UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Virtuelles Eingangstutorium
studiVEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn
FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Virtuelles Eingangstutorium
VEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

khdm
kompetenzzentrum
hochschuldidaktik
mathematik

LE 5 - Elementare Funktionen

5.1 Funktionsbegriff

Im Folgenden finden Sie die Abschnitte:

Übersicht ..... S. 1
Hinführung ..... S. 2
Inhalte mit Erklärungen ..... S. 4
Aufgaben ..... S. 11

Übersicht

- Behandlung der Definition und der Eigenschaften von Funktionen,
- Beispiele und Gegenbeispiele,
- Gleichheit von Funktionen,
- Graphen von Funktionen,
- Definitions- und Zielmenge,
- Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Funktionen,
- innermathematische Anwendungsbeispiele.

Hinführung

Aus der Schule kennen Sie Schaubilder von Funktionen:

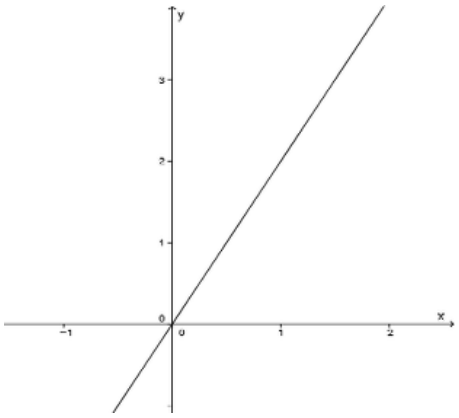


Bild 1 $f(x) = 2x$

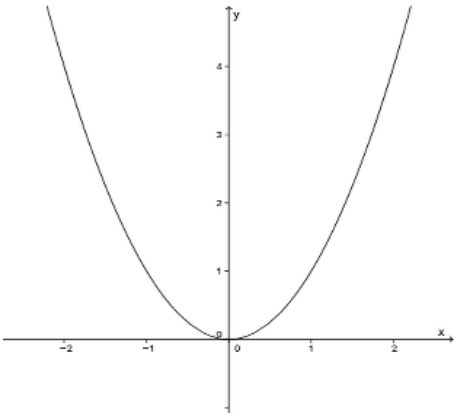


Bild 2 $f(x) = x^2$

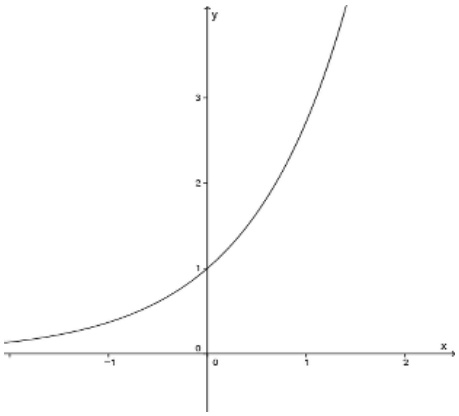


Bild 3 $f(x) = e^x$

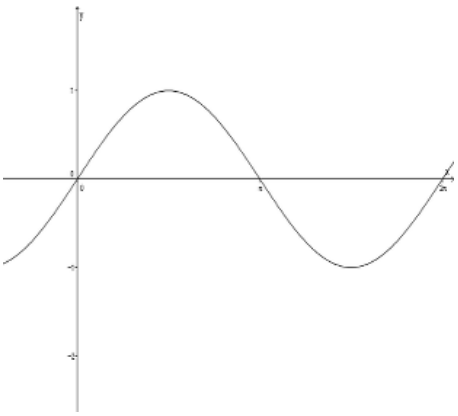


Bild 4 $f(x) = \sin(x)$

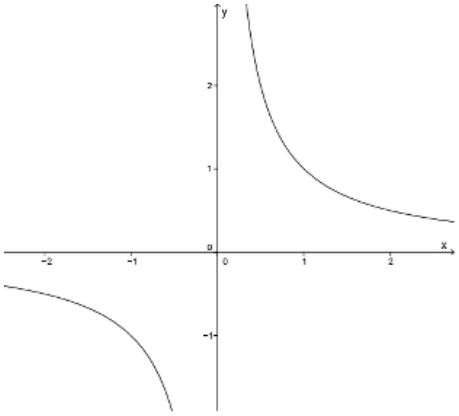


Bild 5 $f(x) = \frac{1}{x}$

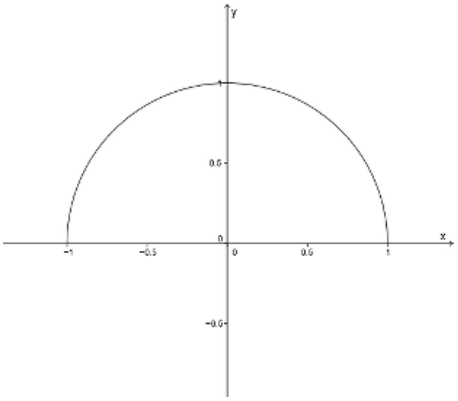


Bild 6 $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Wie in diesen Schaubildern werden in der Schulmathematik Funktionen meist nur durch ihre Funktionsvorschrift angegeben. In der Hochschulmathematik werden Funktionen zusätlich immer mit ihrer Definitions- und ihrer Zielmenge definiert.

Wir wollen daher die Schreibweise

$$f : D \to Z \ , \ x \mapsto \ f(x)$$

einf'uhren, wobei f die Funktion, D die Definitionsmenge, Z die Zielmenge, x das Argument und $f(x)$ die Funktionsvorschrift bezeichnet.

Mit dieser Schreibweise w"urden richtigerweise folgende Bildunterschriften unter den Bildern stehen:

Bild Nr.	Funktion
1)	Der Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x$
2)	Der Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$
3)	Der Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x$
4)	Der Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(x)$
5)	Der Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$
