UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Virtuelles Eingangstutorium
studiVEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn
FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Virtuelles Eingangstutorium
VEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

khdm
kompetenzzentrum
hochschuldidaktik
mathematik

Hinführung

Die Stadtwerke Kassel bieten verschiedene Stromtarife an. Beim Tarif *specialpro* setzen sich die Kosten aus einer Servicepauschale von 118, 32 EUR pro Jahr und einem Arbeitspreis von 13, 08 Ct/kWh zusammen. Der Tarif *procity* besteht aus einer Servicepauschale von 58, 99 EUR pro Jahr und einem Arbeitspreis von 17, 46 Ct/kWh.

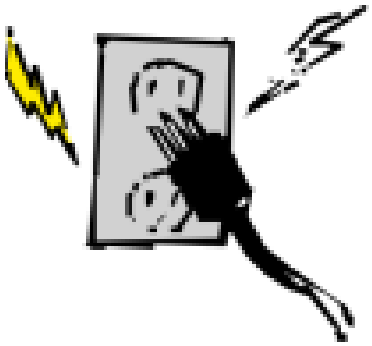


Bild 1

	Jahresverbrauch in kWh	Preis in EUR Tarif *specialpro*	Preis in EUR Tarif *procity*
Haushalt 1	1200	275, 28	268, 51
Haushalt 2	1300	288, 36	285, 97
Haushalt 3	1600	327, 60	338, 35
Haushalt 4	2000	379, 92	408, 19
Haushalt 5	3000	510, 72	582, 79

Tabelle 1: "Ubersicht "uber den Jahresstromverbrauch von f"unf verschiedenen Haushalten mit den Kosten in zwei Tarifen.

Die Tabelle gibt jeweils f"unf (Zuordnungs-)Paare (Jahresstromverbauch, zugeh"origer Preis) an. Sie gibt die Verh"altnisse allerdings nur grob wieder. Wenn die Stadtwerke eine Rechnung erstellen, wird der von der Kundin gew"ahlte Tarif (*specialpro* oder *procity*), der Jahresstromverbrauch und der zu zahlende Betrag aufgef"uhrt. Dieser Betrag entsteht wie folgt:

$$\begin{array}{rl} & \text{Arbeitspreis EUR/kWh} \cdot \text{Stromverbrauch kWh} \\ (*) & + \text{Servicepauschale EUR} \\ = & \text{Rechnungsbetrag EUR.} \end{array}$$

Nehmen wir an, eine Kundin mit einem Jahresstromverbrauch von 3578 kWh hat den Tarif *procity* gew"ahlt. Die Stadtwerke stellen dann folgende Rechnung aus. Zu der Servicepauschale in H"ohe von 58, 99 EUR kommen noch Kosten in H"ohe von 17, 46 Ct/kWh ·3578 kWh. Dies ergibt den Rechnungsbetrag:

$$0,1746\,\text{EUR/kWh} \cdot 3578\,\text{kWh} + 58,99\,\text{EUR} \;=\; 683,71\,\text{EUR}.$$

Allgemein kann man nun f"ur einen beliebigen Jahresstromverbauch x den zugeh"origen Rechnungsbetrag im Tarif *procity* ausrechnen:

$$0,1746\,\text{EUR/kWh} \cdot x\,\text{kWh} + 58,99\,\text{EUR}.$$

Lassen wir die Einheiten weg und schreiben y f"ur den Rechnungsbetrag, so ergibt sich folgende Berechnungsformel f"ur den Tarif *procity*:

$$y = 0,1746 \cdot x + 58,99.$$

Ganz analog ergibt sich im Tarif *specialpro*:

$$y = 0,1308 \cdot x + 118,32.$$

Man kann die Zusammenhänge also durch **lineare Funktionen** mit den **Funktionsvorschriften** $f(x) = 0,1746 \cdot x + 58,99$ bzw. $g(x) = 0,1308 \cdot x + 118,32$ angeben. Der gro"se Vorteil von Funktionen gegen"uber der Tabelle besteht nun darin, dass sie Aufschluss "uber *alle* Wertepaare liefern.

