UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Virtuelles Eingangstutorium
studiVEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn
FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Virtuelles Eingangstutorium
VEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

khdm
kompetenzzentrum
hochschuldidaktik
mathematik

LE 5 - Elementare Funktionen

5.2 Lineare Funktionen

Im Folgenden finden Sie die Abschnitte:

Übersicht ..... S. 1
Hinführung ..... S. 2
Inhalte mit Erklärungen ..... S. 7
Aufgaben ..... S. 12
Anwendung ..... S. 20

Übersicht

- Einf"uhrung linearer Funktionen durch Vergleich zweier Stromtarife
- Eigenschaften und Darstellungsweisen linearer Funktionen
- Aufgaben und Anwendungen

Hinführung

Die Stadtwerke Kassel bieten verschiedene Stromtarife an. Beim Tarif *specialpro* setzen sich die Kosten aus einer Servicepauschale von 118, 32 EUR pro Jahr und einem Arbeitspreis von 13, 08 Ct/kWh zusammen. Der Tarif *procity* besteht aus einer Servicepauschale von 58, 99 EUR pro Jahr und einem Arbeitspreis von 17, 46 Ct/kWh.

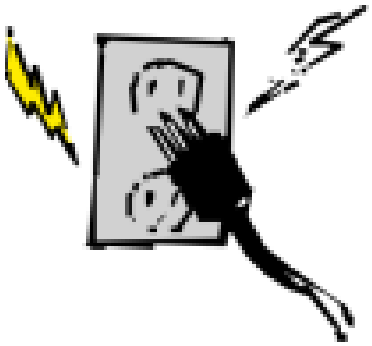


Bild 1

	Jahresverbrauch in kWh	Preis in EUR Tarif *specialpro*	Preis in EUR Tarif *procity*
Haushalt 1	1200	275, 28	268, 51
Haushalt 2	1300	288, 36	285, 97
Haushalt 3	1600	327, 60	338, 35
Haushalt 4	2000	379, 92	408, 19
Haushalt 5	3000	510, 72	582, 79

Tabelle 1: "Ubersicht "uber den Jahresstromverbrauch von f"unf verschiedenen Haushalten mit den Kosten in zwei Tarifen.

Die Tabelle gibt jeweils f"unf (Zuordnungs-)Paare (Jahresstromverbauch, zugeh"origer Preis) an. Sie gibt die Verh"altnisse allerdings nur grob wieder. Wenn die Stadtwerke eine Rechnung erstellen, wird der von der Kundin gew"ahlte Tarif (*specialpro* oder *procity*), der Jahresstromverbrauch und der zu zahlende Betrag aufgef"uhrt. Dieser Betrag entsteht wie folgt:

$$\begin{array}{rl} & \text{Arbeitspreis EUR/kWh} \cdot \text{Stromverbrauch kWh} \\ (*) & + \text{Servicepauschale EUR} \\ = & \text{Rechnungsbetrag EUR.} \end{array}$$

Nehmen wir an, eine Kundin mit einem Jahresstromverbrauch von 3578 kWh hat den Tarif *procity* gew"ahlt. Die Stadtwerke stellen dann folgende Rechnung aus. Zu der Servicepauschale in H"ohe von 58, 99 EUR kommen noch Kosten in H"ohe von 17, 46 Ct/kWh ·3578 kWh. Dies ergibt den Rechnungsbetrag:

$$0,1746\,\text{EUR/kWh} \cdot 3578\,\text{kWh} + 58,99\,\text{EUR} \;=\; 683,71\,\text{EUR}.$$

Allgemein kann man nun f"ur einen beliebigen Jahresstromverbauch x den zugeh"origen Rechnungsbetrag im Tarif *procity* ausrechnen:

$$0,1746\,\text{EUR/kWh} \cdot x\,\text{kWh} + 58,99\,\text{EUR}.$$

Lassen wir die Einheiten weg und schreiben y f"ur den Rechnungsbetrag, so ergibt sich folgende Berechnungsformel f"ur den Tarif *procity*:

$$y = 0,1746 \cdot x + 58,99.$$

Ganz analog ergibt sich im Tarif *specialpro*:

$$y = 0,1308 \cdot x + 118,32.$$

Man kann die Zusammenhänge also durch **lineare Funktionen** mit den **Funktionsvorschriften** $f(x) = 0,1746 \cdot x + 58,99$ bzw. $g(x) = 0,1308 \cdot x + 118,32$ angeben. Der gro"se Vorteil von Funktionen gegen"uber der Tabelle besteht nun darin, dass sie Aufschluss "uber *alle* Wertepaare liefern.

Zu Funktionen gehören immer auch ein Definitions- und Zielmenge. In diesem Fall umfasst die **Definitionsmenge** die Menge aller Zahlen, die man für den Stromverbrauch einsetzen kann. Wir nehmen dafür alle positiven reellen Zahlen: $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$. Die Zielmenge ist die Menge, in der die möglichen Funktionswerte, also Rechnungsbeträge, liegen. Auch sie können nicht negativ sein. Deshalb wählen wir auch hier $\mathbb{R}^+$.

Reale Messwerte sind zwar rationale Zahlen (der Stromzähler liefert beispielsweise nur eine bestimmte Anzahl an Nachkommastellen), aber es ist in der Mathematik üblich, idealisierend Funktionen über $\mathbb{R}$ zu betrachten, da die mathematische Theorie hierfür in gewissem Sinne einfacher ist.

Man kann die Funktionen daher definieren als:

$$\begin{aligned} f: &\quad \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \quad \text{mit} \quad f(x) = 0,1746 \cdot x + 58,99 \\ g: &\quad \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \quad \text{mit} \quad g(x) = 0,1308 \cdot x + 118,32 \end{aligned}$$

Die lineare Funktion Stromtarif gibt also den Zusammenhang „Jahresverbrauch $\mapsto$ Strompreis“ an. Bei gegebenem Verbrauch l"asst sich der Rechnungsbetrag ermitteln. Die umgekehrte Problemstellung ist oft genauso interessant. Bei bekanntem Rechnungsbetrag wird nach dem Verbrauch gefragt. Wie viel Strom wurde denn eigentlich verbraucht, wenn die Rechnung so hoch ist? Man kann auf diesem Wege insbesondere die ausgestellte Rechnung kontrollieren. Im Tarif *specialpro* gilt nach Aufl"osen der Gleichung nach der Variablen x:

$$x \;=\; \frac{1}{0,1308} \cdot (y - 118,32)\,.$$

Beispielsweise geh"ort zu einem Rechnungsbetrag von 300 EUR ein Jahresverbrauch von 1388,99 kWh, denn

$$\frac{1}{0,1308} \cdot (300 - 118,32) = 1388,99\,.$$

Wie im vorangegangenen Teil dieses Kurses beschrieben wurde, ist es oft hilfreich, den Graph einer Funktion zu betrachten. Eine graphische Darstellung hat den Vorteil, dass man den Verlauf der Wertepaare veranschaulichen kann. Ein weiterer großer Vorteil besteht darin, dass man unterschiedliche Stromtarife auf einen Blick vergleichen kann. Das folgende Video zeigt noch einmal, wie man von einer Funktionsvorschrift zu einer graphischen Darstellung gelangt.