6)	Der Graph der Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Den abstrakten Graphen einer Funktion $G(f)$ kann man als Kurve im $\mathbb{R}^2$, n"amlich als Menge aller Paare $(x; y)$ mit $x \in D$ und $y = f(x)$ definieren.
F"ur die zweite Funktion ist $G(f) = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2\}$ eine Kurve, die sich bis ins Unendliche erstreckt. Das Schaubild zeigt nur den Ausschnitt $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2$ und $-2,5 \leq x \leq 2,5\}$.
Ein Funktionenplotter plottet auch nicht unendlich viele Punkte $(x, f(x))$ mit $-2,5 \leq x \leq 2,5$, sondern nur eine endliche Teilmenge von rationalen Punkten davon, die aber so dicht liegen, dass eine kontinuierliche Kurve erscheint.

Inhalte mit Erklärungen

Definition 1:
Gegeben sei eine Menge D, genannt **Definitionsmenge**, und eine Menge Z, genannt **Zielmenge**. Eine **Funktion** f ordnet jedem Element $x \in D$ genau ein Element $f(x) \in Z$ zu. Man schreibt:

$$f : D \to Z, \quad x \mapsto f(x)$$

Bemerkungen

- In der Mathematik ist diese allgemeine Definition einer Funktion sehr nützlich. Hier im Kurs wird im weiteren Verlauf mit Funktionen gearbeitet, bei denen D und Z Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind.
- Statt **Definitionsmenge** ist es auch üblich, **Definitionsbereich** zu sagen. Entsprechend wird statt **Zielmenge** auch **Zielbereich** genutzt.

Wir vereinbaren folgende Bezeichnungen: x hei"st **Variable**, $f(x)$ hei"st **Funktionswert**. Die Bezeichnungen **unabh"angige Variable** f"ur x und **abh"angige Variable** f"ur y sind ebenfalls gebr"auchlich. Die Menge $\mathbb{R}$ wird auch Zielmenge genannt.
Die Funktionsvorschrift kann man auf verschiedene Weise angeben. Gebr"auchlich ist f"ur $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ x &\mapsto x^2 \\ y &= x^2. \end{aligned}$$

In der Mathematik bezeichnet man die unabhängige Variable oft mit x. In der Praxis heißen Variablen aber oft anders, zum Beispiel wird in der Physik t für die Zeit verwendet. Auch innerhalb der Mathematik können andere Variablennamen auftauchen.
Zum Beispiel gibt $f(z) = z^2$ f"ur alle $z \in \mathbb{R}$ dieselbe Funktion wie oben an. Mit f bezeichnet man die Funktion als mathematisches Objekt und $f(x)$ bezeichnet den Funktionswert an der Stelle x. Manchmal wird auch etwas lasch von der Funktion $f(x)$ gesprochen, wenn daraus keine Missverst"andnisse entstehen.