Zu Funktionen gehören immer auch ein Definitions- und Zielmenge. In diesem Fall umfasst die **Definitionsmenge** die Menge aller Zahlen, die man für den Stromverbrauch einsetzen kann. Wir nehmen dafür alle positiven reellen Zahlen: $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$. Die Zielmenge ist die Menge, in der die möglichen Funktionswerte, also Rechnungsbeträge, liegen. Auch sie können nicht negativ sein. Deshalb wählen wir auch hier $\mathbb{R}^+$.

Reale Messwerte sind zwar rationale Zahlen (der Stromzähler liefert beispielsweise nur eine bestimmte Anzahl an Nachkommastellen), aber es ist in der Mathematik üblich, idealisierend Funktionen über $\mathbb{R}$ zu betrachten, da die mathematische Theorie hierfür in gewissem Sinne einfacher ist.

Man kann die Funktionen daher definieren als:

$$\begin{aligned} f: &\quad \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \quad \text{mit} \quad f(x) = 0,1746 \cdot x + 58,99 \\ g: &\quad \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \quad \text{mit} \quad g(x) = 0,1308 \cdot x + 118,32 \end{aligned}$$

Die lineare Funktion Stromtarif gibt also den Zusammenhang „Jahresverbrauch $\mapsto$ Strompreis“ an. Bei gegebenem Verbrauch l"asst sich der Rechnungsbetrag ermitteln. Die umgekehrte Problemstellung ist oft genauso interessant. Bei bekanntem Rechnungsbetrag wird nach dem Verbrauch gefragt. Wie viel Strom wurde denn eigentlich verbraucht, wenn die Rechnung so hoch ist? Man kann auf diesem Wege insbesondere die ausgestellte Rechnung kontrollieren. Im Tarif *specialpro* gilt nach Aufl"osen der Gleichung nach der Variablen x:

$$x \;=\; \frac{1}{0,1308} \cdot (y - 118,32)\,.$$

Beispielsweise geh"ort zu einem Rechnungsbetrag von 300 EUR ein Jahresverbrauch von 1388,99 kWh, denn

$$\frac{1}{0,1308} \cdot (300 - 118,32) = 1388,99\,.$$

Wie im vorangegangenen Teil dieses Kurses beschrieben wurde, ist es oft hilfreich, den Graph einer Funktion zu betrachten. Eine graphische Darstellung hat den Vorteil, dass man den Verlauf der Wertepaare veranschaulichen kann. Ein weiterer großer Vorteil besteht darin, dass man unterschiedliche Stromtarife auf einen Blick vergleichen kann. Das folgende Video zeigt noch einmal, wie man von einer Funktionsvorschrift zu einer graphischen Darstellung gelangt.

Preview fehlt:
`h5p/311wertetabelle`

Video 1 *(nur in digitaler Version)* Gezeigt wird, wie aus den gegebenen Zuordnungsvorschriften (*procity* und *specialpro*) eine (Werte-)Tabelle erstellt wird. Aus dieser Tabelle werden dann die einzelnen Wertepaare in ein Koordinatensystem "ubertragen. Man stellt fest, dass beide Graphen Geraden sind.

Der Weg "uber die Wertetabelle zum Graphen kann mit Computereinsatz bewerkstelligt und leicht verfeinert werden. Man bekommt aber in vielen F"allen keine Einsicht in die Eigenschaften des Graphen. Wie kann man aus der Funktionsvorschrift Eigenschaften des Graphen finden, welche eine Veranschaulichung erm"oglichen? Was haben unsere beiden Vorschriften gemeinsam? Was zeichnet sie aus? Wenn man beide Funktionsgleichungen betrachtet

$$\begin{aligned} y &= 0,1746 \cdot x + 58,99 \\ y &= 0,1308 \cdot x + 118,32 \end{aligned}$$

und mit ihren Graphen vergleicht, so stellt man fest, dass sich der Wert der Servicepauschale leicht wiederfinden l"asst. Graph 1 (*procity*) schneidet die y-Achse bei $58,99$, Graph 2 (*specialpro*) bei $118,32$. Ist der Stromverbrauch gleich Null, so ist der Preis gem"a"s Gleichung (*) gleich der Servicepauschale.

