = \{f(x) | x \in D\}.$$

Die Wertemenge W_f ist eine Teilmenge der Zielmenge Z_f von f.

Aufgabe 9:

Betrachten Sie noch einmal die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0,5 \cdot (x-2)^2 + 0,7$.

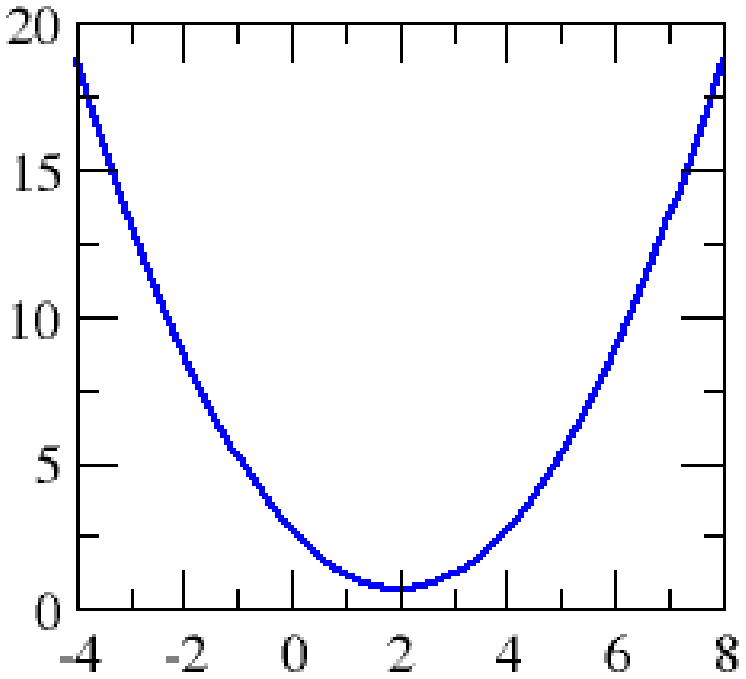


Bild 4

Welche Menge stellt die Wertemenge dar?

- ☐ Alle reellen Zahlen, also $\mathbb{R}$
- ☐ Alle positiven reellen Zahlen, also $\mathbb{R}^+$
- ☐ Folgende Teilmenge der reellen Zahlen: $\{y \in \mathbb{R} \,|\, 0,7 \leq y\}$

Lösung:

Da der Term $(x-2)^2$ durch das Quadrieren keine negativen Werte annehmen kann, ist sein minimaler Wert Null (wenn $x = 2$ ist). Die Funktion erreicht in diesem Fall ihr Minimum, also $y = 0,5 \cdot 0^2 + 0,7 = 0,7$. Kleiner als $0,7$ wird sie nie (siehe auch Skizze der Funktion).

Da die Definitionsmenge ganz $\mathbb{R}$ ist, kann x beliebig große Werte annehmen. Dadurch kann auch der Funktionswert y beliebig große Werte annehmen, weil er von der quadrierten (und somit stets positiven) Variable x^2 abhängt. Daher ist die Wertemenge, also die Menge aller Werte, die y annehmen kann, $\{y \in \mathbb{R} \,|\, 0,7 \leq y\}$.

Vielleicht ist Ihnen an diesem Beispiel auch schon aufgefallen, dass es manchmal zwei oder mehr x-Werte gibt, denen der gleiche Funktionswert zugeordnet wird, hier z.B. $x = 1$ und $x = 3$:

$$\begin{aligned} f(1) &= 0,5 \cdot (1-2)^2 + 0,7 \\ &= 0,5 \cdot (-1)^2 + 0,7 \\ &= 0,5 \cdot 1 + 0,7 \\ &= 1,2\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(3) &= 0,5 \cdot (3-2)^2 + 0,7 \\ &= 0,5 \cdot (1)^2 + 0,7 \\ &= 0,5 \cdot 1 + 0,7 \\ &= 1,2\,. \end{aligned}$$

Dies ist erlaubt, weil es der Definition einer Funktion nicht widerspricht.

Nicht erlaubt hingegen ist, dass einem x mehrere y zugeordnet werden. Kurven, bei denen dies auftritt, können deshalb nicht Graphen einer Funktion sein. Ist f dagegen eine Funktion, so hat $f(x)$ immer genau einen Funktionswert.

Ebenfalls erlaubt ist, dass für verschiedene Teilmengen der Definitionsmenge verschiedene Zuordnungsvorschriften genutzt werden, oder dass eine Funktion überall den gleichen Funktionswert annimmt. So sind folgende Beispiele erlaubte Funktionen:

Beispiel 1:

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = x^2$

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = 4$

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{mit} \quad x \leq 0 \\ x^3 & \text{mit} \quad x > 0 \end{cases}$

Die Definitionsmenge D muss auch nicht ganz $\mathbb{R}$ umfassen, sondern kann beispielsweise auch nur aus den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ oder aus einem Intervall aus $\mathbb{R}$ bestehen.

