UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Virtuelles Eingangstutorium
studiVEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn
FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Virtuelles Eingangstutorium
VEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

khdm
kompetenzzentrum
hochschuldidaktik
mathematik

Aufgaben

Aufgabe 1:
Gegeben ist die lineare Funktion:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x + \frac{1}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Erg"anzen Sie folgende Tabellen:

Argument	10	-10	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{5}$	$3a$	$-2a$
Funktionswert	?	?	?	?	?	?	?

Argument	?	?	?	?	?	?	?
Funktionswert	-1	0	2	$\frac{5}{2}$	$-\frac{4}{3}$	$24b$	$-4b$

Lösung:

Die Funktionswerte in der ersten Tabelle berechnen sich durch Einsetzen des zugeh"origen Arguments f"ur x in die Funktionsvorschrift $y = -x + \frac{1}{2}$. So ergibt sich z.B. der Funktionswert zum Argument $x = 10$ als $y = -10 + \frac{1}{2} = -\frac{19}{2}$. Setzt man das Argument $x = -10$ ein, erh"alt man $y = -(-10) + \frac{1}{2} = 10 + \frac{1}{2} = \frac{21}{2}$.
Auf diesem Weg erhalten wir die folgende Tabelle:

Argument	10	-10	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{5}$	$3a$	$-2a$
Funktionswert	$-\frac{19}{2}$	$\frac{21}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{9}{10}$	$-3a + \frac{1}{2}$	$2a + \frac{1}{2}$

Um nun die Argumente aus der zweiten Tabelle zu berechnen, m"ussen wir zun"achst die Gleichung nach x aufl"osen, da wir nun y gegeben haben und das jeweils zugeh"orige x suchen:

$$\begin{aligned} y &= -x + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad y - \frac{1}{2} &= -x \\ \Leftrightarrow \quad -y + \frac{1}{2} &= x \end{aligned}$$

Damit berechnen wir nun z.B. f"ur $y = -1$ das Argument $x = -(-1) + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Analog k"onnen wir nun auch die zweite Tabelle vervollst"andigen:

Argument	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-2	$\frac{11}{6}$	$-24b + \frac{1}{2}$	$4b + \frac{1}{2}$
Funktionswert	-1	0	2	$\frac{5}{2}$	$-\frac{4}{3}$	$24b$	$-4b$

Aufgabe 2:
Gegeben sind die linearen Funktionen $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = 2x - 5$ und $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = -\frac{5}{6}x + 1$. Berechnen Sie die Nullstellen beider Funktionen und den Schnittpunkt der zugeh"origen Graphen.

Lösung:

Nullstelle von $y = 2x - 5$:

$$\begin{aligned} & 0 &=& 2x - 5 \\ \Leftrightarrow\quad & 5 &=& 2x \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{5}{2} &=& x \end{aligned}$$

Damit hat $y = 2x - 5$ seine Nullstelle bei $x = \frac{5}{2}$.

Nullstelle von $y = -\frac{5}{6}x + 1$:

$$\begin{aligned} & 0 &=& -\frac{5}{6}x + 1 \\ \Leftrightarrow\quad & -1 &=& -\frac{5}{6}x \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{6}{5} &=& x\,. \end{aligned}$$

Die Nullstelle von $y = -\frac{5}{6}x + 1$ ist demnach $x = \frac{6}{5}$.