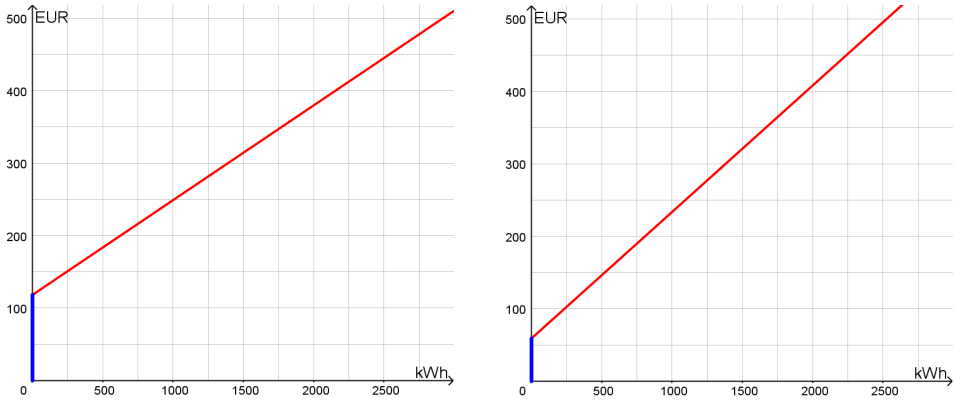


Bild 2 Beim Stromverbrauch $x = 0$ wird die Servicepauschale (blau) im Graphen auf der y-Achse sichtbar: *specialpro* (links) *procity* (rechts)

Auch der Arbeitspreis (Preis pro kWh) erscheint jeweils in den Graphen. Bei positivem Stromver-

brauch ergeben sich folgende Verh"altnisse:

$$\begin{aligned} \frac{y - 58,99}{x} &= 0,1746\,, \\ \frac{y - 118,32}{x} &= 0,1308\,. \end{aligned}$$

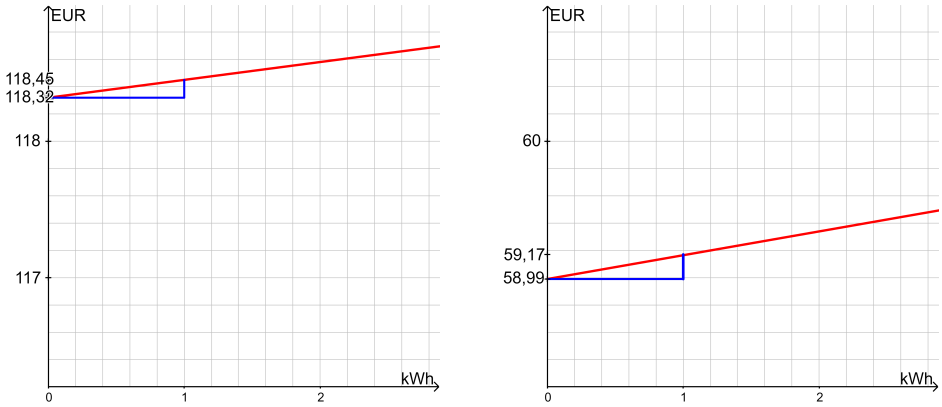


Bild 3 Man kann also den Arbeitspreis als Streckenverh"altnis in einem Dreieck (Steigungsdreieck) veranschaulichen. Man kann den Arbeitspreis direkt einzeichnen, wenn man den Stromverbrauch $x = 1$ betrachtet: *specialpro* (links) *procity* (rechts)

