UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Virtuelles Eingangstutorium
studiVEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn
FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Virtuelles Eingangstutorium
VEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

khdm
kompetenzzentrum
hochschuldidaktik
mathematik

Aufgaben

Aufgabe 1:
"Uberpr"ufen Sie jeweils, ob eine Funktion vorliegt oder nicht:

1. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 7x + 2$

Lösung:
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 7x + 2$ ist eine Funktion, da alle Werte aus der Definitionsmenge eingesetzt werden d"urfen und da jeder dieser Werte auch nur ein zugeh"origes Bild besitzt.

2. $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$

Lösung:
$j : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x}$ ist keine Funktion, da die Definitionsmenge das Element 0 enth"alt, zu dem mit der Vorschrift kein Bild ermittelt werden kann.

Aufgabe 2:
Geben Sie jeweils die Wertemenge der Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$f(x) = 3x - 4$
und
$g(x) = -4x^2 + 22$
an.

Lösung:
Die Funktion f mit $f(x) = 3x - 4$ stellt eine Gerade dar. Ihre Definitionsmenge ist genauso wie ihre Wertemenge ganz $\mathbb{R}$. F"ur $y \in \mathbb{R}$ und $y = 3x - 4$ folgt, dass $x = \frac{y+4}{3}$ das Urbild von y ist.

Die Funktion g mit $g(x) = -4x^2 + 22$ ist eine um 22 nach oben verschobene und nach unten ge"offnete Parabel. Der Scheitelpunkt liegt bei $S = (0; 22)$ und es werden nur Werte $y \leq 22$ erreicht. Somit ist der Wertebereich $(-\infty; 22]$. Zu $y < 22$ kann man die zwei Urbilder durch Aufl"osen der Gleichung $y = -4x^2 + 22$ nach x errechnen.

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$. "Uberpr"ufen Sie zun"achst, ob die jeweilige Berechnung "uberhaupt zul"assig ist!

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 + 2 \quad$ und $\quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto 3x$

Lösung:

Da die beiden Definitionsbereiche identisch sind, ist eine Addition, Subtraktion und Multiplikation zul"assig. Hierbei ergibt sich:

$$\begin{aligned} f+g: \quad \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad x &\mapsto x^2+2+3x \\ &= x^2+3x+2\,, \\ f-g: \quad \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad x &\mapsto x^2+2-3x \\ &= x^2-3x+2\,, \\ f\cdot g: \quad \mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad x &\mapsto (x^2+2)\cdot 3x \\ &= 3x^3+6x\,. \end{aligned}$$

Die Division $f:g$ ist nicht erlaubt, da $g(0)=0$ gilt.

2. $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto \frac{2x^3}{x^2}$ und $g:\mathbb{R}\setminus\{0;1\}\longrightarrow\mathbb{R}, \quad x\mapsto \frac{1}{x(x-1)}$

Lösung:

Da f"ur die Definitionsmengen $\mathbb{R}\setminus\{0\}\neq\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ gilt, ist keine der vier Funktionen definierbar.

Erkl"arung *(Aufklapptext)*

Falls wir $f:\mathbb{R}\setminus\{0;1\}\to\mathbb{R}$ mit $x\mapsto\frac{2x^3}{x^2}$ definiert h"atten, also mit einer anderen Definitionsmenge, h"atte man alle vier zusammengesetzten Funktionen bilden k"onnen.

Aufgabe 4:

Bilden Sie $f+g$ mit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto -\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$ und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto \frac{3}{4}x^2-\frac{7}{4}x-\frac{3}{2}$. Zeichnen Sie alle drei Funktionen anschlie"send in das selbe Koordinatensystem. Wie ist $f+g$ graphisch aus f und g entstanden?