Zur Berechnung des Schnittpunkts der beiden Graphen setzen wir die Funktionsterme gleich und erhalten

$$\begin{aligned} & 2x - 5 &=& -\frac{5}{6}x + 1 \\ \Leftrightarrow\quad & 2x &=& -\frac{5}{6}x + 6 \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{12}{6}x + \frac{5}{6}x &=& 6 \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{17}{6}x &=& 6 \\ \Leftrightarrow\quad & x &=& \frac{36}{17}\,. \end{aligned}$$

Die Graphen schneiden sich demnach an der Stelle $x = \frac{36}{17}$. Um den Schnittpunkt zu bestimmen, fehlt allerdings noch der zugeh"orige Funktionswert, den wir durch Einsetzen von $x = \frac{36}{17}$ in eine der beiden Funktionsvorschriften erhalten:

$$y = 2 \cdot \frac{36}{17} - 5 = \frac{2 \cdot 36 - 5 \cdot 17}{17} = -\frac{13}{17}\,.$$

Der Schnittpunkt der beiden Graphen ist also $S = \left(\frac{36}{17}; -\frac{13}{17}\right)$.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift der linearen Funktion, deren Graph durch den Punkt $P(-3; 2)$ geht und die Steigung $m = -\frac{2}{5}$ besitzt.

$f(x) =$?

Lösung:

Die allgemeine Funktionsvorschrift einer linearen Funktion lautet $y = m \cdot x + b$. Mit $m = -\frac{2}{5}$ erhalten wir die Funktionsvorschrift $y = -\frac{2}{5}x + b$.
Um letztlich noch b zu bestimmen, setzten wir die Koordinaten des Punktes P, durch den die Gerade laufen soll, in die Funktionsvorschrift ein:

$$\begin{aligned} & 2 &=& -\frac{2}{5} \cdot (-3) + b \\ \Leftrightarrow \quad & 2 &=& \frac{6}{5} + b \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{10}{5} - \frac{6}{5} &=& b \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{4}{5} &=& b\,. \end{aligned}$$

Somit lautet die gesuchte Funktionsvorschrift

$$y = -\frac{2}{5} \cdot x + \frac{4}{5}\,.$$

Alternativ h"atten wir auch die Punkt - Richtungs - Form $\frac{y-y_1}{x-x_1} = m$ verwenden k"onnen und w"aren dabei nat"urlich auf das selbe Ergebnis gekommen:

$$\begin{aligned} & \frac{y-2}{x-(-3)} &=& -\frac{2}{5} \\ \Leftrightarrow \quad & y-2 &=& -\frac{2}{5} \cdot (x+3) \\ \Leftrightarrow \quad & y-2 &=& -\frac{2}{5}x - \frac{6}{5} \\ \Leftrightarrow \quad & y &=& -\frac{2}{5}x - \frac{6}{5} + 2 \\ \Leftrightarrow \quad & y &=& -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift der linearen Funktion, deren Graph durch die beiden Punkte $P_1(-1;3)$ und $P_2(3;7)$ geht.

$f(x) =$?

Lösung:

Zur L"osung dieser Aufgabe k"onnen wir entweder ausgehend von der Funktionsvorschrift $y = m \cdot x + b$ die beiden Punkte einsetzen, sodass wir die beiden Funktionsvorschriften $3 = m \cdot (-1) + b$ und $7 = m \cdot 3 + b$ erhalten. Durch Aufl"osen und Einsetzten k"onnen wir dann sowohl m als auch b bestimmen.

Alternativ wollen wir hier nun die Zwei - Punkte - Form $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ verwenden.

Dazu setzten wir lediglich die vorgegebenen Koordinaten von P_1 und P_2 ein und l"osen nach y auf:

$$\begin{aligned} \frac{y-3}{x-(-1)} &= \frac{7-3}{3-(-1)} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{y-3}{x+1} &= \frac{4}{4} \\ \Leftrightarrow \quad y-3 &= x+1 \\ \Leftrightarrow \quad y &= x+4. \end{aligned}$$

Die gesuchte Geradengleichung lautet also $y = x + 4$.