Preview fehlt:
`h5p/311wertetabelle`

Video 1 *(nur in digitaler Version)* Gezeigt wird, wie aus den gegebenen Zuordnungsvorschriften (*procity* und *specialpro*) eine (Werte-)Tabelle erstellt wird. Aus dieser Tabelle werden dann die einzelnen Wertepaare in ein Koordinatensystem "ubertragen. Man stellt fest, dass beide Graphen Geraden sind.

Der Weg "uber die Wertetabelle zum Graphen kann mit Computereinsatz bewerkstelligt und leicht verfeinert werden. Man bekommt aber in vielen F"allen keine Einsicht in die Eigenschaften des Graphen. Wie kann man aus der Funktionsvorschrift Eigenschaften des Graphen finden, welche eine Veranschaulichung erm"oglichen? Was haben unsere beiden Vorschriften gemeinsam? Was zeichnet sie aus? Wenn man beide Funktionsgleichungen betrachtet

$$\begin{aligned} y &= 0,1746 \cdot x + 58,99 \\ y &= 0,1308 \cdot x + 118,32 \end{aligned}$$

und mit ihren Graphen vergleicht, so stellt man fest, dass sich der Wert der Servicepauschale leicht wiederfinden l"asst. Graph 1 (*procity*) schneidet die y-Achse bei $58,99$, Graph 2 (*specialpro*) bei $118,32$. Ist der Stromverbrauch gleich Null, so ist der Preis gem"a"s Gleichung (*) gleich der Servicepauschale.

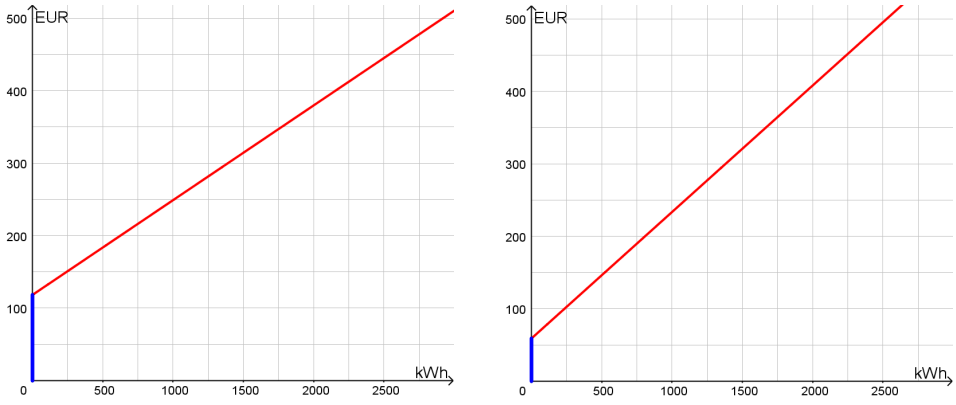


Bild 2 Beim Stromverbrauch $x = 0$ wird die Servicepauschale (blau) im Graphen auf der y-Achse sichtbar: *specialpro* (links) *procity* (rechts)

Auch der Arbeitspreis (Preis pro kWh) erscheint jeweils in den Graphen. Bei positivem Stromver-

brauch ergeben sich folgende Verh"altnisse:

$$\begin{aligned} \frac{y - 58,99}{x} &= 0,1746\,, \\ \frac{y - 118,32}{x} &= 0,1308\,. \end{aligned}$$

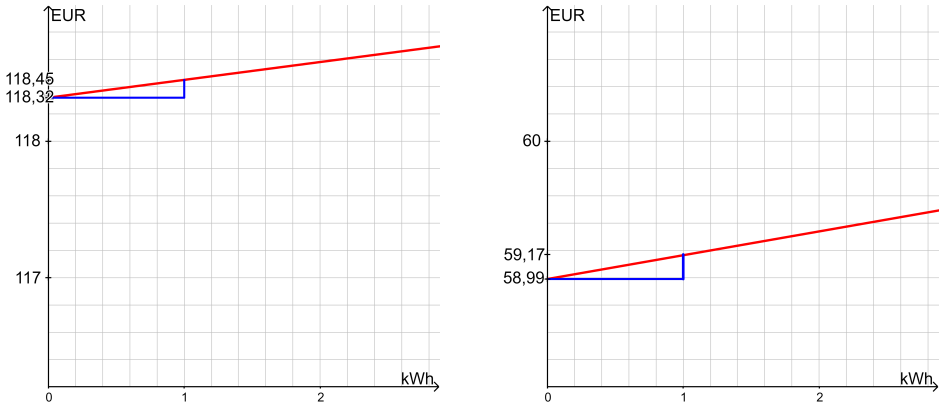


Bild 3 Man kann also den Arbeitspreis als Streckenverh"altnis in einem Dreieck (Steigungsdreieck) veranschaulichen. Man kann den Arbeitspreis direkt einzeichnen, wenn man den Stromverbrauch $x = 1$ betrachtet: *specialpro* (links) *procity* (rechts)

F"ur den Verbraucher stellt sich die Frage nach dem g"unstigsten Tarif. Der Tarif *procity* hat eine niedrigere Servicepauschale als der Tarif *specialpro*. Daf"ur ist bei *specialpro* der Arbeitspreis h"oher als bei *procity*. Ist der Jahresverbrauch gleich Null, so ist der Tarif *procity* g"unstiger. Bei hohem Verbrauch ist der Tarif *specialpro* dagegen attraktiver. Wir suchen den Verbrauch, bei dem die Stromkosten gleich sind. Die Stromkosten werden also gleichgesetzt

$$0,1746 \cdot x_s + 58,99 = 0,1308 \cdot x_s + 118,32$$

und wir bekommen den Verbrauch

$$(0,1746 - 0,1308)x_s = 118,32 - 58,99$$

bzw.

$$x_s = \frac{59,33}{0,0438} \approx 1354,5662\,.$$

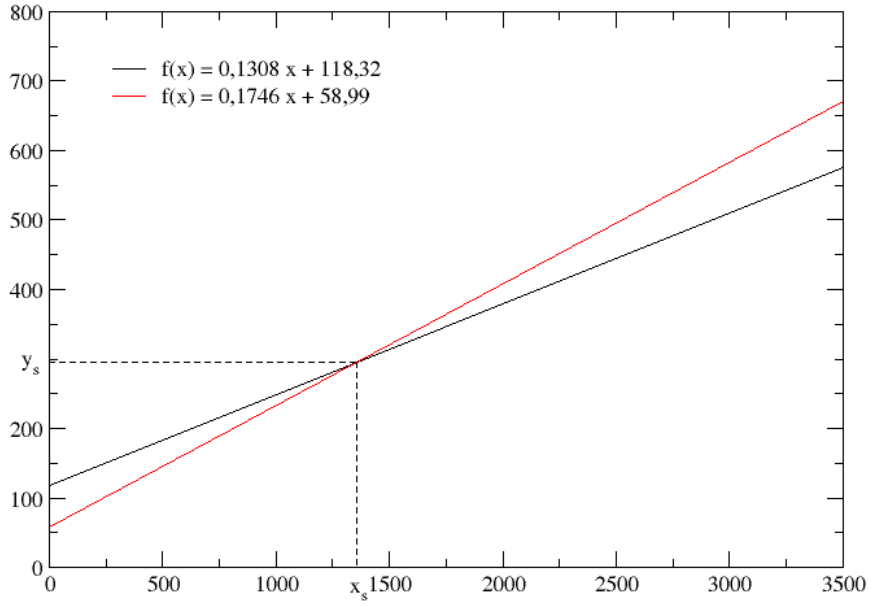


Bild 4

Der Tarif *procity* ist also g"unstiger, wenn der Verbrauch unterhalb von x_s liegt. Achtung: Das konnte man aufgrund der Beispieltabelle nicht vermuten. Liegt der Verbrauch oberhalb von x_s, so ist der Tarif *specialpro* g"unstiger. Beide Tarife ergeben bei einem Verbrauch von x_s denselben Preis:

$$y_s = 0,1746 \cdot x_s + 58,99 = 0,1308 \cdot x_s + 118,32 \approx 295,4972\,.$$

Bezeichnen wir nun die Servicepauschale mit b und den Arbeitspreis mit m, so ergibt sich allgemein die Gleichung

$$y = m \cdot x + b,$$

wobei die Variablae x für den Jahresverbrauch an Strom und die Variable y für den Gesamtpreis der Stromrechnung steht.