Eine reellwertige Funktion wird durch zwei Vorgaben festgelegt: die Definitionsmenge und die Funktionsvorschrift. Nur wenn beide Vorgaben "ubereinstimmen, sind zwei Funktionen gleich.

In der Mathematik definiert man reellwertige Funktionen oft über ihre maximale Definitionsmenge. Dabei reduziert man die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ um die Menge an Zahlen, die für x nicht in die Funktionsvorschrift eingesetzt werden dürfen. Zum Beispiel ist die maximale Definitionsmenge für die Funktionsvorschrift $f(x) = \frac{1}{x}$ damit $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, da man nicht durch Null teilen darf. Ein anderes Beispiel wäre die maximale Definitionsmenge $D = R_0^+$ zu der Funktionsvorschrift $f(x) = \sqrt{x}$. Wir schließen also alle negativen Zahlen aus der Definitionsmenge aus, da wir im Reellen keine Wuzel aus negativen Zahlnen ziehen können.

Definition 2:
Seien D_f, D_g, Z_f, Z_g Mengen. Seien $f : D_f \to Z_f$ und $g : D_g \to Z_g$ zwei Funktionen. Die Funktionen f und g heißen **gleich**, wenn $D_f = D_g$ und $Z_f = Z_g$ und wenn für jedes $x \in D$ gilt: $f(x) = g(x)$.

Bemerkung

- Zwei Funktionen sind also gleich, wenn sie gemeinsame Definitions- und Zielmengen haben und in allen Funktionswerten übereinstimmen.

Die Festlegung der Gleichheit unterscheidet sich von der Schulmathematik, in der die Funktion oft mit der Termdarstellung identifiziert wird und der Definitionsbereich eine untergeordnete Rolle spielt.

Definition 3:
Sei $f : D \to Z$ eine Funktion. Sind D und Z Teilmengen von $\mathbb{R}$, so spricht man von einer **reellwertigen Funktion**.

Ab jetzt wird D immer als Teilmenge von $\mathbb{R}$ und, soweit nichts anderes angegeben ist, $Z = \mathbb{R}$ gewählt. Insbesondere sind alle betrachteten Funktionen reellwertig.

Bemerkungen

- Bei zwei Funktionen $f : D_f \to \mathbb{R}$ und $g : D_g \to \mathbb{R}$ sind die Zielmengen gleich. Für die Gleichheit von solchen Funktionen müssen also nur die Definitionsmengen und die Funktionswerte überprüft werden.
- Es sieht vielleicht ungewohnt aus, dass wir in der Definition als Zielmenge nicht ganz $\mathbb{R}$ nehmen, sondern eine Teilmenge. Es wird aber später klar, warum das nützlich ist, wenn in der Lerneinheit 8 Umkehrfunktionen besprochen werden.

Beispiel 1:

Die Funktionen

$$\begin{aligned} f : D_f \to \mathbb{R}, \quad & D_f = \{x \,|\, x \geq 0\}, \quad & x \mapsto x^2, \\ g : D_g \to \mathbb{R}, \quad & D_g = \mathbb{R}, & x \mapsto x^2, \end{aligned}$$

sind nicht gleich, da die Definitionsmengen verschieden sind.

Die Funktionen

$$\begin{aligned} f : D_f \to \mathbb{R}, \quad & D_f = \mathbb{R}, \quad & x \mapsto x^2, \\ g : D_g \to \mathbb{R}, \quad & D_g = \mathbb{R}, \quad & x \mapsto x^3, \end{aligned}$$

sind nicht gleich, da die Funktionsvorschriften verschieden sind. Offensichtlich gilt $f(x) = g(x)$ nur, genau dann wenn $x = 0$ oder $x = 1$ ist. Es gilt also nicht f"ur alle Argumente $f(x) = g(x)$.

Die Funktionen

$$\begin{aligned} f : D_f \to \mathbb{R}, \quad & D_f = \mathbb{R}, \quad & x \mapsto 4x + 4, \\ g : D_g \to \mathbb{R}, \quad & D_g = \mathbb{R}, \quad & x \mapsto (x+2)^2 - x^2, \end{aligned}$$

sind gleich. Sie haben die gemeinsame Definitionsmenge $\mathbb{R}$ und f"ur jedes x aus $D = \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = 4x + 4, \quad g(x) = (x+2)^2 - x^2 = 4x + 4,$$

also $f(x) = g(x)$.