Aufgabe 10:
Welche der folgenden Kurven können also zu einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit einer Definitionsmenge $D \subset \mathbb{R}$ gehören?

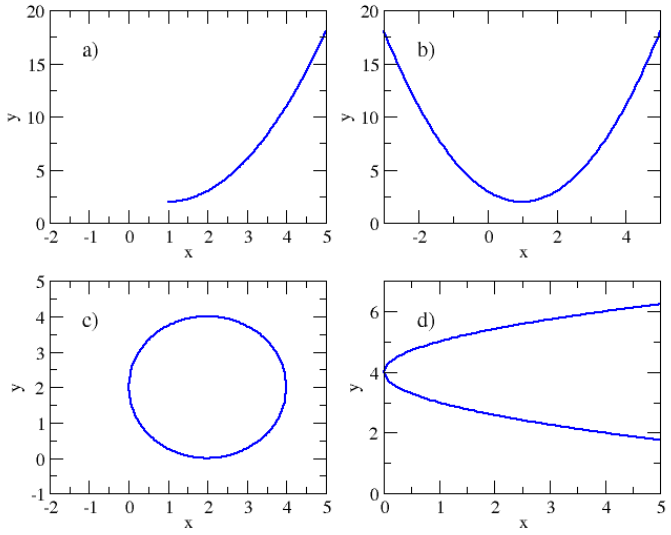


Bild 5

☐ Graph a)
☐ Graph b)
☐ Graph c)
☐ Graph d)

Lösung:

Nur die ersten beiden Graphen können zu Funktionen gehören, denn bei Graph c) und d) sind einigen x-Werten mehrere verschiedene y-Werte zugeordnet.

Dass Graph a) nur für einen Teil der x-Werte definiert ist, widerspricht hingegen der Definition einer Funktion nicht. Auch, dass in Graph b) zu fast allen y-Werten zwei verschiedene x-Werte gehören, wird von der Definition einer Funktion nicht ausgeschlossen.

Man kann an folgendem Test erkennen, ob eine Kurve Graph einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist: Für jedes $x \in D$ muss die Parallele zur y-Achse durch x die Kurve genau einmal schneiden. Dieser Test wir auch „Vertikale-Linie-Test“ genannt.

Intro Funktionen

Wichtige Funktionen

Einige Klassen von Funktionen treten besonders h”aufig auf: Polynomfunktionen (wie lineare, quadratische, kubische Funktionen), trigonometrische Funktionen sowie Exponential - und Logarith-

musfunktionen.

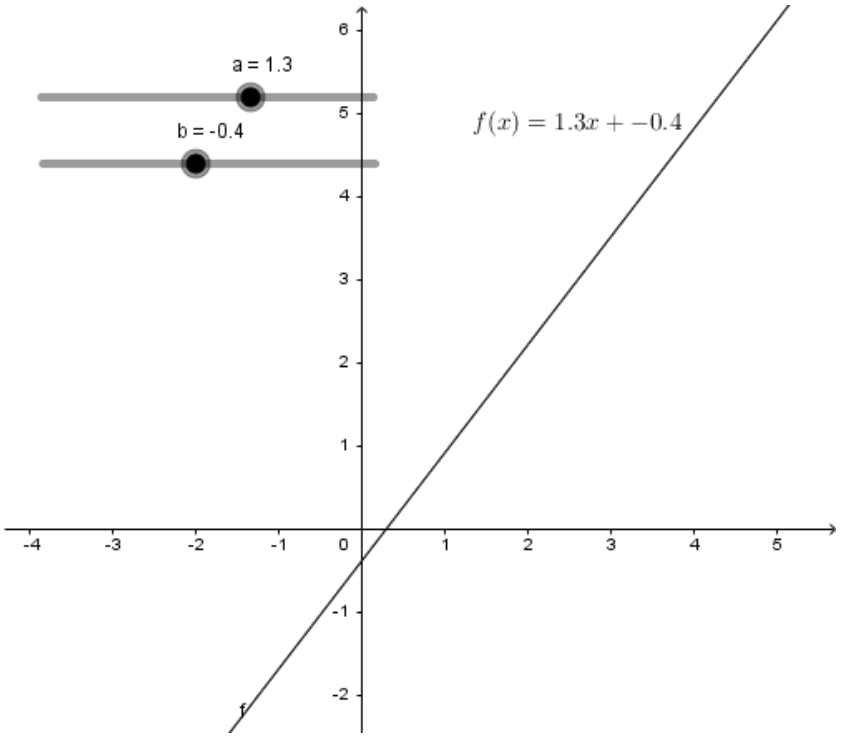
Im Folgenden werden lineare, quadratische und kubische Funktionen behandelt. Auf trigonometrische Funktionen, sowie Exponential - und Logarithmusfunktionen wird im Kurs „Höhere Funktionen“ eingegangen.

