UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Virtuelles Eingangstutorium
studiVEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn
FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Virtuelles Eingangstutorium
VEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

khdm
kompetenzzentrum
hochschuldidaktik
mathematik

LE 5 - Elementare Funktionen

5.3 Quadratische Funktionen

Im Folgenden finden Sie die Abschnitte:

Übersicht ..... S. 1
Hinführung ..... S. 2
Inhalte mit Erklärungen ..... S. 14
Aufgaben ..... S. 24
Anwendung ..... S. 40
Ergänzungen ..... S. 44

Übersicht

- Einf"uhrung quadratischer Funktionen am Beispiel eines Ballwurfs vom Pisa - Turm
- Eigenschaften und Darstellungsformen quadratischer Funktionen
- Entstehung von Parabeln aus der Normalparabel
- Aufgaben und Anwendungen
- Ergänzung: allgemeine Polynom-Funktionen

Hinführung

Wir stellen uns vor, dass jemand auf dem schiefen Turm von Pisa einen Ball senkrecht nach oben wirft. Der Ball unterliegt der Erdanziehungskraft und f"allt zu Boden. Die Anziehungskraft der Erde auf eine Masse m wird beschrieben durch

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung}$$

mit der konstanten Erdbeschleunigung

$$g = 9,81\frac{m}{s^2}.$$

Das Weg - Zeit - Gesetz f"ur den freien Fall ist eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung g, wenn man den Luftwiderstand vernachlässigt. Wir lassen die Bewegung zum Zeitpunkt $x_0 = 0$ beginnen und geben zu sp"ateren Zeiten x den Abstand des Balles vom Boden h an. Wir ben"otigen noch Angaben "uber die Anfangsh"ohe h_0 (Abstand des Balles vom Erdboden zur Zeit $x_0 = 0$) und "uber die Anfangsgeschwindigkeit v_0 (Geschwindigkeit, mit welcher der Ball nach oben geworfen wird). Damit ergibt sich für die Höhe h:

$$h = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot x^2 + v_0 \cdot x + h_0.$$

Dabei ist die Beschleunigung negativ, da das Objekt nach unten angezogen wird. Für unseren Ballwurf gehen wir von einer Anfangshöhe von $h_0 = 52\,m$ und eine Geschwindigkeit von $v_0 = 10\,\frac{m}{s}$ aus. Damit erhalten wir mit dem Weg-Zeit-Gesetz die Funktionsvorschrift

$$\begin{aligned} h &= -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 10x + 52 \\ \Leftrightarrow h &= -4,905x^2 + 10x + 52, \end{aligned}$$

welches die Zuordnung Zeit $\mapsto$ Höhe des Balles zum Erdboden beschreibt. Die Zeit x wird hierbei in Sekunden und die H"ohe h in Metern angegeben, die Einheiten wurden der Einfachheit halber weggelassen.

Preview fehlt:
`h5p/312pisa`

Video 1 *(nur in digitaler Version)*

Aufgabe 1:
Berechnen Sie, welche Höhe der Ball nach einer Sekunde, zwei, drei, vier und f"unf Sekunden hat. Runden Sie auf eine Nachkommastelle.

Zeit in Sekunden	Abstand vom Erdboden in Metern
1	?
2	?
3	?
4	?
5	?

Lösung:

Die H"ohe des Balles lässt sich durch Einsetzen in die Funktionsvorschrift

$$h = -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 10x + 52.$$

bestimmen. Dadurch erhalten wir für die jeweilige Zeit:

$x = 1$ Sekunde:	$h = -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 + 52 = 57,095 \approx 57,1$
$x = 2$ Sekunden:	$h = -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 + 52 = 52,38 \approx 52,4$
$x = 3$ Sekunden:	$h = -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 3^2 + 10 \cdot 3 + 52 = 37,855 \approx 37,9$
$x = 4$ Sekunden:	$h = -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 4^2 + 10 \cdot 4 + 52 = 13,52 \approx 13,5$
$x = 5$ Sekunden:	$h = -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 5^2 + 10 \cdot 5 + 52 = -20,625$

Der Ball hat allerdings bereits vor Ablauf der f"unften Sekunden den Boden erreicht, wie man an dem negativen Wert erkennen kann. Er befindet sich zu diesem Zeitpunkt also **nicht** bei $h = -20,625$m unter der Erdoberfläche, sondern auf dem Boden, also bei $h = 0$.