Mit Funktionsvorschriften der Gestalt $y = m \cdot x + b$ haben wir den Zusammenhang zwischen Stromverbrauch und Rechnungspreis beschrieben. Die Parameter m bzw. b standen dabei f"ur den Arbeitspreis bzw. die Servicepauschale in den jeweiligen Stromtarifen. Im Allgemeinen hat man f"ur die Variablen x und y nicht konkrete Gr"o"sen oder Ma"szahlen, sondern x und y sind reelle Zahlen.

Inhalte mit Erklärungen

Lineare Funktionen

Definition 1:
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **lineare Funktion**, wenn sie für zwei reelle Zahlen m und b durch $f(x) = mx + b$ beschrieben werden kann.

Bemerkungen

- m und b werden auch Parameter genannt.
- Oft schreibt man bei linearen Funktionen $y = mx + b$ anstelle von $f(x) = mx + b$.
- Wenn $m \neq 0$ und $b = 0$ ist, spricht man von einer **proportionalen Zuordnung** oder **proportionalen Funktion**. Diese verl"auft immer durch den Ursprung und erf"ullt die Gleichung $f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$.
- Haben wir eine lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Zuordnung

  $$y = mx + b \quad \text{mit} \quad m \neq 0\,,$$

  so wird jeder Funktionswert y an genau einer Stelle angenommen, nämlich bei:

  $$x = \frac{y - b}{m}\,.$$

- Im Ausnahmefall $m = 0$ besitzen alle Argumente x den Funktionswert $y = b$. Funktionswerte $y \neq b$ werden in diesem Fall nicht angenommen.
- Man erkennt lineare Funktionen manchmal erst nach dem Umformen der Funktionsvorschrift. So ist beispielsweise die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 4x - 2x^2 + 1 + x^2 + 7 + x^2$ auch eine lineare Funktion, da man durch Umformung sieht, dass f als $f(x) = 4x + 8$ dargestellt werden kann.

Eine Gerade ist eindeutig durch Vorgabe von zwei verschiedenen Punkten festgelegt. Deshalb kann man bei Vorgabe zweier Punkte $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ mit $x_1 \neq x_2$ auch genau eine lineare Funktion finden, deren Graph durch diese beiden Punkte verläuft. Es muss gelten

$$y_1 = mx_1 + b \,\text{und}\, y_2 = mx_2 + b\,.$$

Hieraus folgt durch Subtraktion der beiden Gleichungen

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1).$$

Da $x_2 - x_1 \neq 0$ ist, ergibt sich

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Setzt man m in eine der beiden Ausgangsgleichungen ein, so bekommt man (Einsetzen in die erste Gleichung):

$$y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_2 + b\,,$$

bzw.

$$\begin{aligned} b &= y_2 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_2 \\ &= \frac{y_2(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)x_2}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}. \end{aligned}$$

Damit sind m und b bestimmt und man kann die Funktionsvorschrift eindeutig angeben.

Satz 1:
Eine lineare Funktion wird durch die Vorgabe der Funktionswerte an zwei verschiedenen Stellen eindeutig festgelegt.

Ist eine lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = mx + b$ gegeben, so gilt f"ur zwei beliebige Argumente $x_1 \neq x_2$ mit Funktionswerten y_1 bzw. y_2 die Beziehung

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,.$$

Unabh"angig von den gew"ahlten Punkten stellt sich dasselbe Verh"altnis der Differenz der Funktionswerte zur Differenz der Argumente ein: Die Steigung ist konstant, nämlich $m \in \mathbb{R}$. Die Punkte $P_1 = (x_1; y_1)$ und $P_2 = (x_2; y_2)$ kann man zusammen mit dem Hilfspunkt $P_H(x_2; y_1)$ in ein Koordinatensystem einzeichnen und als Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks auffassen. Dieses Dreieck hei"st Steigungsdreieck. Der Parameter m ergibt sich als Streckenverh"altnis des Steigungsdreiecks.

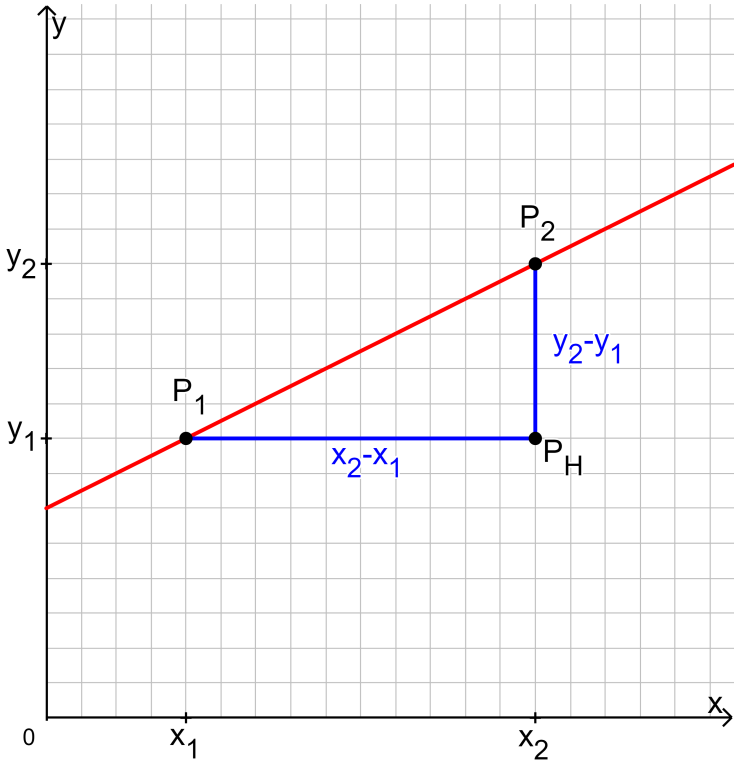


Bild 5 Steigungsdreieck

Zur Verdeutlichung der konstanten Steigung betrachten wir Argumente, die jeweils im Abstand Δx (siehe Bild „Treppe der Steigungsdreiecke“) auf der Zahlengerade aufeinander folgen

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \Delta x\,, \\ x_2 &= x_1 + \Delta x = x_0 + 2\cdot\Delta x\,, \\ x_3 &= x_2 + \Delta x = x_0 + 2\cdot\Delta x + \Delta x = x_0 + 3\cdot\Delta x\,, \\ &\dots \\ x_k &= x_0 + k\cdot\Delta x\,. \end{aligned}$$

