UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Virtuelles Eingangstutorium
studiVEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

# studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn
FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Virtuelles Eingangstutorium
VEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

khdm
kompetenzzentrum
hochschuldidaktik
mathematik

## Anwendung

**Aufgabe 11:**
Gegeben seien zwei lineare Funktionen durch:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x + 6$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$. Berechnen Sie jeweils den Funktionswert an der Stelle $x = 2$.

1. $f(2) =$ ?
2. $g(2) =$ ?

**Lösung:**
Gegeben sind die linearen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x + 6$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$. F"ur die Funktionswerte $y$ ergibt sich an der Stelle $x = 2$:

1. $f(2) = 3 \cdot 2 + 6 = 6 + 6 = 12$ und
2. $g(2) = \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{5}{3} = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{9}{3} = 3$.

Welchen Funktionswert hat jeweils das Argument $x = \frac{1}{2}$?

1. $f\left(\frac{1}{2}\right) =$ ?
2. $g\left(\frac{1}{2}\right) =$ ?

**Lösung:**
Gegeben sind die linearen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x + 6$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$. An der Stelle $x = \frac{1}{2}$ ergibt sich

1. $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \frac{1}{2} + 6 = \frac{3}{2} + \frac{12}{2} = \frac{15}{2}$ und
2. $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{3} = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = \frac{6}{3} = 2$.

**Aufgabe 12:**
Gegeben seien zwei lineare Funktionen durch:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x - 2$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}$. An welcher Stelle wird jeweils der Funktionswert $y = -5$ angenommen?

1. $f$: $x =$ ?
2. $g$: $x =$ ?

**Lösung:**

Gegeben sind die linearen Funktionen
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x - 2$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}$. Wir berechnen die Stellen $x$, an denen der Funktionswert $y = -5$ angenommen wird.
Zuerst f'ur die Funktion $f$:

$$\begin{aligned} & -5 &=& \ 3x - 2 \\ \Leftrightarrow \quad & -3 &=& \ 3x \\ \Leftrightarrow \quad & -1 &=& \ x\,. \end{aligned}$$

Es folgt: $x = -1$.

Nun f'ur die Funktion $g$:

$$\begin{aligned} & -5 = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{5} \\ \Leftrightarrow \quad & -5 + \frac{4}{5} = -\frac{2}{3}x \\ \Leftrightarrow \quad & -\frac{25}{5} + \frac{4}{5} = -\frac{2}{3}x \\ \Leftrightarrow \quad & -\frac{21}{5} = -\frac{2}{3}x \\ \Leftrightarrow \quad & \left(-\frac{21}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = x \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{63}{10} = x. \end{aligned}$$

Es folgt: $x = \frac{63}{10}$.

An welcher Stelle wird jeweils der Funktionswert $y = \frac{2}{5}$ angenommen?

1. $f$ : $x =$ ?

2. $g$ : $x =$ ?

**Lösung:**

Gegeben sind die linearen Funktionen
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x - 2$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}$.

Wir berechnen die Stellen $x$, an denen der Funktionswert $y = \frac{2}{5}$ angenommen wird.
Zuerst f"ur die Funktion $f$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} &= 3x - 2 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{5} + 2 &= 3x \\ \Leftrightarrow \frac{2}{5} + \frac{10}{5} &= 3x \\ \Leftrightarrow \frac{12}{5} &= 3x \\ \Leftrightarrow \frac{12}{5} \cdot \frac{1}{3} &= x \\ \Leftrightarrow \frac{4}{5} &= x. \end{aligned}$$

Es folgt: $x = \frac{4}{5}$.

Nun f"ur die Funktion $g$:

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} &= -\frac{2}{3}x - \frac{4}{5} \\ \Leftrightarrow \frac{6}{5} &= -\frac{2}{3}x \\ \Leftrightarrow -\frac{9}{5} &= x. \end{aligned}$$

Es folgt: $x = -\frac{9}{5}$.

**Beispiel: Aufstellen einer Funktionsvorschrift durch Vorgabe von zwei Punkten**
Sei $x_2 = 5$, $x_1 = -3$ und $y_2 = -2$, $y_1 = 2$. Gesucht ist die Funktionsvorschrift einer linearen Funktion, die durch die Punkte $(x_1; y_1)$ und $(x_2; y_2)$ geht.
Es gilt

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 2}{5 - (-3)} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

und $b$ berechnet sich wie folgt, da der Punkt $(5; -2)$ auf der Geraden liegen soll:

$$\begin{aligned} -2 &= -\frac{1}{2}\cdot 5 + b \\ \Leftrightarrow -2 &= -\frac{5}{2} + b \\ \Leftrightarrow -2 + \frac{5}{2} &= b \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= b\,. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich folgende Funktionsvorschrift f"ur die lineare Funktion

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

**Beispiel: Aufstellen einer Funktionsvorschrift durch Vorgabe eines Punktes und der Steigung**
Eine Gerade verlaufe durch den Punkt $(-3;4)$ und besitze die Steigung $m = -2$. Man gebe die Funktionsvorschrift der linearen Funktion an, deren Graph diese Bedingungen erfüllt.