Beispiel 2:

Wir betrachten die linearen Funktionen, die für alle $x \in \mathbb{R}$ und mit $m \in \mathbb{R}$ durch die Funktionsvorschriften

$$y = mx + 3 \quad \text{und} \quad y = 2x + 1$$

beschrieben werden und untersuchen diese auf einen Schnittpunkt $S(x_s; y_s)$.
Ist $m = 2$, so sind die Geraden parallel und besitzen keinen Schnittpunkt.
Ist $m \neq 2$, so setzen wir die Funktionsvorschriften gleich

$$mx_s + 3 = 2x_s + 1 \quad \Leftrightarrow \quad (m-2)x_s = -2$$

und bekommen

$$x_s = -\frac{2}{m-2}, \quad y_s = 2x_s + 1 = -\frac{4}{m-2} + 1.$$

Aufgabe 5:

Wie muss man m und b w"ahlen, damit die Geraden

$$y = mx + b, \quad 3x + 5y = 1$$

genau einen Schnittpunkt besitzen? Wie muss man m und b w"ahlen, damit die Geraden zusammenfallen?

Lösung:

Um die Fragen leichter beantworten zu k"onnen, l"osen wir die rechte Funktionsvorschrift zun"achst nach y auf:

$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 1 \\ \Leftrightarrow \quad 5y &= 1 - 3x \\ \Leftrightarrow \quad y &= -\frac{3}{5}x + \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Es ist klar, dass f"ur $m = -\frac{3}{5}$ und $b = \frac{1}{5}$ die beiden Geraden zusammenfallen.
Bei gleicher Steigung, aber unterschiedlichem b sind die Geraden parallel aber nicht identisch

und k"onnen sich somit nicht schneiden. D.h. f"ur $m = -\frac{3}{5}$ und $b \neq \frac{1}{5}$ haben die beiden Geraden keinen Schnittpunkt.
In allen anderen F"allen, also f"ur $m \neq -\frac{3}{5}$, gilt für den Schnittpunkt einerseits (aufgrund der ersten Funktionsvorschrift)

$$y_s = m \cdot x_s + b$$

und andererseits (aufgrund der nach y aufgelösten zweiten Gleichung)

$$y_s = -\frac{3}{5}x_s + \frac{1}{5}.$$

Diese beiden Gleichungen kann man gleichsetzen und erhält

$$\begin{aligned} m \cdot x_s + b &= -\frac{3}{5}x_s + \frac{1}{5} \\ \Rightarrow (m + \frac{3}{5})x_s &= \frac{1}{5} - b \\ \Leftrightarrow x_s &= \frac{\frac{1}{5} - b}{m + \frac{3}{5}}. \end{aligned}$$

Das heißt, für $m \neq -\frac{3}{5}$ und beliebige b existiert genau ein Schnittpunkt.

Aufgabe 6:
Gegeben sind die linearen Funktionen $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = -x + 2$ und $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = ax + b$. Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die beiden Graphen...
(i)... genau einen Schnittpunkt haben
(ii)... keinen Schnittpunkt haben
(iii)... zusammenfallen.

Lösung:
Die L"osung dieser Aufgabe verl"auft analog zur L"osung der vorherigen Aufgabe. F"ur $a = -1$ und $b = 2$ haben wir mit $y = -x + 2$ dieselbe Funktionsvorschrift und damit zwei identische Funktionen, deren Graphen zusammenfallen (L"osung zu (iii)).
F"ur $a = -1$ und $b \neq 2$ haben wir gleiche Steigungen, aber unterschiedliche $y-$Achsenabschnitte, d.h. die Graphen der beiden Funktionen verlaufen parallel und haben keinen Schnittpunkt (L"osung zu (ii)).
W"ahlen wir $a \neq -1$ und $b \neq 2$, so erhalten wir zwei Funktionen mit unterschiedlicher Steigung und unterschiedlichem $y-$Achsenabschnitt und damit zwei Geraden die sich schneiden. Auch f"ur $a \neq -1$ und $b = 2$ schneiden sich die Geraden und es l"asst sich zeigen, dass deren Schnittpunkt auch der Schnittpunkt mit der $y-$Achse ist. Also schneiden sich die beiden Geraden genau dann, wenn $a \neq -1$ gilt (L"osung zu (i)). b ist hier beliebig.