Lineare Funktionen sind dadurch definiert, dass sie die Variable x nur in erster Potenz enthalten. Sie besitzen also im Allgemeinen die folgende Form (für konstante Zahlen $m, b \in \mathbb{R}$)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = mx + b$

Für $b = 0$ entsteht eine konstante Funktion.

Aufgabe 11:
Überlegen Sie sich, welche Parameter m und b Sie in die Funktionsvorschrift $f(x) = mx + b$ einsetzen müssen, um eine lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu finden, die durch die Punkte $(0; 4)$ und $(4; 0)$ verläuft. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe des Applets!



Interaktion 2 *(nur in digitaler Version)*

Lösung:

Um eine solche Funktion zu finden, kann man entweder ein lineares Gleichungssystem aufstellen (mehr dazu im Kurs „Lineare Gleichungssysteme“) oder folgende Überlegung anstellen:

Wenn eine lineare Funktion durch die Punkte $(0;4)$ und $(4;0)$ verläuft, heißt das, dass ihr Funktionswert um 4 kleiner werden muss (von $y=4$ bei $x=0$ zu $y=0$ bei $x=4$), wenn man in x-Richtung 4 Stellen weiter geht. Da sie linear ist, heißt das gleichzeitig, dass ihr Funktionwert immer um 1 abnehmen muss, wenn man 1 Stelle in x-Richtung weiter geht. Daher ist ihre Steigung $b=-1$ (Minus, weil der Funktionswert kleiner wird, wenn der für x eingesetzte Wert zunimmt).

Der Achsenabschnitt $y=4$ (bei $x=0$) war gegeben. Da der Parameter m den Achsenabschnitt einer linearen Funktion festlegt, muss $m=4$ sein, sodass man die gesuchte lineare Funktion erhält:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=4+(-1)\cdot x=4-x$ für alle $x\in\mathbb{R}$

Quadratische Funktionen können Terme bis zur zweiten Potenz von x enthalten. Sie besitzen also im Allgemeinen die folgende Form:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=ax^2+bx+c$ für alle $x\in\mathbb{R}$

wobei a,b,c konstante Zahlen sind, für die $b,c\in\mathbb{R}$ und $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt (das heißt, a darf nicht Null sein).

Man kann die Funktionsvorschriften quadratischer Funktionen auch so ausdrücken, dass man direkt ihre Extremstelle ablesen kann:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=r\cdot(x-s)^2+t$ für alle $x\in\mathbb{R}$

wobei r,s,t konstante Zahlen sind, für die $s,t\in\mathbb{R}$ und $r\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ gilt (das heißt, r darf nicht Null sein).

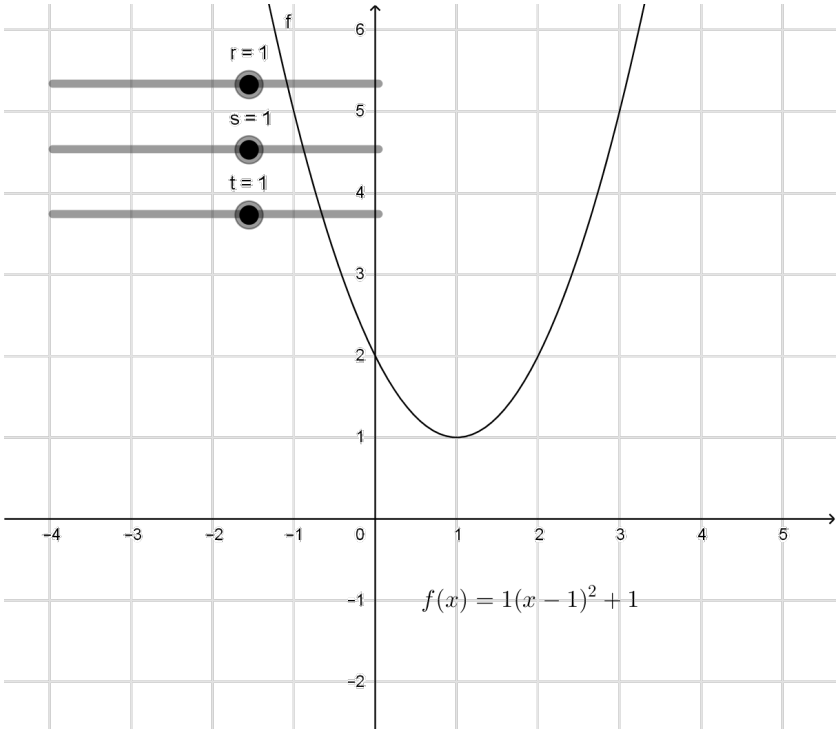
Man kann diese „Scheitelpunktform“ in die oben angegebene Polynomdarstellung umrechnen, indem man die Klammer auflöst:

$$\begin{aligned} f(x) &= r\cdot(x-s)^2+t \\ &= r\cdot(x^2-2xs+s^2)+t \\ &= rx^2-2rsx+rs^2+t\,. \end{aligned}$$

Durch Vergleich kann man ablesen: $c=rs^2+t$, $b=-2rs$ und $a=r$.