Offensichtlich endet die Fallbewegung mit dem Zeitpunkt x_A, zu welchem der Ball auf den Erdboden trifft. Um die Fallzeit zu errechnen, bei der der Ball auftrifft, setzen wir die Höhe auf Null und berechnen den zugehörigen Zeitpunkt x_A:

$$-\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 10x + 52 = 0.$$

Im Unterschied zu Nullstellen von Geraden haben wir nun eine quadratische Gleichung. Wir formen um:

$$x^2 - \frac{2}{9,81} \cdot 10x - \frac{2}{9,81} \cdot 52 = 0$$

bzw.

$$x^2 - \frac{20}{9,81} \cdot x - \frac{104}{9,81} = 0\,.$$

Nach der p - q - Formel besitzt die quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

folgende L"osungen:

$$x_1, x_2 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Im vorliegenden Beispiel erh"alt man:

$$x_A = \frac{10}{9,81} \pm \sqrt{\frac{10^2}{9,81^2} + \frac{104}{9,81}}\,.$$

Infrage kommen also die Zeitpunkte

$$x_A = \frac{10}{9,81} + \sqrt{\frac{10^2}{9,81^2} + \frac{104}{9,81}} \approx 4,43119$$

und

$$x_A = \frac{10}{9,81} - \sqrt{\frac{10^2}{9,81^2} + \frac{104}{9,81}} \approx -2,39246\,.$$

Die negative Fallzeit kann ausgeschlossen werden. Dieser Zeitpunkt liegt in der Vergangenheit vor dem Beginn des Ballwurfs. Der Ball trifft somit nach der Fallzeit $x_A \approx 4,43119$ Sekunden auf dem Boden auf.

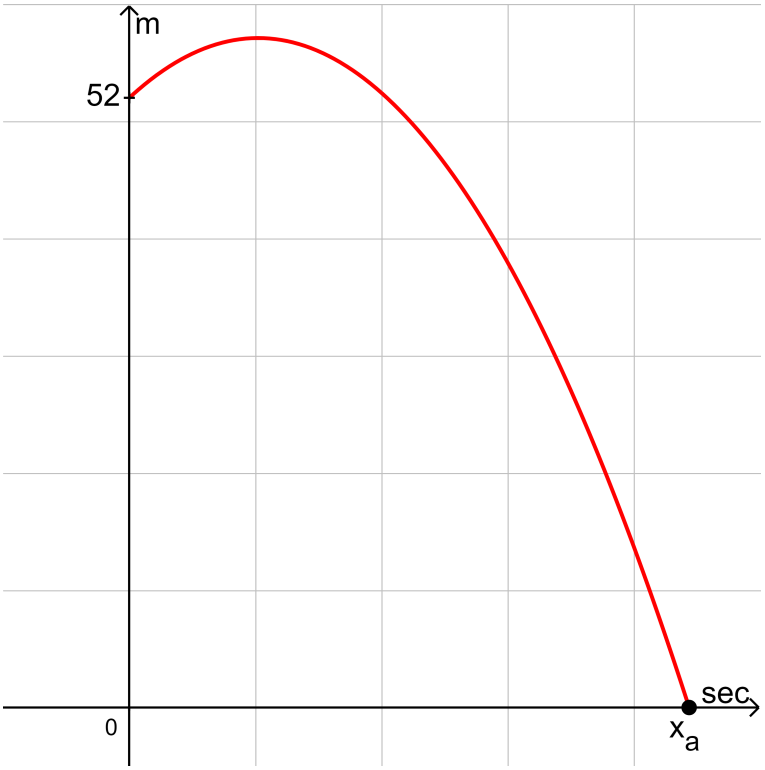


Bild 1 Zeit des Aufpralls des Balls auf den Boden

Schauen wir uns nun den Vorgang noch einmal vollst"andig an:
Nach dem Hochwerfen gewinnt der Ball zun"achst an H"ohe. Er steigt auf bis zum Umkehrpunkt (Scheitelpunkt), geht dort in die Fallbewegung "uber und f"allt dann zu Boden. Alle H"ohen oberhalb der Ausgangsh"ohe werden zweimal durchlaufen. Einmal in der aufsteigenden und einmal in der fallenden Bewegung. Die einzige Ausnahme bildet die Scheitelh"ohe, die nur zu einem einzigen Zeitpunkt erreicht wird. Damit unterscheidet sich diese quadratische Funktion von den linearen Funktionen, wo jeder Funktionswert eindeutig zu einem Argument zugewiesen werden kann.