Genauer gesagt sind zwei Funktionen genau dann gleich, wenn sie dieselbe Definitionsmenge sowie dieselbe Zielmenge haben und wenn sie für alle x in der gemeinsamen Definitionsmenge dieselben Funktionswerte liefern. Die Funktionsvorschriften selbst können sich aber in der Darstellung, wie im letzten Beispiel gezeigt, unterscheiden.

Definition 4:
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit D in $\mathbb{R}$. Der **Graph** von f ist die Menge der Wertepaare $(x; f(x))$ mit $x \in D$:

$$G(f) := \{(x; f(x))|\ x \in D\}.$$

Bemerkung

- Der Graph ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$, wobei $\mathbb{R}^2 := \{(x; y)|x, y \in \mathbb{R}\}$ die x-y-Ebene darstellt.

Ein Graph gibt anschauliche Informationen "uber den Funktionsverlauf. Wenn zwei Funktionen "ubereinstimmen, dann stimmen auch ihre Graphen "uberein.

Ein Schaubild, das in der Schule Funktionsgraph hei"st, stellt immer nur einen endlichen Ausschnitt der Punktmenge $G(f)$ dar.

Preview fehlt:
`h5p/313graphentstehung`

Video 1 *(nur in digitaler Version)* Entstehung von Graphen einer Funktion durch Zeichnen von Punkten in der x-y-Ebene.

Beispiel 2:
Bei der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ ist

$$G(f) = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2\}.$$

Das heißt die Bedingung $y = x^2$ filtert aus allen Paaren $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ eine bestimmte Teilmenge von Punkten heraus.
Es gilt $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 | y - x^2 = 0\} = G(f)$.
Durch die Gleichung $y - x^2 = 0$ wird „implizit“ eine Funktion festgelegt, n"amlich die, f"ur die $y = x^2$ gilt.
Graphen von Funktionen als Teilmengen G des $\mathbb{R}^2$ haben eine besondere Eigenschaft: zu jedem $x \in D$ gibt es **genau ein** $y \in \mathbb{R}$, sodass $(x; y) \in G$ gilt.
Geometrisch hei"st das, dass vertikale Linien an jede Stelle $x \in D$ den Graphen genau einmal schneiden.

Beispiel 3:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$

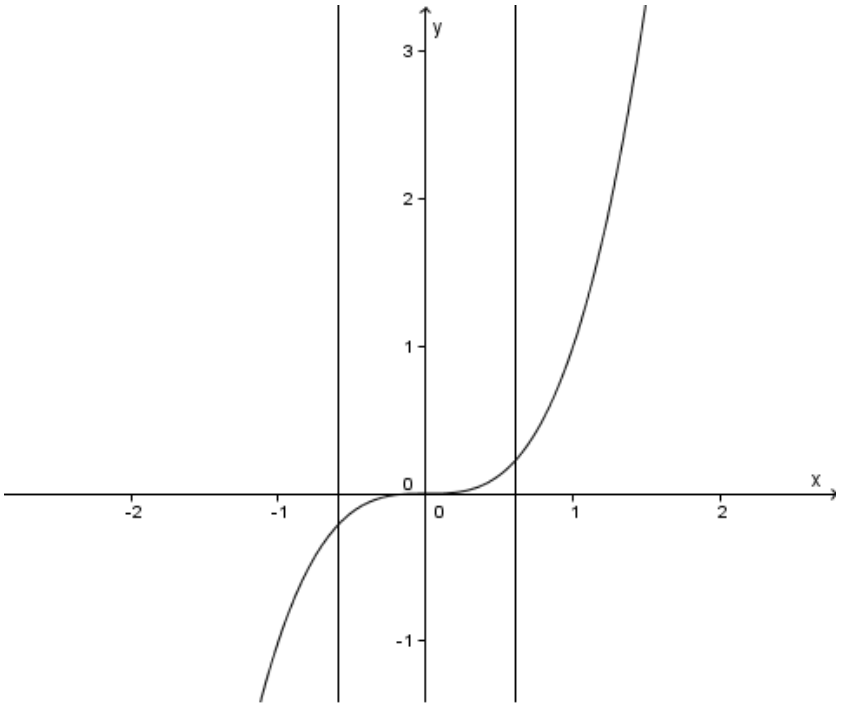


Bild 7

Dies nennt man auch den „Vertikale-Linie-Test“.