F”ur die zugeh”origen Funktionswerte gilt dann

$$y_k = mx_k + b = m(x_0 + k\cdot\Delta x) + b = mx_0 + b + mk\cdot\Delta x$$

und

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} = m, \quad \text{d.h. } y_{k+1} - y_k = m\cdot\Delta x\,.$$

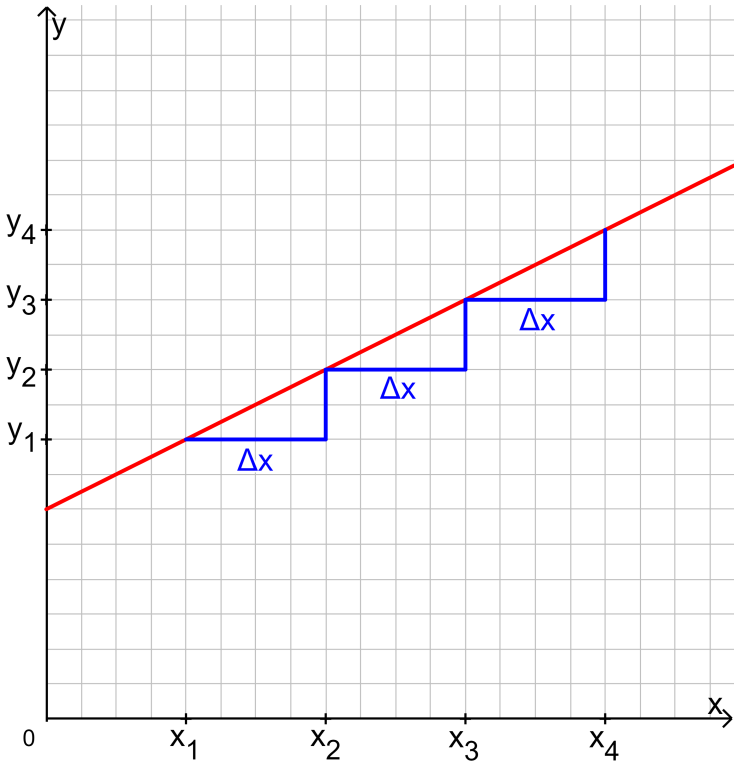


Bild 6 Treppe der Steigungsdreiecke

Diese Eigenschaft einer linearen Funktion kann man verbal auch so beschreiben: „Zu gleichen Zuwächsen Δx gehören immer gleiche Zuwächse $\Delta y = m\cdot\Delta x$.“

Info 1:
Der Graph einer linearen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + b$ (mit $m, b \in \mathbb{R}$) ist eine Gerade. Man bezeichnet m als Anstieg bzw. **Steigung** und b als y**-Achsenabschnitt** der Geraden. Der Anstieg kann jedem Steigungsdreieck entnommen werden.

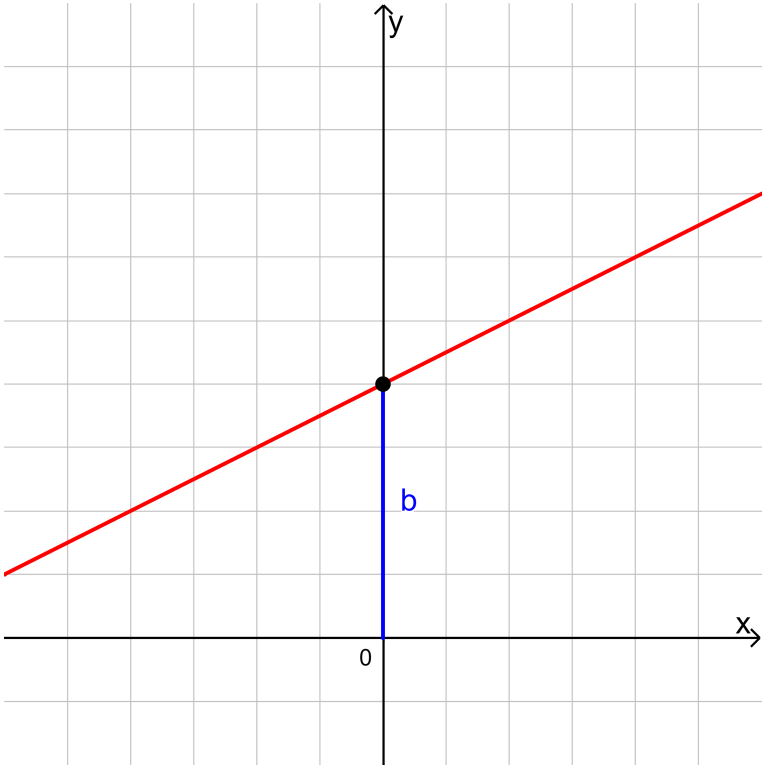


Bild 7 y-Achsenabschnitt einer Geraden

Eine "ahnlich wichtige Rolle wie der Schnittpunkt einer Geraden mit der y-Achse spielt der Schnittpunkt mit der x-Achse.

Definition 2:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine lineare Funktion mit $f(x) = mx + b$ und $m, b \in \mathbb{R}$. Eine Zahl $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt genau dann **Nullstelle**, wenn $f(x_0) = mx_0 + b = 0$ gilt.

Ist $m \neq 0$, so besitzt eine lineare Funktion genau eine Nullstelle, da die Gleichung

$$0 = mx_0 + b$$

genau eine L"osung hat:

$$x_0 = -\frac{b}{m}.$$

Bemerkung

- Die Nullstelle ist die Stelle, an welcher der Graph von f die x-Achse schneidet.
- Ist $m = 0$, so ist entweder jede Stelle eine Nullstelle oder keine Stelle eine Nullstelle.

Beispiel 1:
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -4x+8$. Dann ist $x_0 = 2$ eine Nullstelle, denn $-4 \cdot 2+8 = -8+8 = 0$.

Wie bei den Stromtarifen und der Frage nach dem g"unstigsten Tarif stellt sich allgemein das Problem, den Schnittpunkt der Graphen zweier linearer Funktionen zu finden. Seien die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = m_1 \cdot x + b_1$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = m_2 \cdot x + b_2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $m_1, m_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ gegeben.

Für einen Schnittpunkt $(x_s; y_s)$ muss gelten

$$m_1 \cdot x_s + b_1 = m_2 \cdot x_s + b_2$$

und man erhält

$$(m_1 - m_2) \cdot x_s = b_2 - b_1.$$

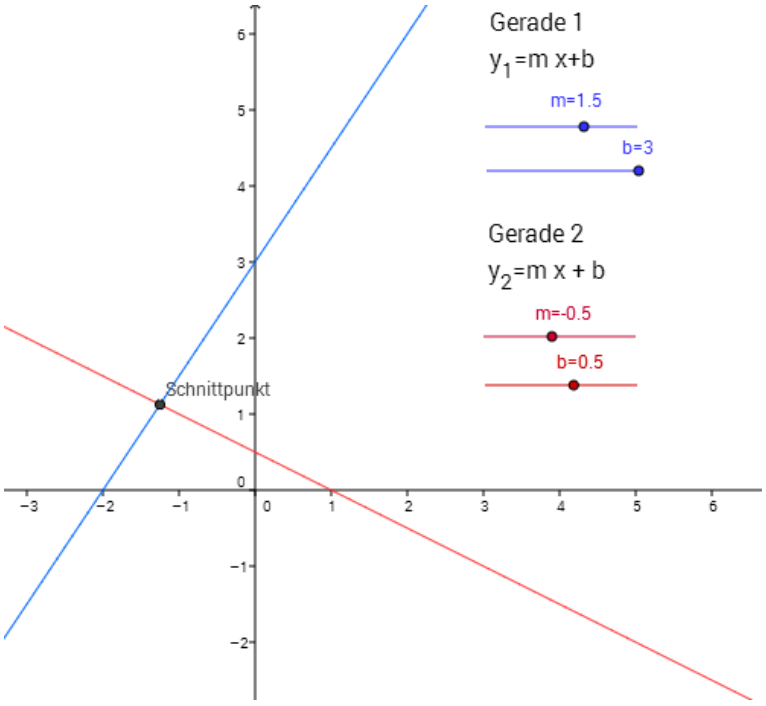
Ist $m_1 \neq m_2$, so bekommen wir genau einen Schnittpunkt $S = (x_s; y_s)$ mit

$$x_s = \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2}, \quad y_s = m_1 x_s + b_1.$$