Beachten Sie, dass für $r=0$ keine quadratische Funktion vorliegt!

Aufgabe 12:
Versuchen Sie mithilfe des Applets, eine quadratische Funktion zu finden, deren Graph eine nach oben geöffnete Parabel mit Extremstelle $(3;2)$ ist.



Interaktion 3 *(nur in digitaler Version)*

Welche der folgenden Aussagen treffen zu?

- ☐ Man muss $r = 3$ und $s = 2$ wählen, damit der Scheitelpunkt bei $(3;2)$ liegt.
- ☐ Vom Vorzeichen des Parameters r hängt es ab, ob die Parabel nach oben oder unten geöffnet ist.
- ☐ Der Parameter s verschiebt die ganze Parabel in y-Richtung.
- ☐ Man muss $s = 3$ und $t = 2$ wählen, damit der Scheitelpunkt bei $(3;2)$ liegt.
- ☐ Der Parameter t beeinflusst, wie steil die Parabel ansteigt.

Lösung:

Die Parameter der Scheitelpunktform erlauben es, den Scheitelpunkt direkt abzulesen. Hierbei gibt s den x-Wert an und t den y-Wert des Scheitelpunktes.

Ändert man den Wert von s, so verschiebt sich die Parabel in x-Richtung. Ändert man t, so verschiebt sie sich nach oben oder unten.

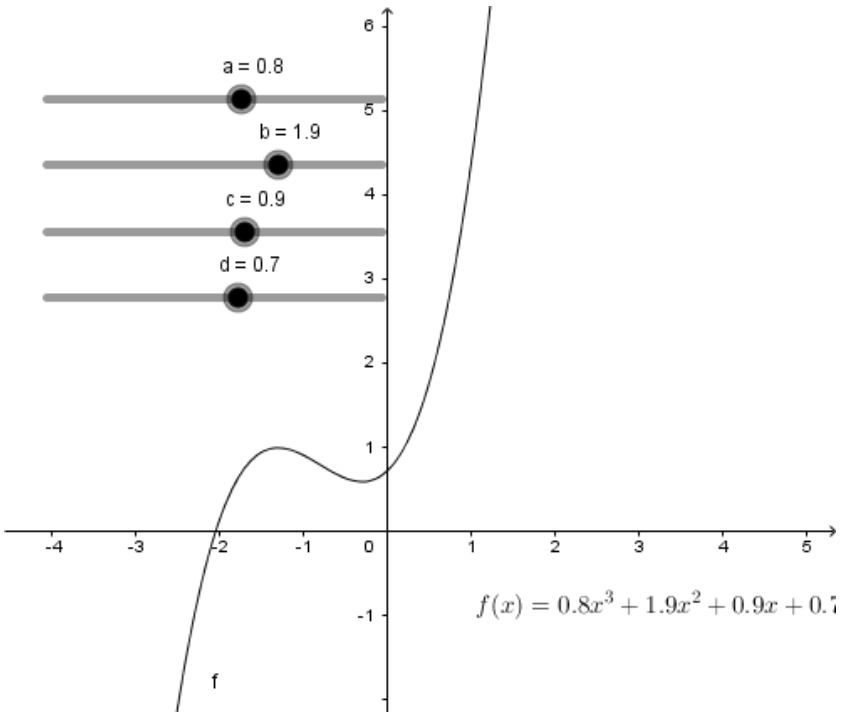
Der Parameter r beeinflusst, wie steil die Parabel ansteigt und ob sie nach oben oder unten geöffnet ist.

Kubische Funktionen, deren Funktionsvorschrift ein **Polynom dritten Grades** ist, können Terme bis zur dritten Potenz von x enthalten. Sie besitzen also im Allgemeinen die folgende Form:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

wobei a, b, c, d konstante Zahlen sind, für die $b, c, d \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt (das heißt, a darf nicht Null sein).

Aufgabe 13:
Untersuchen Sie die Kurvenschar mit allgemeiner Funktionsvorschrift $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mithilfe des Applets. Was passiert, wenn Sie $a = 0$ und $b = 0$ setzen?



Interaktion 4 *(nur in digitaler Version)*

- ☐ Die Funktion ist nicht mehr definiert.
- ☐ Sie erhalten eine lineare Funktion.
- ☐ Sie erhalten eine quadratische Funktion.

Lösung:
Sie erhalten eine lineare Funktion, denn für $a = 0$ und $b = 0$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} & f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ = \; & 0 \cdot x^3 + b \cdot x^2 + cx + d \\ = \; & cx + d. \end{aligned}$$

Funktionen höheren Grades erhält man dadurch, dass man die Zuordnungsvorschrift um weitere Terme mit höheren Potenzen von x ergänzt.