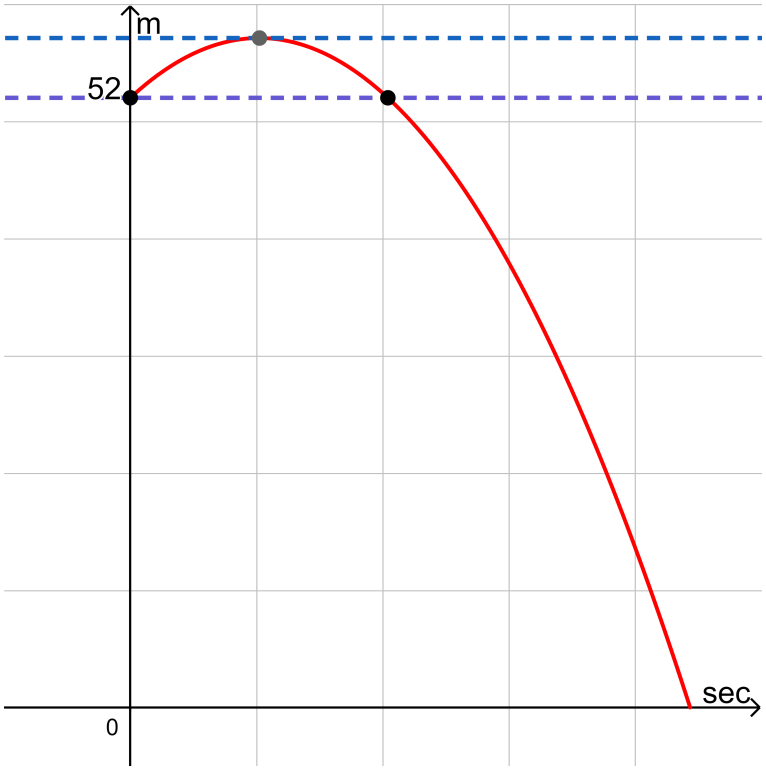


Bild 2 H"ohen oberhalb von $h_0 = 52$ und Scheitelh"ohe

F"ur H"ohen h ergibt sich der dazugehörige Zeitpunkt aus der Gleichung:

$$-\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 10x + 52 = h$$

bzw.

$$x^2 - \frac{2}{9,81} \cdot 10x - \frac{2}{9,81} \cdot 52 + \frac{2}{9,81} \cdot h = 0.$$

Wir l"osen die Gleichung wieder mit der p - q - Formel:

$$\begin{aligned} x &= \frac{10}{9,81} \pm \sqrt{\frac{10^2}{9,81^2} + \frac{104}{9,81} - \frac{2}{9,81}h} \\ &= \frac{10}{9,81} \pm \frac{1}{9,81}\sqrt{10^2 + 9,81 \cdot 104 - 2 \cdot 9,81 \cdot h}\,. \end{aligned}$$

Die L"osungsformel l"asst folgende Schl"usse zu:

- Die Scheitelhöhe h_s entspricht dem größtmöglichen Wert für h, der in die Lösungsformel eingesetzt werden kann. Dann verschwindet der Ausdruck unter der Wurzel. Für noch größere Werte von h würde er negativ und man könnte keine (relle) Wurzel ziehen.

  $$(**) \quad 10^2 + 9,81 \cdot 104 - 2 \cdot 9,81 \cdot h_s = 0\,,$$

  also

  $$h_s = 52 + \frac{1}{2} \cdot \frac{10^2}{9,81} \approx 52 + 5,09684 \approx 57,0968\,.$$

- Für $h > h_s \approx 57,0968$ würde man für den Term unter der Wurzel negative Werte erhalten

  $$10^2 + 9,81 \cdot 104 - 2 \cdot 9,81 \cdot h < 0\,.$$

  Da wir aus negativen Zahlen keine (reellen) Wurzeln ziehen können, werden größere Höhen als h_S nie erreicht.