Ist $m_1 = m_2$, so ist stets

$$(m_1 - m_2) \cdot x = 0\,.$$

Die Geraden fallen dann zusammen, falls zus"atzlich $b_1 = b_2$ gilt. Falls aber $b_1 \neq b_2$ gilt, haben wir parallele Geraden, die nicht zusammenfallen und keinen Schnittpunkt besitzen.



Interaktion 1 *(nur in digitaler Version)*

Satz 2:
Die Graphen zweier linearer Funktionen k"onnen sich in genau einem Punkt schneiden, zusammenfallen oder parallel sein.

Aufgaben

Aufgabe 1:
Gegeben ist die lineare Funktion:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x + \frac{1}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Erg"anzen Sie folgende Tabellen:

Argument	10	-10	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{5}$	$3a$	$-2a$
Funktionswert	?	?	?	?	?	?	?

Argument	?	?	?	?	?	?	?
Funktionswert	-1	0	2	$\frac{5}{2}$	$-\frac{4}{3}$	$24b$	$-4b$

Lösung:

Die Funktionswerte in der ersten Tabelle berechnen sich durch Einsetzen des zugeh"origen Arguments f"ur x in die Funktionsvorschrift $y = -x + \frac{1}{2}$. So ergibt sich z.B. der Funktionswert zum Argument $x = 10$ als $y = -10 + \frac{1}{2} = -\frac{19}{2}$. Setzt man das Argument $x = -10$ ein, erh"alt man $y = -(-10) + \frac{1}{2} = 10 + \frac{1}{2} = \frac{21}{2}$.
Auf diesem Weg erhalten wir die folgende Tabelle:

Argument	10	-10	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{5}$	$3a$	$-2a$
Funktionswert	$-\frac{19}{2}$	$\frac{21}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{9}{10}$	$-3a + \frac{1}{2}$	$2a + \frac{1}{2}$

Um nun die Argumente aus der zweiten Tabelle zu berechnen, m"ussen wir zun"achst die Gleichung nach x aufl"osen, da wir nun y gegeben haben und das jeweils zugeh"orige x suchen:

$$\begin{aligned} y &= -x + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad y - \frac{1}{2} &= -x \\ \Leftrightarrow \quad -y + \frac{1}{2} &= x \end{aligned}$$

Damit berechnen wir nun z.B. f"ur $y = -1$ das Argument $x = -(-1) + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Analog k"onnen wir nun auch die zweite Tabelle vervollst"andigen:

Argument	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-2	$\frac{11}{6}$	$-24b + \frac{1}{2}$	$4b + \frac{1}{2}$
Funktionswert	-1	0	2	$\frac{5}{2}$	$-\frac{4}{3}$	$24b$	$-4b$

Aufgabe 2:
Gegeben sind die linearen Funktionen $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = 2x - 5$ und $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = -\frac{5}{6}x + 1$. Berechnen Sie die Nullstellen beider Funktionen und den Schnittpunkt der zugeh"origen Graphen.

Lösung:

Nullstelle von $y = 2x - 5$:

$$\begin{aligned} & 0 &=& 2x - 5 \\ \Leftrightarrow\quad & 5 &=& 2x \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{5}{2} &=& x \end{aligned}$$

Damit hat $y = 2x - 5$ seine Nullstelle bei $x = \frac{5}{2}$.

Nullstelle von $y = -\frac{5}{6}x + 1$:

$$\begin{aligned} & 0 &=& -\frac{5}{6}x + 1 \\ \Leftrightarrow\quad & -1 &=& -\frac{5}{6}x \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{6}{5} &=& x\,. \end{aligned}$$

Die Nullstelle von $y = -\frac{5}{6}x + 1$ ist demnach $x = \frac{6}{5}$.

Zur Berechnung des Schnittpunkts der beiden Graphen setzen wir die Funktionsterme gleich und erhalten

$$\begin{aligned} & 2x - 5 &=& -\frac{5}{6}x + 1 \\ \Leftrightarrow\quad & 2x &=& -\frac{5}{6}x + 6 \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{12}{6}x + \frac{5}{6}x &=& 6 \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{17}{6}x &=& 6 \\ \Leftrightarrow\quad & x &=& \frac{36}{17}\,. \end{aligned}$$

Die Graphen schneiden sich demnach an der Stelle $x = \frac{36}{17}$. Um den Schnittpunkt zu bestimmen, fehlt allerdings noch der zugeh"orige Funktionswert, den wir durch Einsetzen von $x = \frac{36}{17}$ in eine der beiden Funktionsvorschriften erhalten:

$$y = 2 \cdot \frac{36}{17} - 5 = \frac{2 \cdot 36 - 5 \cdot 17}{17} = -\frac{13}{17}\,.$$

Der Schnittpunkt der beiden Graphen ist also $S = \left(\frac{36}{17}; -\frac{13}{17}\right)$.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift der linearen Funktion, deren Graph durch den Punkt $P(-3; 2)$ geht und die Steigung $m = -\frac{2}{5}$ besitzt.

$f(x) =$?

Lösung:

Die allgemeine Funktionsvorschrift einer linearen Funktion lautet $y = m \cdot x + b$. Mit $m = -\frac{2}{5}$ erhalten wir die Funktionsvorschrift $y = -\frac{2}{5}x + b$.
Um letztlich noch b zu bestimmen, setzten wir die Koordinaten des Punktes P, durch den die Gerade laufen soll, in die Funktionsvorschrift ein:

$$\begin{aligned} & 2 &=& -\frac{2}{5} \cdot (-3) + b \\ \Leftrightarrow \quad & 2 &=& \frac{6}{5} + b \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{10}{5} - \frac{6}{5} &=& b \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{4}{5} &=& b\,. \end{aligned}$$

Somit lautet die gesuchte Funktionsvorschrift

$$y = -\frac{2}{5} \cdot x + \frac{4}{5}\,.$$

Alternativ h"atten wir auch die Punkt - Richtungs - Form $\frac{y-y_1}{x-x_1} = m$ verwenden k"onnen und w"aren dabei nat"urlich auf das selbe Ergebnis gekommen:

$$\begin{aligned} & \frac{y-2}{x-(-3)} &=& -\frac{2}{5} \\ \Leftrightarrow \quad & y-2 &=& -\frac{2}{5} \cdot (x+3) \\ \Leftrightarrow \quad & y-2 &=& -\frac{2}{5}x - \frac{6}{5} \\ \Leftrightarrow \quad & y &=& -\frac{2}{5}x - \frac{6}{5} + 2 \\ \Leftrightarrow \quad & y &=& -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift der linearen Funktion, deren Graph durch die beiden Punkte $P_1(-1;3)$ und $P_2(3;7)$ geht.