Aufgabe 7:
Geben Sie jeweils zwei lineare Funktionen an, deren Graphen...
(i) ... sich in genau einem Punkt schneiden
(ii) ... mehr als einen Punkt gemeinsam haben

(iii) ... keinen Punkt gemeinsam haben.

Lösung:

Nun nutzen wir die Erkenntnisse aus den vorherigen Aufgaben umgekehrt:
(i) Da zwei Geraden sich genau dann schneiden, wenn sie unterschiedliche Steigungen haben, m"ussen wir nur unterschiedliche Werte f"ur den Parameter m w"ahlen. Somit schneiden sich z.B. die beiden Geraden $y = 2x + 7$ und $y = 7x + 7$ in einem Punkt.
(ii) Zwei Geraden k"onnen nur dann mehr als einen Punkt gemeinsam haben, wenn sie aufeinander liegen und somit identische Funktionsvorschriften besitzen. Dies ist z.B. der Fall bei den beiden Geraden $y = 2x + 7$ und $y = 2x + 7$.
(iii) Keinen Punkt gemeinsam haben parallele Geraden, die nicht aufeinander liegen. Diese haben die gleiche Steigung m, aber unterschiedliche y-Achsenabschnitte. Dies erf"ullen z.B. die Geraden $y = 2x + 7$ und $y = 2x + 1$.

Aufgabe 8:
Bestimmen Sie die Funktionsvorschriften der im Koordinatensystem abgebildeten Geraden.

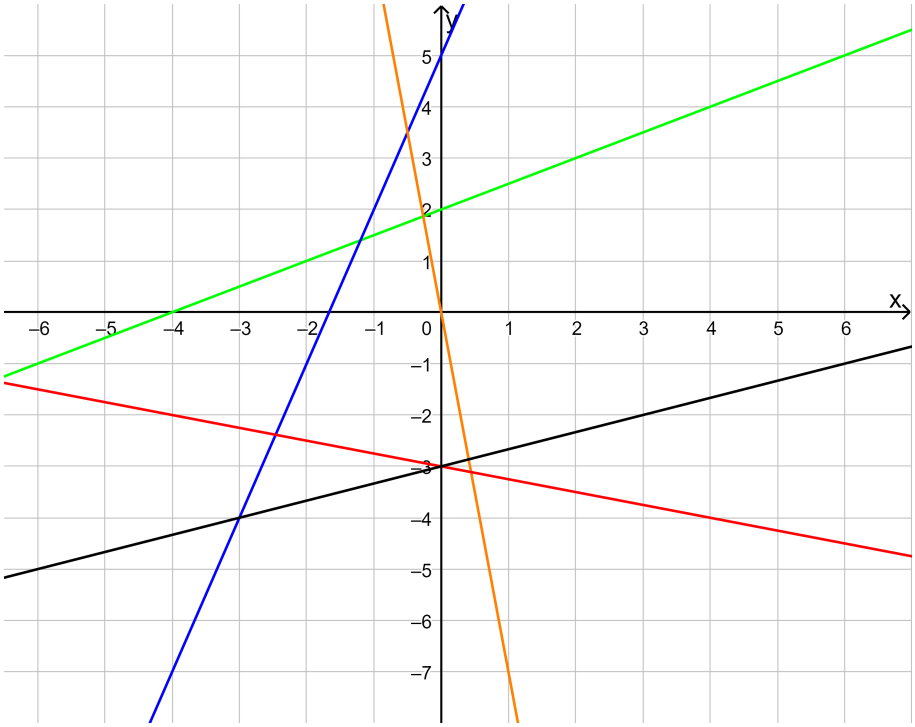


Bild 8

Gr"une Gerade: $f(x) =$?

Blaue Gerade: $f(x) =$?

Orangene Gerade: $f(x) =$?

Rote Gerade: $f(x) =$?

Schwarze Gerade: $f(x) =$?