In den folgenden beiden Bildern sehen Sie Kurven (Teilmengen von $\mathbb{R}^2$), die nicht Graphen einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sein k”onnen. Es gibt jeweils x-Werte, denen zwei y-Werte zugeordnet werden.

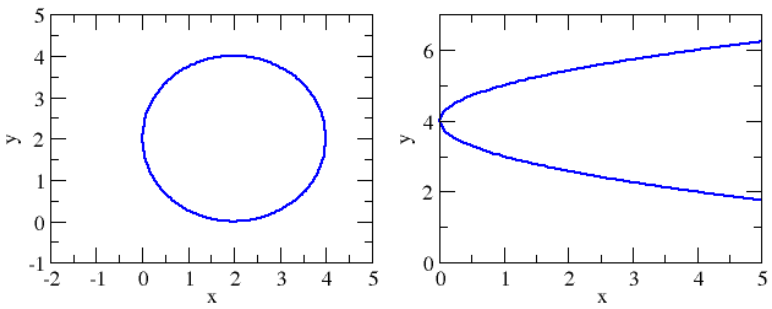


Bild 8

Im folgenden Bild sehen Sie eine Kurve, die den Graphen einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ darstellen kann, obwohl es anschaulich x-Werte gibt, die keinem y-Wert zugeordnet werden. Dies wird durch die Einschr”ankung von D auf die Menge $[1; \infty)$ erreicht.

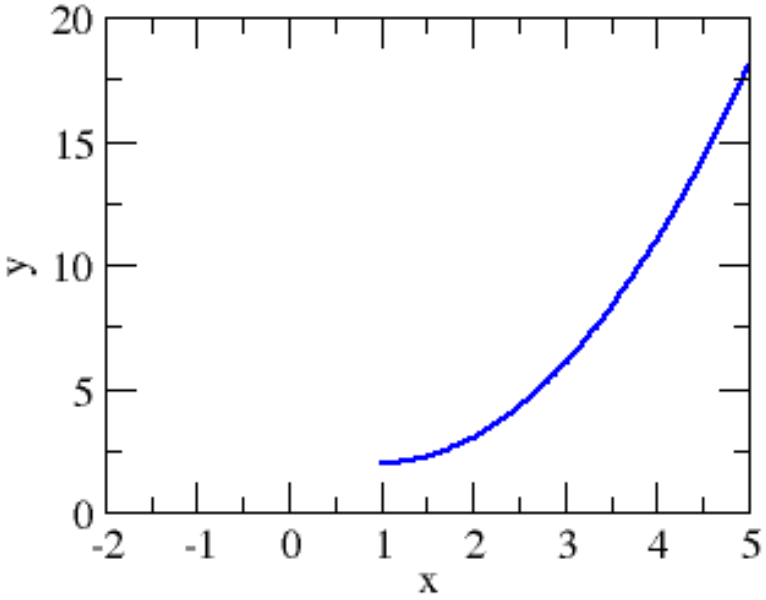


Bild 9

Definition 5:
Die Menge aller Funktionswerte $f(x)$ in $\mathbb{R}$, die von f für $x \in D$ angenommen werden, wird als Wertemenge W_f von f bezeichnet.

$$W_f = \{f(x) | x \in D\}.$$

Die Wertemenge W_f ist eine Teilmenge der Zielmenge Z_f von f.

Bemerkungen

- Also liegt y in der Wertemenge von f, wenn es mindestens ein x aus der Definitionsmenge von f mit $f(x) = y$ gibt.
- In der Schule ist es üblich, die Wertemenge mit W_f zu bezeichnen statt mit $f(D)$. Hier im Kurs werden beide Schreibweisen genutzt.
- Statt Wertemenge wird auch Wertebereich verwendet.
- Hier wird die Wertemenge nur für reellwertige Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ definiert. In Lerneinheit 8 wird sie für beliebige Funktionen $f : D \to Z$ definiert.

Wir betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$.