$f(x) =$?

Lösung:

Zur L"osung dieser Aufgabe k"onnen wir entweder ausgehend von der Funktionsvorschrift $y = m \cdot x + b$ die beiden Punkte einsetzen, sodass wir die beiden Funktionsvorschriften $3 = m \cdot (-1) + b$ und $7 = m \cdot 3 + b$ erhalten. Durch Aufl"osen und Einsetzten k"onnen wir dann sowohl m als auch b bestimmen.

Alternativ wollen wir hier nun die Zwei - Punkte - Form $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ verwenden.

Dazu setzten wir lediglich die vorgegebenen Koordinaten von P_1 und P_2 ein und l"osen nach y auf:

$$\begin{aligned} \frac{y-3}{x-(-1)} &= \frac{7-3}{3-(-1)} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{y-3}{x+1} &= \frac{4}{4} \\ \Leftrightarrow \quad y-3 &= x+1 \\ \Leftrightarrow \quad y &= x+4. \end{aligned}$$

Die gesuchte Geradengleichung lautet also $y = x + 4$.

Beispiel 2:

Wir betrachten die linearen Funktionen, die für alle $x \in \mathbb{R}$ und mit $m \in \mathbb{R}$ durch die Funktionsvorschriften

$$y = mx + 3 \quad \text{und} \quad y = 2x + 1$$

beschrieben werden und untersuchen diese auf einen Schnittpunkt $S(x_s; y_s)$.
Ist $m = 2$, so sind die Geraden parallel und besitzen keinen Schnittpunkt.
Ist $m \neq 2$, so setzen wir die Funktionsvorschriften gleich

$$mx_s + 3 = 2x_s + 1 \quad \Leftrightarrow \quad (m-2)x_s = -2$$

und bekommen

$$x_s = -\frac{2}{m-2}, \quad y_s = 2x_s + 1 = -\frac{4}{m-2} + 1.$$

Aufgabe 5:

Wie muss man m und b w"ahlen, damit die Geraden

$$y = mx + b, \quad 3x + 5y = 1$$

genau einen Schnittpunkt besitzen? Wie muss man m und b w"ahlen, damit die Geraden zusammenfallen?

Lösung:

Um die Fragen leichter beantworten zu k"onnen, l"osen wir die rechte Funktionsvorschrift zun"achst nach y auf:

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 1 \\ \Leftrightarrow \quad 5y &= 1 - 3x \\ \Leftrightarrow \quad y &= -\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Es ist klar, dass f"ur $m = -\frac{3}{5}$ und $b = \frac{1}{5}$ die beiden Geraden zusammenfallen.
Bei gleicher Steigung, aber unterschiedlichem b sind die Geraden parallel aber nicht identisch

und k"onnen sich somit nicht schneiden. D.h. f"ur $m = -\frac{3}{5}$ und $b \neq \frac{1}{5}$ haben die beiden Geraden keinen Schnittpunkt.
In allen anderen F"allen, also f"ur $m \neq -\frac{3}{5}$, gilt für den Schnittpunkt einerseits (aufgrund der ersten Funktionsvorschrift)

$$y_s = m \cdot x_s + b$$

und andererseits (aufgrund der nach y aufgelösten zweiten Gleichung)

$$y_s = -\frac{3}{5}x_s + \frac{1}{5}.$$

Diese beiden Gleichungen kann man gleichsetzen und erhält

$$\begin{aligned} m \cdot x_s + b &= -\frac{3}{5}x_s + \frac{1}{5} \\ \Rightarrow (m + \frac{3}{5})x_s &= \frac{1}{5} - b \\ \Leftrightarrow x_s &= \frac{\frac{1}{5} - b}{m + \frac{3}{5}}. \end{aligned}$$

Das heißt, für $m \neq -\frac{3}{5}$ und beliebige b existiert genau ein Schnittpunkt.

Aufgabe 6:
Gegeben sind die linearen Funktionen $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = -x + 2$ und $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = ax + b$. Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die beiden Graphen...
(i)... genau einen Schnittpunkt haben
(ii)... keinen Schnittpunkt haben
(iii)... zusammenfallen.

Lösung:
Die L"osung dieser Aufgabe verl"auft analog zur L"osung der vorherigen Aufgabe. F"ur $a = -1$ und $b = 2$ haben wir mit $y = -x + 2$ dieselbe Funktionsvorschrift und damit zwei identische Funktionen, deren Graphen zusammenfallen (L"osung zu (iii)).
F"ur $a = -1$ und $b \neq 2$ haben wir gleiche Steigungen, aber unterschiedliche $y-$Achsenabschnitte, d.h. die Graphen der beiden Funktionen verlaufen parallel und haben keinen Schnittpunkt (L"osung zu (ii)).
W"ahlen wir $a \neq -1$ und $b \neq 2$, so erhalten wir zwei Funktionen mit unterschiedlicher Steigung und unterschiedlichem $y-$Achsenabschnitt und damit zwei Geraden die sich schneiden. Auch f"ur $a \neq -1$ und $b = 2$ schneiden sich die Geraden und es l"asst sich zeigen, dass deren Schnittpunkt auch der Schnittpunkt mit der $y-$Achse ist. Also schneiden sich die beiden Geraden genau dann, wenn $a \neq -1$ gilt (L"osung zu (i)). b ist hier beliebig.

Aufgabe 7:
Geben Sie jeweils zwei lineare Funktionen an, deren Graphen...
(i) ... sich in genau einem Punkt schneiden
(ii) ... mehr als einen Punkt gemeinsam haben

(iii) ... keinen Punkt gemeinsam haben.

Lösung:

Nun nutzen wir die Erkenntnisse aus den vorherigen Aufgaben umgekehrt:
(i) Da zwei Geraden sich genau dann schneiden, wenn sie unterschiedliche Steigungen haben, m"ussen wir nur unterschiedliche Werte f"ur den Parameter m w"ahlen. Somit schneiden sich z.B. die beiden Geraden $y = 2x + 7$ und $y = 7x + 7$ in einem Punkt.
(ii) Zwei Geraden k"onnen nur dann mehr als einen Punkt gemeinsam haben, wenn sie aufeinander liegen und somit identische Funktionsvorschriften besitzen. Dies ist z.B. der Fall bei den beiden Geraden $y = 2x + 7$ und $y = 2x + 7$.
(iii) Keinen Punkt gemeinsam haben parallele Geraden, die nicht aufeinander liegen. Diese haben die gleiche Steigung m, aber unterschiedliche y-Achsenabschnitte. Dies erf"ullen z.B. die Geraden $y = 2x + 7$ und $y = 2x + 1$.

Aufgabe 8:
Bestimmen Sie die Funktionsvorschriften der im Koordinatensystem abgebildeten Geraden.