Trigonometrische Funktionen

Unter trigonometrischen Funktionen versteht man unter Anderem die Winkelfunktionen **Sinus**, **Cosinus** und **Tangens**. Als bekannteste Funktionen werden hier die Sinus- und Cosinus-Funktion gezeigt.

Die **Sinusfunktion** ist wie folgt definiert

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$

und in der folgenden Abbildung dargestellt. Man erkennt, dass ihre Funktionswerte sich periodisch wiederholen. Die Periodizität beträgt 2π. Das heißt, wenn der Wert von x um ein Vielfaches von $2\pi = 6,283...$ zunimmt, bleibt der Funktionswert identisch.

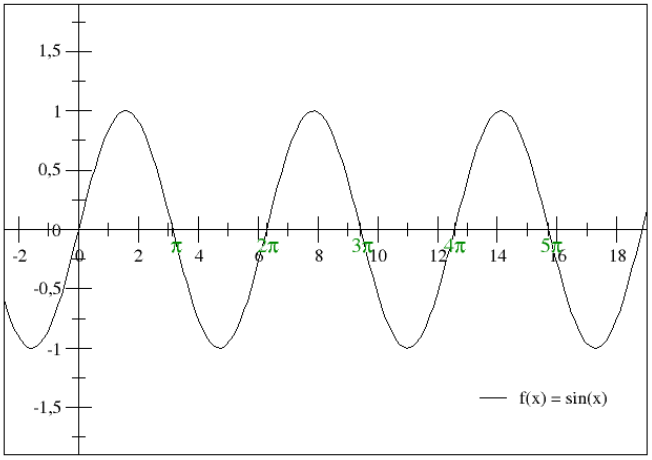
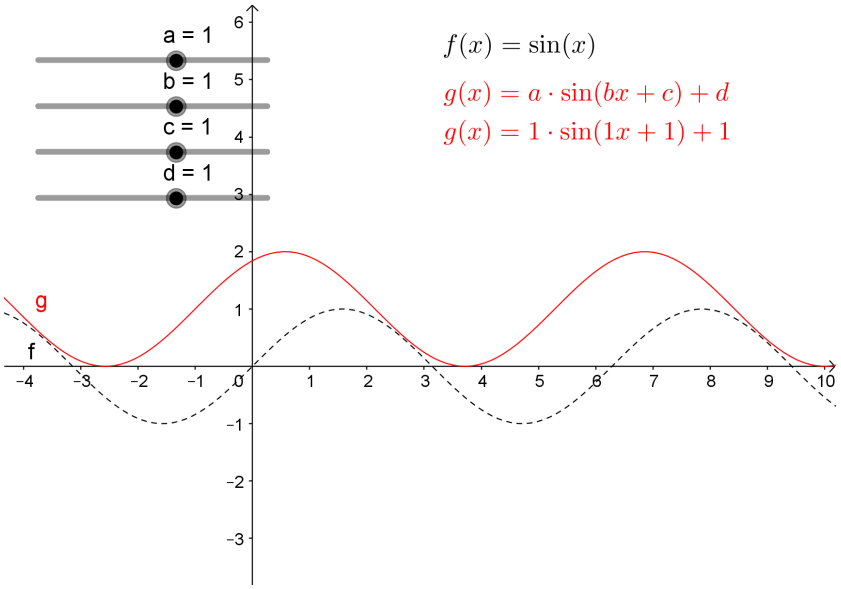


Bild 6

Man kann eine allgemeinere **Sinusfunktion** folgendermaßen definieren (wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ konstante Zahlen sind und $a, b \neq 0$ gelten muss)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 14:
Untersuchen Sie mithilfe des Applets, welcher Parameter welche Veränderung bewirkt!



Interaktion 5 *(nur in digitaler Version)*

Ordnen Sie den Parametern a, b, c und d die Veränderungen „Verschiebung in x-Richtung“, „Verschiebung in y-Richtung“, „Streckung in y-Richtung (Amplitude)“ und „Streckung in x-Richtung (Periodizität)“ zu.

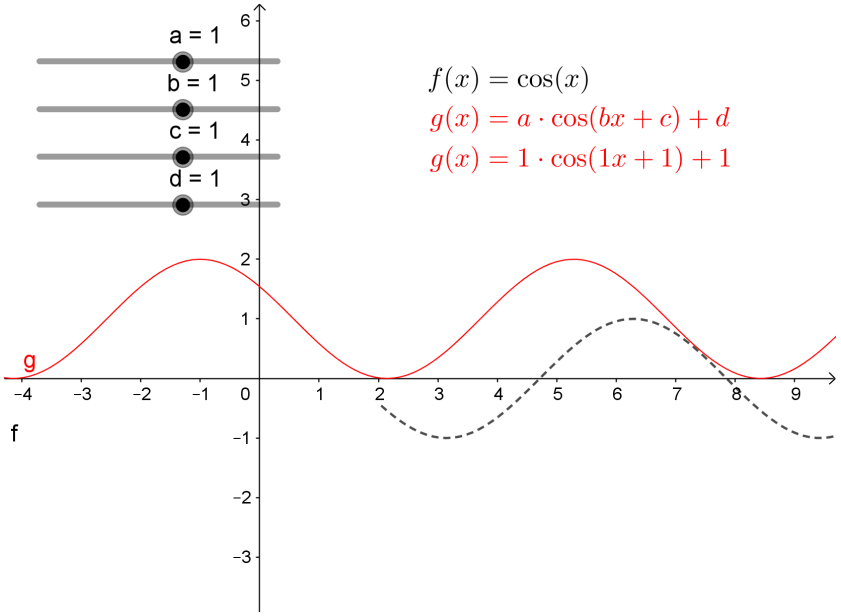
Lösung:

Der Parameter a ändert die Amplitude der Sinuskurve, b ändert die Periodizität, c verschiebt die Kurve in x-Richtung und d verschiebt sie in y-Richtung.

Die allgemeine **Cosinusfunktion** ist analog dazu definiert (wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ konstante Zahlen sind und $a, b \neq 0$ gelten muss).

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot \cos(bx + c) + d$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die Parameter bewirken hier jeweils das gleiche wie bei der Sinuskurve, nur dass der Ausgangspunkt ein anderer ist: Während die nicht verschobene Sinuskurve bei $x = 0$ einen Nulldurchgang besitzt, besitzt die nicht verschobene Cosinusfunktion an der Stelle $x = 0$ ein Maximum.



Interaktion 6 *(nur in digitaler Version)*

Aufgabe 15:
Untersuchen Sie, wie Sie die Parameter der beiden Funktionen wählen können, damit Sinus- und Cosinusfunktion die gleiche Kurve ergeben.

Lösung:
Eine Möglichkeit ist, a, b und d gleich zu wählen, c muss den Phasenunterschied zwischen Sinus- und Cosinusfunktion ausgleichen und darum um $b \cdot \frac{\pi}{2}$ unterschiedlich gewählt werden.

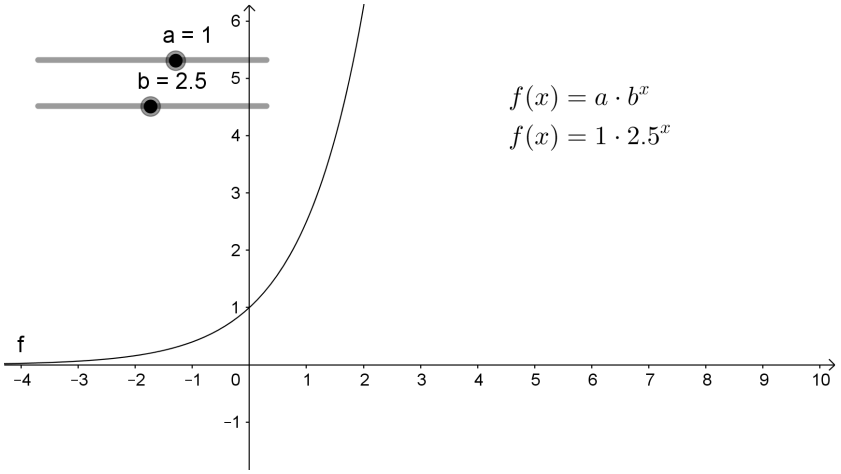
Exponential- und Logarithmusfunktion

Die **Exponentialfunktion** f ist wie folgt definiert

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot b^x$,

wobei $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}^+$ konstante Zahlen sind und b **Basis** genannt wird.

Aufgabe 16:
Wählen Sie im Applet $a = 1$. Bei welchem Wert von b ändert sich die Exponentialfunktion von einer monoton fallenden Funktion zu einer monoton steigenden Funktion?



Interaktion 7 *(nur in digitaler Version)*

$b =$?

Lösung:

Bei Werten $b < 1$ ist die Exponentialfunktion monoton fallend. Das heißt, die Funktionswerte nehmen immer weiter ab, je größer die eingesetzten x-Werte werden.

Für $b = 1$ ergibt sich eine konstante Funktion.

Für $b > 1$ ergibt sich eine monoton steigende Funktion. Das heißt, die Funktionswerte nehmen mit steigenden x-Werten zu.

Bei $b = 1$ ändert sich also das Monotonieverhalten der Funktion.