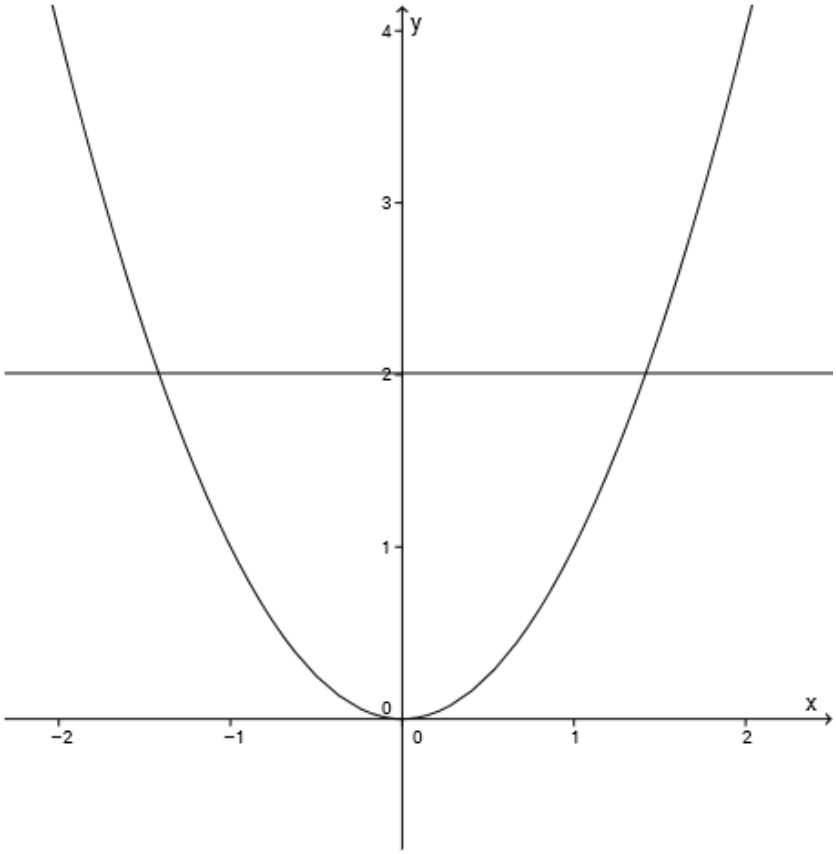


Bild 10

Die Wertemenge der Funktion f ist hier $f(\mathbb{R}) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$. Jedes $y > 0$ hat genau zwei Urbilder n"amlich $x = +\sqrt{y}$ und $x = -\sqrt{y}$. Nur $y = 0$ hat genau das eine Urbild $x = 0$.

Funktionen mit speziellen Eigenschaften bekommen besondere Namen, wie wir im Folgenden sehen werden.

Definition 6:
Sei $D \subset \mathbb{R}$. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Sei $x \in D$. Dann nennt man $y = f(x) \in \mathbb{R}$ das **Bild** von x. Umgekehrt sei $y \in f(D)$ mit $y = f(x)$ für ein $x \in D$. Dann nennt man x das **Urbild** von y.

Achtung: Die Aussage, dass Werte aus dem Wertebereich (Bilder) einer Funktion mindestens ein Urbild besitzen, schlie"st folgende M"oglichkeiten ein: Es kann genau ein Urbild geben oder es k"onnen mehrere Urbilder auftreten.

Definition 7:
Sei $D \subset \mathbb{R}$. Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen mit der gleichen Definitionsmenge. Dann kann man die **Summe**, die **Differenz** und das **Produkt** der beiden Funktionen definieren durch:

$$f+g: D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (f+g)(x) := f(x)+g(x),$$
$$f \cdot g: D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x),$$
$$f-g: D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto (f-g)(x) := f(x)-g(x).$$

Gilt $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, dann kann man auch den **Quotienten** definieren als:

$$\frac{f}{g}: D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Beispiel 4:

Gegeben seien die beiden Funktionen $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x-3$ und $g(x) = 2x$. Wir bilden die neuen Funktionen (Summe und Produkt) mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$. Die Wertemenge $\mathbb{R}$ bleibt unverändert.