- Für Höhen $h < h_s \approx 57,0968$ ist der Term unter der Wurzel immer positiv:

$$10^2 + 9,81 \cdot 104 - 2 \cdot 9,81 \cdot h > 0\,.$$

Man erhält für Höhen $52 < h < h_s$ zwei verschiedene positive Zeitpunkte, da für beide Vorzeichen gilt

$$x_{0,1} = \frac{10}{9,81} \pm \frac{1}{9,81}\sqrt{10^2 + 9,81 \cdot 104 - 2 \cdot 9,81 \cdot h} > 0\,.$$

und beide Vorzeichen in der Formel führen zu einem dazugehörig positiven Zeitpunkt:

$$x = \frac{10}{9,81} \pm \frac{1}{9,81}\sqrt{10^2 + 9,81 \cdot 104 - 2 \cdot 9,81 \cdot h}\,.$$

- Bei Höhen $h < 52$ erhalten wir jeweils nur einen positiven Zeitpunkt, da jeweils für die Vorzeichen gilt

$$x_0 = \frac{10}{9,81} + \frac{1}{9,81}\sqrt{10^2 + 9,81 \cdot 104 - 2 \cdot 9,81 \cdot h} > 0\,,$$
$$x_1 = \frac{10}{9,81} - \frac{1}{9,81}\sqrt{10^2 + 9,81 \cdot 104 - 2 \cdot 9,81 \cdot h} < 0\,.$$

Damit kommt nur der positive Zeitpunkt für diese Höhen in Frage.

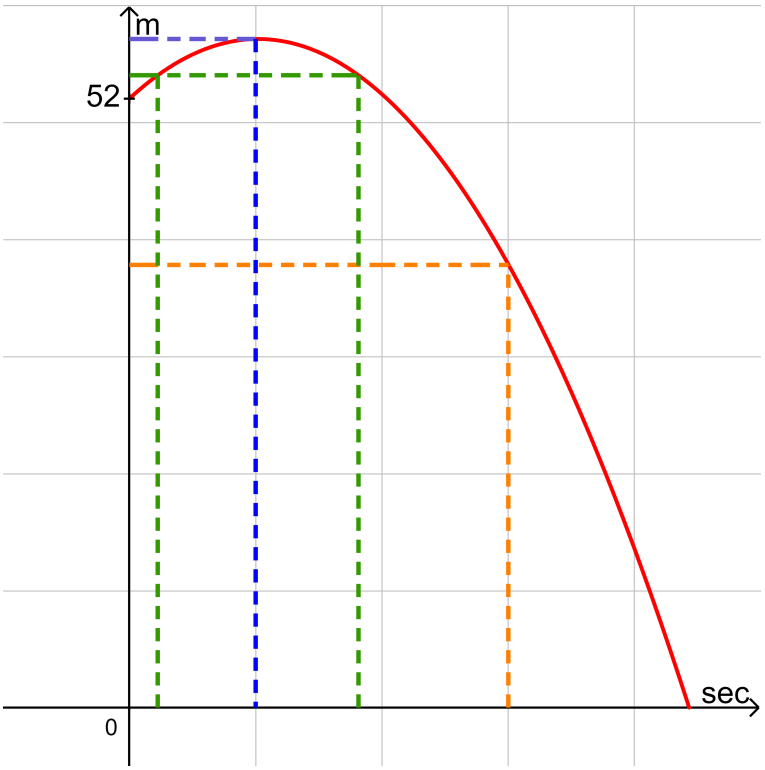


Bild 3 Zu verschiedenen H"ohen geh"orende Zeiten

Berechnen Sie, zu welchen Zeiten die H"ohen $h = 54$ und $h = 40$ durchlaufen werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf eine Nachkommastelle.

Die Höhe $h = 54$ wird zu den Zeiten $x_1 =$? Sekunden und $x_2 =$? Sekunden durchlaufen.

Die Höhe $h = 40$ wird zum Zeitpunkt $x =$? Sekunden durchlaufen.

Lösung:

Der Funktionsgraph der Wurfparabel lautet

$$h = -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 10x + 52.$$

Um die Zeiten zu bestimmen, wann der Ball eine H"ohe von $h = 54$ Metern hat, setzen wir gleich:

$$54 = -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 10x + 52.$$

Wir formen um:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 10x - 2 \\ &= x^2 - \frac{20}{9,81} \cdot x + \frac{4}{9,81} \end{aligned}$$

Jetzt können wir die p - q - Formel anwenden.