Lösung:

Gr"une Gerade:
Der $y-$Achsenabschnitt k"onnen wir bei $y = 2$ ablesen. Gehen wir dann vom entsprechenden Schnittpunkt um eine Einheit nach rechts, erreichen wir den Graphen wieder, wenn wir um $0,5$ Einheiten nach oben gehen. Die Steigung ist damit $m = 0,5$. Insgesamt lautet die Funktionsvorschrift also $y = \frac{1}{2}x + 2$.

Blaue Gerade:
Der $y-$Achsenabschnitt bei der blauen Gerade liegt bei $y = 5$. Dar"uber hinaus liest man den Punkt $(-0,5; 3,5)$ ab, durch den die Gerade geht. Aus $y = m \cdot x + 5$ ergibt sich durch Einsetzen und Aufl"osen nach m

$$\begin{aligned} 3,5 &= m \cdot (-0,5) + 5 \\ \Leftrightarrow \quad -1,5 &= m \cdot (-0,5) \\ \Leftrightarrow \quad m &= 3 \end{aligned}$$

und damit die Funktionsvorschrift $y = 3x + 5$.

Orangene Gerade:
Diese Gerade geht durch den Ursprung, somit ist $b = 0$. Gehen wir vom Ursprung aus um eine Einheit nach rechts, erreichen wir den Graphen wieder, wenn wir um 7 Einheiten nach unten gehen. Somit ist die Steigung $m = -7$ und wir erhalten die gesuchte Funktionsvorschrift mit $y = -7x$.

Rote Gerade:
Diese Gerade schneidet die $y-$Achse bei $y = -3$. Geht man von hier aus um 2 Einheiten nach rechts, so erreicht man den Graphen, wenn man $0,5$ Einheiten nach unten geht. Die Steigung ergibt sich demnach als $y = \frac{-0,5}{2} = -\frac{1}{4}$ und die Geradengleichung lautet $y = -\frac{1}{4}x - 3$.

Schwarze Gerade:
Die letzte Gerade schneidet die $y-$Achse ebenfalls bei $y = -3$. Die Steigung berechnen wir wie eben: Wenn wir um $1,5$ Einheiten nach rechts gehen, erreichen wir die Gerade wieder, wenn wir um $0,5$ Einheiten nach oben gehen. Somit ist $m = \frac{0,5}{1,5} = \frac{1}{3}$ und damit $y = \frac{1}{3}x - 3$.

Aufgabe 9:
Was würden Sie einem Studierenden raten, der folgende Aussage "uber lineare Funktionen trifft?

Ich habe bei Klausuren immer Angst, dass ich bei der Berechnung der Steigung statt $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ die Gleichung $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ verwende. Deshalb schreibe ich mir hierf"ur stets einen Spickzettel.

Lösung:
Da $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1}{-1} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-y_2 + y_1}{-x_2 + x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ gilt, kann dieser Fehler nicht auftreten.

Aufgabe 10:
Was würden Sie einem Studenten raten, der folgende Aussage "uber lineare Funktionen trifft?

Um eine Gerade festzulegen, reicht bereits ein Punkt aus, schlie"slich sind bei Geraden die Zuw"achse und damit auch der Quotient $\frac{f(x)}{x}$ stets konstant. Man kann damit also m durch diesen Quotient bestimmen und b durch Einsetzen ausrechnen.

Lösung:

Dies gilt nicht bei allen Geraden. Ein Gegenbeispiel liefert uns bereits die Gerade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x + 3$, denn es ergibt sich $f(1) = 5$ und $f(2) = 7$ und damit $\frac{7}{2} \neq \frac{5}{1}$.

Die vom Studenten angesprochene Quotientengleichheit $\frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2}$ f"ur beliebige x_1, x_2 gilt nur bei Geraden des Typs $f(x) = mx$ und damit f"ur alle Geraden mit $b = 0$.
Dementsprechend braucht man in der Regel auch 2 Punkte, um eine Gerade festzulegen.