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = x-3+2x = 3x-3$$

und

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x-3) \cdot 2x = 2x^2-6x.$$

Beispiel 5:

Gegeben seien die beiden Funktionen $f, g: D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x^2+4$ und $g(x) = 3x+1$ mit der gemeinsamen Definitionsmenge

$$D = \left\{ x \,|\, x > -\frac{1}{3} \right\}.$$

Die Quotientenbildung ist m"oglich, da $g(x) \neq 0$ f"ur alle Argumente x aus D. Es ergibt sich folgende neue Funktion (Quotient) mit dem Definitionsbereich D:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x^2+4}{3x+1}.$$

Definition 8:

Seien f und g Funktionen mit $D_f, D_g \subset \mathbb{R}$ und Zielmenge $\mathbb{R}$. Ein Punkt $(x; y)$ heißt **Schnittpunkt** von f und g, genau dann wenn $x \in D_f, x \in D_g$ und $y = f(x) = g(x)$ gilt.

Bemerkung

- Auch Berührpunkte sind Schnittpunkte.

Aufgaben

Aufgabe 1:
"Uberpr"ufen Sie jeweils, ob eine Funktion vorliegt oder nicht:

1. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 7x + 2$

Lösung:
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 7x + 2$ ist eine Funktion, da alle Werte aus der Definitionsmenge eingesetzt werden d"urfen und da jeder dieser Werte auch nur ein zugeh"origes Bild besitzt.

2. $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$

Lösung:
$j : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ ist keine Funktion, da die Definitionsmenge das Element 0 enth"alt, zu dem mit der Vorschrift kein Bild ermittelt werden kann.

Aufgabe 2:
Geben Sie jeweils die Wertemenge der Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$f(x) = 3x - 4$
und
$g(x) = -4x^2 + 22$
an.

Lösung:
Die Funktion f mit $f(x) = 3x - 4$ stellt eine Gerade dar. Ihre Definitionsmenge ist genauso wie ihre Wertemenge ganz $\mathbb{R}$. F"ur $y \in \mathbb{R}$ und $y = 3x - 4$ folgt, dass $x = \frac{y+4}{3}$ das Urbild von y ist.

Die Funktion g mit $g(x) = -4x^2 + 22$ ist eine um 22 nach oben verschobene und nach unten ge"offnete Parabel. Der Scheitelpunkt liegt bei $S = (0; 22)$ und es werden nur Werte $y \leq 22$ erreicht. Somit ist der Wertebereich $(-\infty; 22]$. Zu $y < 22$ kann man die zwei Urbilder durch Aufl"osen der Gleichung $y = -4x^2 + 22$ nach x errechnen.

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$. "Uberpr"ufen Sie zun"achst, ob die jeweilige Berechnung "uberhaupt zul"assig ist!

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 + 2 \quad$ und $\quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 3x$

Lösung:

Da die beiden Definitionsbereiche identisch sind, ist eine Addition, Subtraktion und Multiplikation zul"assig. Hierbei ergibt sich:

$$\begin{aligned} f+g: \quad \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad x &\mapsto x^2+2+3x \\ &= x^2+3x+2\,, \\ f-g: \quad \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad x &\mapsto x^2+2-3x \\ &= x^2-3x+2\,, \\ f\cdot g: \quad \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad x &\mapsto (x^2+2)\cdot 3x \\ &= 3x^3+6x\,. \end{aligned}$$

Die Division $f:g$ ist nicht erlaubt, da $g(0)=0$ gilt.

2. $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto \frac{2x^3}{x^2}$ und $g:\mathbb{R}\setminus\{0;1\}\longrightarrow\mathbb{R}, \quad x\mapsto \frac{1}{x(x-1)}$

Lösung:

Da f"ur die Definitionsmengen $\mathbb{R}\setminus\{0\}\neq\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ gilt, ist keine der vier Funktionen definierbar.

Erkl"arung *(Aufklapptext)*

Falls wir $f:\mathbb{R}\setminus\{0;1\}\to\mathbb{R}$ mit $x\mapsto\frac{2x^3}{x^2}$ definiert h"atten, also mit einer anderen Definitionsmenge, h"atte man alle vier zusammengesetzten Funktionen bilden k"onnen.

Aufgabe 4:

Bilden Sie $f+g$ mit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto -\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$ und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto \frac{3}{4}x^2-\frac{7}{4}x-\frac{3}{2}$. Zeichnen Sie alle drei Funktionen anschlie"send in das selbe Koordinatensystem. Wie ist $f+g$ graphisch aus f und g entstanden?