Die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ ist die **Logarithmusfunktion**, die wie folgt definiert ist:

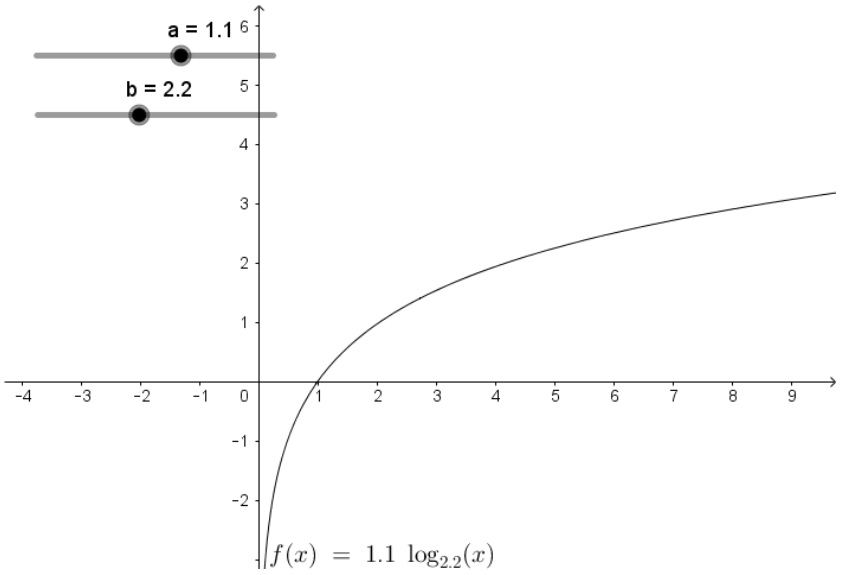
$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \log_a(x)$,

wobei $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ **Basis** genannt wird.

Hierbei ist wichtig, dass der Logarithmus nur für positive Werte von x definiert ist und dass als Basis a nur positive Werte $\neq 1$ gewählt werden dürfen.

Im Allgemeinen werden alle Funktionen der Art $f(x) = c \cdot log_{a(x)}$ mit $c \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^{\setminus}1$ als Logarithmusfunktionen bezeichnet.

Aufgabe 17:
Was bleibt immer gleich, wenn Sie die Basis der Logarithmusfunktion ändern?



Interaktion 8 *(nur in digitaler Version)*

Beachten Sie, dass als Parameter nicht $b = 1$ gewählt werden darf, weil die Logarithmusfunktion dafür nicht definiert ist (siehe oben).

- ☐ Der Schnittpunkt mit der x-Achse.
- ☐ Der Schnittpunkt mit der y-Achse.
- ☐ Die Steigung am Punkt $(1; 0)$.

Lösung:

Die Basis der Logarithmusfunktion entspricht im Applet dem Parameter b. Ändert man ihn, so ändert sich die Steigung des Graphs.

Gleich bleibt hingegen die Tatsache, dass er an dem Punkt $(1; 0)$ die x-Achse schneidet.

Sowohl mit der Exponential- als auch mit der Logarithmusfunktion beschäftigt sich sowohl die **Langversion** dieses Kurses als auch der Kurs **Potenzen, Wurzeln, Logarithmen**.

Intro Funktionen

Fachinhalt C

Kurvendiskussion

Eine vollständige **Kurvendiskussion** kann folgende Punkte umfassen:

- Bestimmung der maximalen Definitionsmenge,
- Ermitteln der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen (y-Achsenabschnitt und Nullstellen),
- Bestimmung lokaler Extrema,
- Ermitteln von Wendepunkten und Sattelpunkten,
- Bestimmung von Polstellen,
- Untersuchung des Monotonieverhaltens,
- Betrachten des Verhaltens im Unendlichen und an den Rändern des Definitionsbereichs (gegebenenfalls Ermittlung von Asymptoten),
- Ermitteln von globalen Extrema,
- Untersuchung auf Periodizität,
- Untersuchung auf Symmetrien.

Wir werden uns im Folgenden allerdings nur mit den Punkten befassen, die in folgender Abbildung eingezeichnet sind.

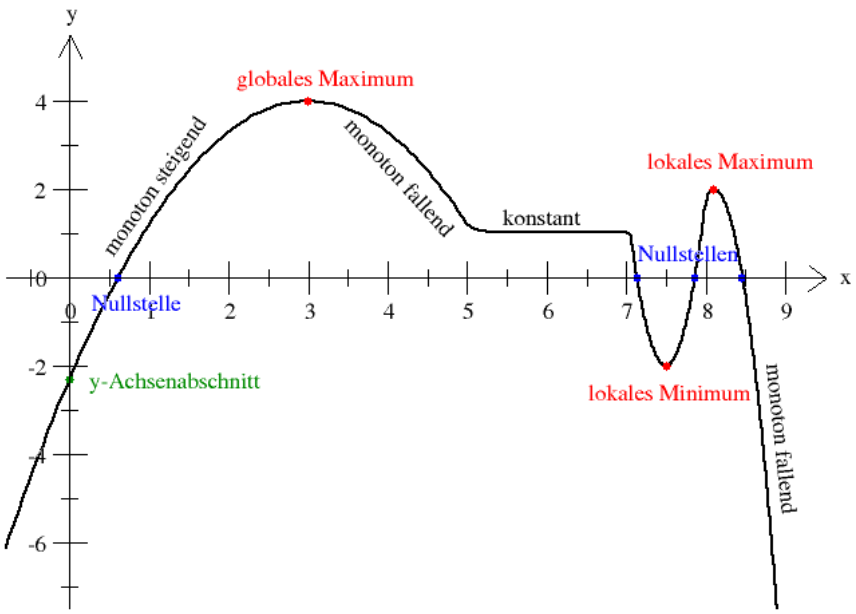


Bild 7

Info 5: (Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ist $0 \in D$, so schneidet der Graph der Funktion f die y-Achse im Punkt $(0; f(0))$. Den Funktionswert $f(0)$ an diesem Punkt nennt man **y-Achsenabschnitt**.