Auch hier gilt $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ für beliebige Punkte $(x_1;y_1)$ und $(x_2;y_2)$ auf der Geraden. Setzt man $m = -2$ ein und wählt $x_1 = -3$, $y_1 = 4$ (aus der Angabe des Punktes) und lässt den zweiten Punkt $(x_2;y_2)$ allgemein als $(x;y)$ stehen, so erhält man für $x \neq -3$

$$-2 = \frac{y-4}{x-(-3)}.$$

Diese Gleichung kann man nach $y$ auflösen:

$$\begin{aligned} \frac{y-4}{x+3} &= -2 && \mid \cdot (x+3) \\ \Leftrightarrow y - 4 &= -2\cdot(x+3) \\ \Leftrightarrow y - 4 &= -2x - 6 && \mid +4 \\ \Leftrightarrow y &= -2x - 2. \end{aligned}$$

So erhält man die Geradengleichung, die im übrigen auch für $x = -3$ gilt.

**Aufgabe 13:**
Welche Funktionsvorschrift besitzt die Gerade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch die beiden Punkte $(-1;-4)$ und $(2;3)$ festgelegt wird?
$y =$ ?

**Lösung:**

Wir bestimmen die Funktionsvorschrift der Geraden, die durch die Punkte $(-1;-4)$ und $(2;3)$ festgelegt wird. Dazu benutzen wir die Zwei - Punkte - Form der Geradengleichung:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \quad \text{für } x \neq x_1$$

Mit $(x_1;y_1)=(-1;-4)$ und $(x_2;y_2)=(2;3)$ ergibt sich für $x \neq -1$

$$\begin{aligned}
\frac{y+4}{x+1} &= \frac{3+4}{2+1} \\
\Leftrightarrow \frac{y+4}{x+1} &= \frac{7}{3} \\
\Leftrightarrow y+4 &= \frac{7}{3}(x+1) \\
\Leftrightarrow y+4 &= \frac{7}{3}x+\frac{7}{3} \\
\Leftrightarrow y &= \frac{7}{3}x+\frac{7}{3}-4 \\
\Leftrightarrow y &= \frac{7}{3}x-\frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

Diese Gleichung gilt auch für $x=-1$.

**Aufgabe 14:**

Durch die lineare Gleichung

$$-\frac{3}{2}x-5y+12=0$$

wird eine Gerade dargestellt.
Wie lautet ihre Steigung? ?
Wie lautet ihr $y$-Achsenabschnitt? b= ?

**Lösung:**

Gegeben ist die Gleichung

$$-\frac{3}{2}x - 5y + 12 = 0.$$

Wir l"osen diese Gleichung nach $y$ auf, um Steigung und $y$-Achsenabschnitt der beschriebenen Geraden zu bestimmen

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2}x - 5y + 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow -5y &= \frac{3}{2}x - 12 \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{3}{10}x + \frac{12}{5}. \end{aligned}$$

Der Koeffizient vor $x$ entspricht der Steigung der Geraden. Die Steigung ist $-\frac{3}{10}$.
Das absolute Glied entspricht dem $y$-Achsenabschnitt $b$. Die Gerade schneidet die $y$-Achse bei $y = \frac{12}{5}$.

**Aufgabe 15:**

Berechnen Sie die Nullstellen der folgenden Geraden: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -3x+6$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{2}{7}x + \frac{1}{4}$.

1. $f$ : $x =$ ?
2. $g$ : $x =$ ?

**Lösung:**

Gegeben sind die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -3x + 6$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{2}{7}x + \frac{1}{4}$. Den Nullstellen einer Funktion entsprechen die Schnittpunkte mit der $x$-Achse des zugeh"origen Funktionsgraphen. An diesen Stellen ist der Funktionswert Null. Wir suchen folglich die $x$-Werte, f"ur die $y = 0$ gilt.

F"ur die Funktion $f$ ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= -3x + 6 \\ \Leftrightarrow 3x &= 6 \\ \Leftrightarrow x &= 2. \end{aligned}$$

Die Nullstelle ist an der Stelle $x = 2$.

F"ur die Funktion $g$ ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2}{7}x + \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow -\frac{2}{7}x &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) = -\frac{7}{8}. \end{aligned}$$

Die Nullstelle ist an der Stelle $x = -\frac{7}{8}$.