Lösung:

Es ergibt sich zun"achst rechnerisch:

$$\begin{aligned} f+g: \quad \mathbb{R}\to\ & \mathbb{R}, \\ x\mapsto\ & \left(-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{4}x^2-\frac{7}{4}x-\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

und damit

$$f+g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto \frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x$$

Die drei Graphen sehen folgenderma"sen aus:

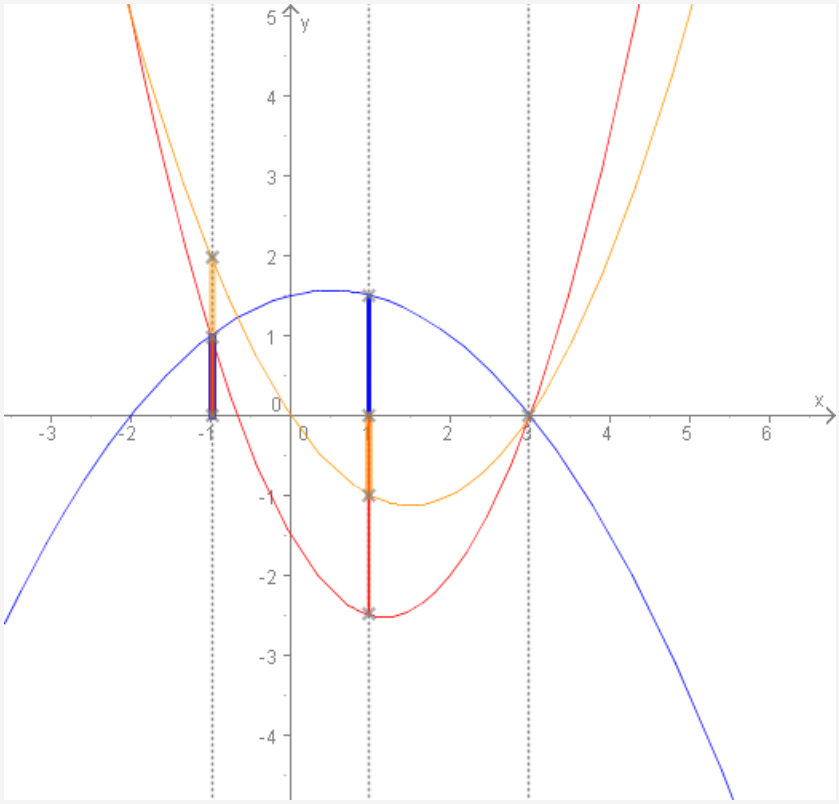


Bild 11 Graphen der Funktionen f (blau), g (rot) und $f+g$ (gelb).

Offensichtlich ergibt sich der Funktionsgraph der Additionsfunktion durch die Addition der Streckenl"angen der jeweiligen Funktionswerte an gleichen x - Stellen. Sind dabei wie an der ersten markierten Stelle beide Funktionswerte gleich gro"s (hier ist $f(-1) = g(-1) = 1$), so ist der zugeh"orige Funktionswert von $f+g$ genau doppelt so gro"s: $(f+g)(-1) = 2$.

Sind beide Funktionswerte Null, dann haben wir keine zu addierenden Strecken, damit ist auch der Funktionswert $(f+g)(x)$ gleich Null. Dies ist in unserem Beispiel an der Stelle $x = 3$ der Fall.

An der Stelle $x = 1$ haben wir einen negativen Funktionswert $f(1) = -2,5$ und einen positiven $g(1) = 1,5$. Die Streckenl"ange von $g(1)$ wird von $f(1)$ abgezogen und man erh"alt $(f+g)(1) = -1$.

Aufgabe 5:
Finden Sie den Fehler in folgender Aussage:

„$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x^2 + 3$ ist keine richtige Funktion, da alle $f(x) > 3$ zwei Urbilder haben und alle $f(x)$ unterhalb von 3 keine. Somit hat nicht jedes Bild genau ein Urbild und damit liegt keine Funktion vor."

Lösung:
Hier liegt eine Fehlvorstellung im Zusammenhang mit dem Funktionsbegriff vor. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x^2 + 3$ stellt durchaus eine Funktion dar, da jeder x-Wert (Urbild) auf genau

einen y-Wert (Bild) abgebildet wird.
Zwar gibt es zu mehreren Bildern auch zwei Urbilder, dies widerspricht jedoch nicht der Definition von Funktionen.