Alle x_i in D mit $f(x_i) = 0$ nennt man **Nullstellen** von f. Das heißt, die Punkte $(x_i; 0)$ sind Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit der x-Achse.

Das Thema Extremwerte wird im Kurs **„Differentialrechnung“** ausführlich behandelt und hier nur kurz angesprochen:

Info 6: (Lokale Extrema)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion f hat an der Stelle $x_e \in D$ ein **lokales Minimum** (bzw. **lokales Maximum**), wenn es ein Intervall $I = (a, b) \subset D$, $a, b \in \mathbb{R}$ gibt, welches x_e enthält und $f(x_e) \leq f(x)$ (bzw. $f(x_e) \geq f(x)$) für jedes $x \in I$ gilt.

Diese präzise Formulierung drückt aus, dass die Funktionswerte für alle x, die „nahe genug“ an dem lokalen Maximum x_e liegen, kleiner oder gleich dem Funktionswert in x_e sind. Analog müssen die Funktionswerte für alle x, die „nahe genug“ am Minimum x_e liegen, größer oder gleich dem Funktionswert in x_e sein.

Im Kurs *Differentialrechnung* wird erklärt, wie man Extremstellen differenzierbarer Funktionen mithilfe von erster und zweiter Ableitung ermitteln kann.

Info 7: (Globale Extrema)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion f hat an der Stelle $x_e \in D$ ihr **globales Minimum** (bzw. **globales Maximum**), wenn $f(x_e) \leq f(x)$ (bzw. $f(x_e) \geq f(x)$) für jedes $x \in D$ gilt.

Info 8: (Monotonieverhalten)
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ hei”st auf einem Intervall $I \subset D$

- **monoton steigend**, wenn $f(x_1) \leq f(x_2)$ für alle x_1, x_2 in D mit $x_1 < x_2$ gilt.
- **streng monoton steigend**, wenn $f(x_1) < f(x_2)$ für alle x_1, x_2 in D mit $x_1 < x_2$ gilt.
- **monoton fallend**, wenn $f(x_1) \geq f(x_2)$ für alle x_1, x_2 in D mit $x_1 < x_2$ gilt.
- **streng monoton fallend**, wenn $f(x_1) > f(x_2)$ für alle x_1, x_2 in D mit $x_1 < x_2$ gilt.

Aufgabe 18:
Folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt aus dem Graphen einer quadratischen Funktion.

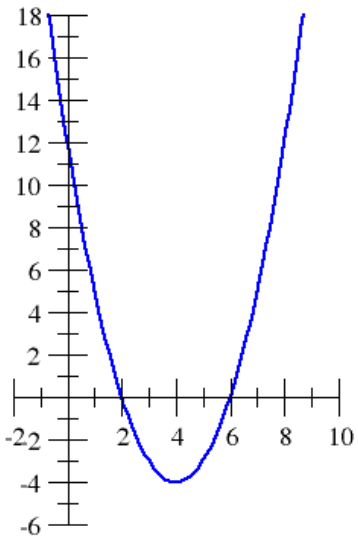


Bild 8

Welche Aussage gilt für diese Funktion?

- ☐ Sie besitzt ein Maximum im Punkt $(4; -4)$.
- ☐ Sie ist für Werte $x \leq 4$ monoton fallend. Für $x \geq 4$ ist sie monoton steigend.
- ☐ Sie besitzt zwei Extremstellen: Eine bei $x_1 = 2$ und eine bei $x_2 = 6$.
- ☐ Sie besitzt eine Nullstelle bei $x = 0$.

Lösung:

Die gezeigte Parabel besitzt im Punkt $(4; -4)$ ein Minimum (kein Maximum).

Sie ist für Werte $x \leq 4$ monoton fallend. Für $x \geq 4$ ist sie monoton steigend.

Sie besitzt im gezeigten Bereich ein lokales Extremum: das Minimum am Punkt $(4; -4)$.

Der y-Achsenabschnitt liegt bei $x = 0$, $f(x) = 12$.

Sie besitzt zwei Nullstellen: bei $x_1 = 2$ und $x_2 = 6$.

Intro Funktionen

Ausblick

Folgende Themen werden in der Langversion dieses Kurses ausführlicher behandelt:

- Definitions- und Wertemenge,

- Erstellen einer Wertetabelle,
- Zeichnen eines Funktionsgraphen,
- Nullstellen und Achsenabschnitte,
- Monotonieverhalten,
- Extremstellen,
- Symmetrien.