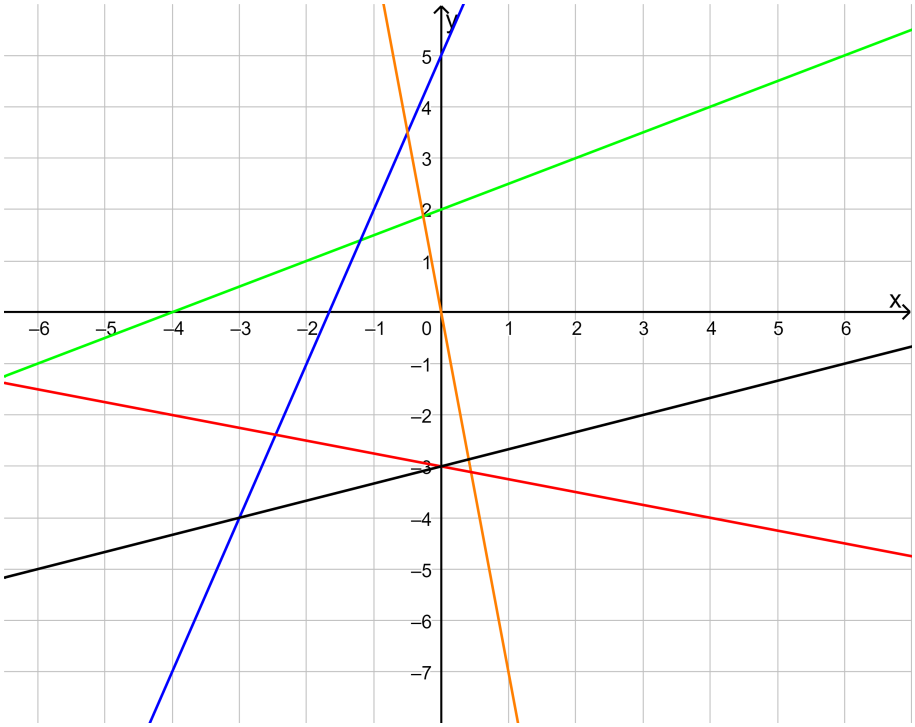


Bild 8

Gr"une Gerade: $f(x) =$?

Blaue Gerade: $f(x) =$?

Orangene Gerade: $f(x) =$?

Rote Gerade: $f(x) =$?

Schwarze Gerade: $f(x) =$?

Lösung:

Gr"une Gerade:
Der $y-$Achsenabschnitt k"onnen wir bei $y = 2$ ablesen. Gehen wir dann vom entsprechenden Schnittpunkt um eine Einheit nach rechts, erreichen wir den Graphen wieder, wenn wir um $0,5$ Einheiten nach oben gehen. Die Steigung ist damit $m = 0,5$. Insgesamt lautet die Funktionsvorschrift also $y = \frac{1}{2}x + 2$.

Blaue Gerade:
Der $y-$Achsenabschnitt bei der blauen Gerade liegt bei $y = 5$. Dar"uber hinaus liest man den Punkt $(-0,5; 3,5)$ ab, durch den die Gerade geht. Aus $y = m \cdot x + 5$ ergibt sich durch Einsetzen und Aufl"osen nach m

$$\begin{aligned} 3,5 &= m \cdot (-0,5) + 5 \\ \Leftrightarrow \quad -1,5 &= m \cdot (-0,5) \\ \Leftrightarrow \quad m &= 3 \end{aligned}$$

und damit die Funktionsvorschrift $y = 3x + 5$.

Orangene Gerade:
Diese Gerade geht durch den Ursprung, somit ist $b = 0$. Gehen wir vom Ursprung aus um eine Einheit nach rechts, erreichen wir den Graphen wieder, wenn wir um 7 Einheiten nach unten gehen. Somit ist die Steigung $m = -7$ und wir erhalten die gesuchte Funktionsvorschrift mit $y = -7x$.

Rote Gerade:
Diese Gerade schneidet die $y-$Achse bei $y = -3$. Geht man von hier aus um 2 Einheiten nach rechts, so erreicht man den Graphen, wenn man $0,5$ Einheiten nach unten geht. Die Steigung ergibt sich demnach als $y = \frac{-0,5}{2} = -\frac{1}{4}$ und die Geradengleichung lautet $y = -\frac{1}{4}x - 3$.

Schwarze Gerade:
Die letzte Gerade schneidet die $y-$Achse ebenfalls bei $y = -3$. Die Steigung berechnen wir wie eben: Wenn wir um $1,5$ Einheiten nach rechts gehen, erreichen wir die Gerade wieder, wenn wir um $0,5$ Einheiten nach oben gehen. Somit ist $m = \frac{0,5}{1,5} = \frac{1}{3}$ und damit $y = \frac{1}{3}x - 3$.

Aufgabe 9:
Was würden Sie einem Studierenden raten, der folgende Aussage "uber lineare Funktionen trifft?

Ich habe bei Klausuren immer Angst, dass ich bei der Berechnung der Steigung statt $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ die Gleichung $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ verwende. Deshalb schreibe ich mir hierf"ur stets einen Spickzettel.

Lösung:
Da $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1}{-1} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-y_2 + y_1}{-x_2 + x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ gilt, kann dieser Fehler nicht auftreten.

Aufgabe 10:
Was würden Sie einem Studenten raten, der folgende Aussage "uber lineare Funktionen trifft?

Um eine Gerade festzulegen, reicht bereits ein Punkt aus, schlie"slich sind bei Geraden die Zuw"achse und damit auch der Quotient $\frac{f(x)}{x}$ stets konstant. Man kann damit also m durch diesen Quotient bestimmen und b durch Einsetzen ausrechnen.

Lösung:

Dies gilt nicht bei allen Geraden. Ein Gegenbeispiel liefert uns bereits die Gerade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x + 3$, denn es ergibt sich $f(1) = 5$ und $f(2) = 7$ und damit $\frac{7}{2} \neq \frac{5}{1}$.

Die vom Studenten angesprochene Quotientengleichheit $\frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2}$ f"ur beliebige x_1, x_2 gilt nur bei Geraden des Typs $f(x) = mx$ und damit f"ur alle Geraden mit $b = 0$.
Dementsprechend braucht man in der Regel auch 2 Punkte, um eine Gerade festzulegen.

Anwendung

Aufgabe 11:
Gegeben seien zwei lineare Funktionen durch:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x + 6$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$. Berechnen Sie jeweils den Funktionswert an der Stelle $x = 2$.

1. $f(2) =$?
2. $g(2) =$?

Lösung:
Gegeben sind die linearen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x + 6$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$. F"ur die Funktionswerte y ergibt sich an der Stelle $x = 2$:

1. $f(2) = 3 \cdot 2 + 6 = 6 + 6 = 12$ und
2. $g(2) = \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{5}{3} = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{9}{3} = 3$.

Welchen Funktionswert hat jeweils das Argument $x = \frac{1}{2}$?

1. $f\left(\frac{1}{2}\right) =$?
2. $g\left(\frac{1}{2}\right) =$?

Lösung:
Gegeben sind die linearen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x + 6$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$. An der Stelle $x = \frac{1}{2}$ ergibt sich

1. $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \frac{1}{2} + 6 = \frac{3}{2} + \frac{12}{2} = \frac{15}{2}$ und
2. $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{3} = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = \frac{6}{3} = 2$.

Aufgabe 12:
Gegeben seien zwei lineare Funktionen durch:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x - 2$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}$. An welcher Stelle wird jeweils der Funktionswert $y = -5$ angenommen?

1. f: $x =$?
2. g: $x =$?