Lösung:

Es ergibt sich zun"achst rechnerisch:

$$\begin{aligned} f+g: \quad \mathbb{R}\to\ & \mathbb{R}, \\ x\mapsto\ & \left(-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{7}{4}x-\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

und damit

$$f+g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto \frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x$$

Die drei Graphen sehen folgenderma"sen aus:

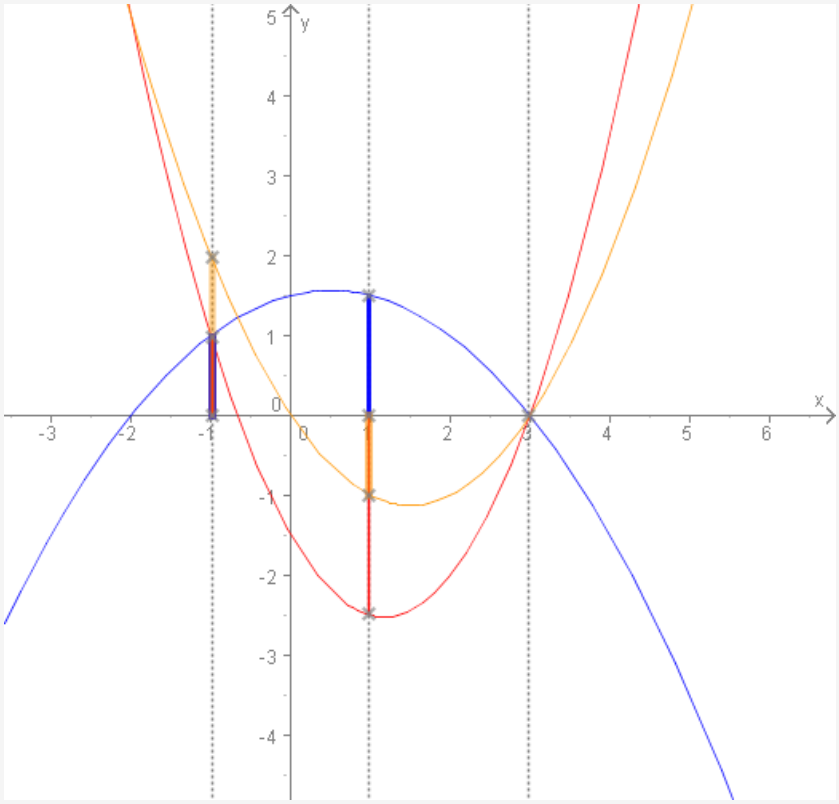


Bild 11 Graphen der Funktionen f (blau), g (rot) und $f+g$ (gelb).

Offensichtlich ergibt sich der Funktionsgraph der Additionsfunktion durch die Addition der Streckenl"angen der jeweiligen Funktionswerte an gleichen x - Stellen. Sind dabei wie an der ersten markierten Stelle beide Funktionswerte gleich gro"s (hier ist $f(-1) = g(-1) = 1$), so ist der zugeh"orige Funktionswert von $f+g$ genau doppelt so gro"s: $(f+g)(-1) = 2$.

Sind beide Funktionswerte Null, dann haben wir keine zu addierenden Strecken, damit ist auch der Funktionswert $(f+g)(x)$ gleich Null. Dies ist in unserem Beispiel an der Stelle $x = 3$ der Fall.

An der Stelle $x = 1$ haben wir einen negativen Funktionswert $f(1) = -2,5$ und einen positiven $g(1) = 1,5$. Die Streckenl"ange von $g(1)$ wird von $f(1)$ abgezogen und man erh"alt $(f+g)(1) = -1$.

Aufgabe 5:
Finden Sie den Fehler in folgender Aussage:

„$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x^2 + 3$ ist keine richtige Funktion, da alle $f(x) > 3$ zwei Urbilder haben und alle $f(x)$ unterhalb von 3 keine. Somit hat nicht jedes Bild genau ein Urbild und damit liegt keine Funktion vor."

Lösung:
Hier liegt eine Fehlvorstellung im Zusammenhang mit dem Funktionsbegriff vor. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x^2 + 3$ stellt durchaus eine Funktion dar, da jeder x-Wert (Urbild) auf genau

einen y-Wert (Bild) abgebildet wird.
Zwar gibt es zu mehreren Bildern auch zwei Urbilder, dies widerspricht jedoch nicht der Definition von Funktionen.