F"ur den Verbraucher stellt sich die Frage nach dem g"unstigsten Tarif. Der Tarif *procity* hat eine niedrigere Servicepauschale als der Tarif *specialpro*. Daf"ur ist bei *specialpro* der Arbeitspreis h"oher als bei *procity*. Ist der Jahresverbrauch gleich Null, so ist der Tarif *procity* g"unstiger. Bei hohem Verbrauch ist der Tarif *specialpro* dagegen attraktiver. Wir suchen den Verbrauch, bei dem die Stromkosten gleich sind. Die Stromkosten werden also gleichgesetzt

$$0,1746 \cdot x_s + 58,99 = 0,1308 \cdot x_s + 118,32$$

und wir bekommen den Verbrauch

$$(0,1746 - 0,1308)x_s = 118,32 - 58,99$$

bzw.

$$x_s = \frac{59,33}{0,0438} \approx 1354,5662\,.$$

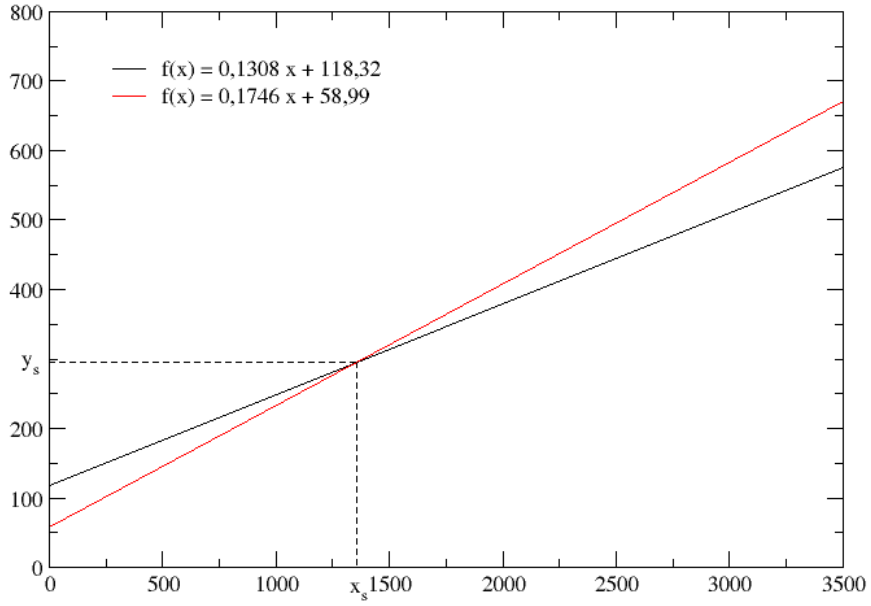


Bild 4

Der Tarif *procity* ist also g"unstiger, wenn der Verbrauch unterhalb von x_s liegt. Achtung: Das konnte man aufgrund der Beispieltabelle nicht vermuten. Liegt der Verbrauch oberhalb von x_s, so ist der Tarif *specialpro* g"unstiger. Beide Tarife ergeben bei einem Verbrauch von x_s denselben Preis:

$$y_s = 0,1746 \cdot x_s + 58,99 = 0,1308 \cdot x_s + 118,32 \approx 295,4972\,.$$

Bezeichnen wir nun die Servicepauschale mit b und den Arbeitspreis mit m, so ergibt sich allgemein die Gleichung

$$y = m \cdot x + b,$$

wobei die Variablae x für den Jahresverbrauch an Strom und die Variable y für den Gesamtpreis der Stromrechnung steht.

Mit Funktionsvorschriften der Gestalt $y = m \cdot x + b$ haben wir den Zusammenhang zwischen Stromverbrauch und Rechnungspreis beschrieben. Die Parameter m bzw. b standen dabei f"ur den Arbeitspreis bzw. die Servicepauschale in den jeweiligen Stromtarifen. Im Allgemeinen hat man f"ur die Variablen x und y nicht konkrete Gr"o"sen oder Ma"szahlen, sondern x und y sind reelle Zahlen.