Lösung:

Gegeben sind die linearen Funktionen
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x - 2$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}$. Wir berechnen die Stellen x, an denen der Funktionswert $y = -5$ angenommen wird.
Zuerst f'ur die Funktion f:

$$\begin{aligned} & -5 &=& \ 3x - 2 \\ \Leftrightarrow \quad & -3 &=& \ 3x \\ \Leftrightarrow \quad & -1 &=& \ x\,. \end{aligned}$$

Es folgt: $x = -1$.

Nun f'ur die Funktion g:

$$\begin{aligned} & -5 = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{5} \\ \Leftrightarrow \quad & -5 + \frac{4}{5} = -\frac{2}{3}x \\ \Leftrightarrow \quad & -\frac{25}{5} + \frac{4}{5} = -\frac{2}{3}x \\ \Leftrightarrow \quad & -\frac{21}{5} = -\frac{2}{3}x \\ \Leftrightarrow \quad & \left(-\frac{21}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = x \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{63}{10} = x. \end{aligned}$$

Es folgt: $x = \frac{63}{10}$.

An welcher Stelle wird jeweils der Funktionswert $y = \frac{2}{5}$ angenommen?

1. f : $x =$?

2. g : $x =$?

Lösung:

Gegeben sind die linearen Funktionen
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x - 2$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}$.

Wir berechnen die Stellen x, an denen der Funktionswert $y = \frac{2}{5}$ angenommen wird.
Zuerst f"ur die Funktion f:

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} &= 3x - 2 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{5} + 2 &= 3x \\ \Leftrightarrow \frac{2}{5} + \frac{10}{5} &= 3x \\ \Leftrightarrow \frac{12}{5} &= 3x \\ \Leftrightarrow \frac{12}{5} \cdot \frac{1}{3} &= x \\ \Leftrightarrow \frac{4}{5} &= x. \end{aligned}$$

Es folgt: $x = \frac{4}{5}$.

Nun f"ur die Funktion g:

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} &= -\frac{2}{3}x - \frac{4}{5} \\ \Leftrightarrow \frac{6}{5} &= -\frac{2}{3}x \\ \Leftrightarrow -\frac{9}{5} &= x. \end{aligned}$$

Es folgt: $x = -\frac{9}{5}$.

Beispiel: Aufstellen einer Funktionsvorschrift durch Vorgabe von zwei Punkten
Sei $x_2 = 5$, $x_1 = -3$ und $y_2 = -2$, $y_1 = 2$. Gesucht ist die Funktionsvorschrift einer linearen Funktion, die durch die Punkte $(x_1; y_1)$ und $(x_2; y_2)$ geht.
Es gilt

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 2}{5 - (-3)} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

und b berechnet sich wie folgt, da der Punkt $(5; -2)$ auf der Geraden liegen soll:

$$\begin{aligned} -2 &= -\frac{1}{2}\cdot 5 + b \\ \Leftrightarrow -2 &= -\frac{5}{2} + b \\ \Leftrightarrow -2 + \frac{5}{2} &= b \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= b\,. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich folgende Funktionsvorschrift f"ur die lineare Funktion

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Beispiel: Aufstellen einer Funktionsvorschrift durch Vorgabe eines Punktes und der Steigung
Eine Gerade verlaufe durch den Punkt $(-3;4)$ und besitze die Steigung $m = -2$. Man gebe die Funktionsvorschrift der linearen Funktion an, deren Graph diese Bedingungen erfüllt.

Auch hier gilt $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ für beliebige Punkte $(x_1;y_1)$ und $(x_2;y_2)$ auf der Geraden. Setzt man $m = -2$ ein und wählt $x_1 = -3$, $y_1 = 4$ (aus der Angabe des Punktes) und lässt den zweiten Punkt $(x_2;y_2)$ allgemein als $(x;y)$ stehen, so erhält man für $x \neq -3$

$$-2 = \frac{y-4}{x-(-3)}.$$

Diese Gleichung kann man nach y auflösen:

$$\begin{aligned} \frac{y-4}{x+3} &= -2 && \mid \cdot (x+3) \\ \Leftrightarrow y - 4 &= -2\cdot(x+3) \\ \Leftrightarrow y - 4 &= -2x - 6 && \mid +4 \\ \Leftrightarrow y &= -2x - 2. \end{aligned}$$

So erhält man die Geradengleichung, die im übrigen auch für $x = -3$ gilt.

Aufgabe 13:
Welche Funktionsvorschrift besitzt die Gerade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch die beiden Punkte $(-1;-4)$ und $(2;3)$ festgelegt wird?
$y =$?

Lösung:

Wir bestimmen die Funktionsvorschrift der Geraden, die durch die Punkte $(-1;-4)$ und $(2;3)$ festgelegt wird. Dazu benutzen wir die Zwei - Punkte - Form der Geradengleichung:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \quad \text{für } x \neq x_1$$

Mit $(x_1;y_1)=(-1;-4)$ und $(x_2;y_2)=(2;3)$ ergibt sich für $x \neq -1$

$$\begin{aligned}
\frac{y+4}{x+1} &= \frac{3+4}{2+1} \\
\Leftrightarrow \frac{y+4}{x+1} &= \frac{7}{3} \\
\Leftrightarrow y+4 &= \frac{7}{3}(x+1) \\
\Leftrightarrow y+4 &= \frac{7}{3}x+\frac{7}{3} \\
\Leftrightarrow y &= \frac{7}{3}x+\frac{7}{3}-4 \\
\Leftrightarrow y &= \frac{7}{3}x-\frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt auch für $x=-1$.

Aufgabe 14:

Durch die lineare Gleichung

$$-\frac{3}{2}x-5y+12=0$$

wird eine Gerade dargestellt.
Wie lautet ihre Steigung? ?
Wie lautet ihr y-Achsenabschnitt? b= ?

Lösung:

Gegeben ist die Gleichung

$$-\frac{3}{2}x - 5y + 12 = 0.$$

Wir l"osen diese Gleichung nach y auf, um Steigung und y-Achsenabschnitt der beschriebenen Geraden zu bestimmen

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2}x - 5y + 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow -5y &= \frac{3}{2}x - 12 \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{3}{10}x + \frac{12}{5}. \end{aligned}$$

Der Koeffizient vor x entspricht der Steigung der Geraden. Die Steigung ist $-\frac{3}{10}$.
Das absolute Glied entspricht dem y-Achsenabschnitt b. Die Gerade schneidet die y-Achse bei $y = \frac{12}{5}$.

Aufgabe 15:

Berechnen Sie die Nullstellen der folgenden Geraden: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -3x+6$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{2}{7}x + \frac{1}{4}$.

1. f : $x =$?
2. g : $x =$?

Lösung:

Gegeben sind die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -3x + 6$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{2}{7}x + \frac{1}{4}$. Den Nullstellen einer Funktion entsprechen die Schnittpunkte mit der x-Achse des zugeh"origen Funktionsgraphen. An diesen Stellen ist der Funktionswert Null. Wir suchen folglich die x-Werte, f"ur die $y = 0$ gilt.

F"ur die Funktion f ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= -3x + 6 \\ \Leftrightarrow 3x &= 6 \\ \Leftrightarrow x &= 2. \end{aligned}$$

Die Nullstelle ist an der Stelle $x = 2$.

F"ur die Funktion g ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2}{7}x + \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow -\frac{2}{7}x &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) = -\frac{7}{8}. \end{aligned}$$

Die Nullstelle ist an der Stelle $x = -\frac{7}{8}$.