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= \frac{10}{9,81} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{9,81}\right)^2 - \frac{4}{9,81}} \\ &= \frac{10}{9,81} \pm \frac{1}{9,81}\sqrt{100 - 4 \cdot 9,81} \\ &= \frac{10}{9,81} \pm \frac{1}{9,81}\sqrt{60,76}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich:

$$x_1 = 0,225 \text{ Sek}, \quad x_2 = 1,814 \text{ Sek}.$$

Gerundet auf eine Nachkommastelle also $x_1 = 0,2$ und $x_2 = 1,8$ Sekunden.

In analoger Weise können wir berechnen, wann der Ball eine Höhe von $h = 40$ Metern erreicht hat:

$$\begin{aligned} 40 &= -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 10x + 52 \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= x^2 - \frac{20}{9,81}x - \frac{24}{9,81} \end{aligned}$$

p - q - Formel:

$$x_{1/2} = \frac{10}{9,81} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{9,81}\right)^2 + \frac{24}{9,81}}$$

Es ergibt sich: $x_1 = -0,848$ und $x_2 = 2,886$. Wir betrachten aber nur positive Zeiten. Demnach hat der Ball eine Höhe von 40 Metern 2,886 Sekunden nach dem Abwurf.
Hier ergibt sich beim Runden auf eine Nachkommastelle also $x = 2,9$ Sekunden.

Alternativ hätten wir die Lösungen auch erhalten, wenn wir die Höhen h direkt in die oben angegebene L"osungsformel

$$x = \frac{10}{9,81} \pm \frac{1}{9,81}\sqrt{10^2 + 9,81 \cdot 104 - 2 \cdot 9,81 \cdot h}$$

eingesetzt hätten.

Die Scheitelh"ohe stellt das Maximum der erreichbaren H"ohen dar. Wir k"onnen das Maximum der Funktionswerte der quadratischen Funktion mittels Differentialrechnung bestimmen (siehe hierzu Kurs *Differentialrechnung*). Wir k"onnen aber auch elementar mit Gleichung (**) und der p - q - Formel zum Ziel kommen. Wir brauchen diese Formel nicht einmal explizit zu benutzen, wie folgende "Uberlegung zeigt (Qudratische Erg"anzung, siehe Kurs *Terme und Gleichungen*):

$$\begin{aligned} h &= -\frac{1}{2}\cdot 9,81x^2 + 10x + 52 \\ &= -\frac{1}{2}\cdot 9,81\left(x^2 - \frac{20}{9,81}x\right) + 52 \\ &= 52 + \frac{1}{2}\cdot\frac{10^2}{9,81} - \frac{1}{2}\cdot 9,81\left(x - \frac{10}{9,81}\right)^2 \\ &= 57,0968 - \frac{1}{2}\cdot 9,81\left(x - \frac{10}{9,81}\right)^2. \end{aligned}$$

Die H"ohe h wird als Differenz dargestellt. Von der Scheitelh"ohe: $h_s \approx 57,0968$ wird folgende H"ohe abgezogen:

$$\frac{1}{2}\cdot 9,81\left(x - \frac{10}{9,81}\right)^2.$$

Die Differenz beträgt Null bei der Zeit

$$x_s = \frac{10}{9,81} \approx 1,01937.$$

Nehmen wir nun an, eine zweite Person ist nicht so kr"aftig wie der erste Werfer und kann nur eine Anfangsgeschwindigkeit von 5 $\frac{m}{s}$ realisieren. Die zweite Person stellt sich aber daf"ur auf eine Kiste und erreicht die Anfangsh"ohe 53 m. Welche Scheitelh"ohe erreicht der Ball nun und wie lange bleibt er in der Luft? Das Weg - Zeit - Gesetz lautet mit den neuen Anfangsbedingungen:

$$h = -\frac{1}{2}\cdot 9,81x^2 + 5x + 53\,.$$

Die H"ohe h kann hier als Differenz dargestellt werden:

$$(1) \qquad h = 53 + \frac{1}{2}\cdot\frac{5^2}{9,81} - \frac{1}{2}\cdot 9,81\left(x - \frac{5}{9,81}\right)^2.$$

Hieraus ergibt sich die Scheitelhöhe:

$$h_s = 53 + \frac{1}{2}\cdot\frac{5^2}{9,81} \approx 53 + 1,27421 \approx 54,27421.$$

Die Zeit, die vergeht bis der Ball auf den Boden auftrifft, betr"agt:

$$(2) \qquad x_A = \frac{5}{9,81} + \sqrt{\frac{5^2}{9,81^2} + \frac{2\cdot 53}{9,81}} \approx 3,83611.$$

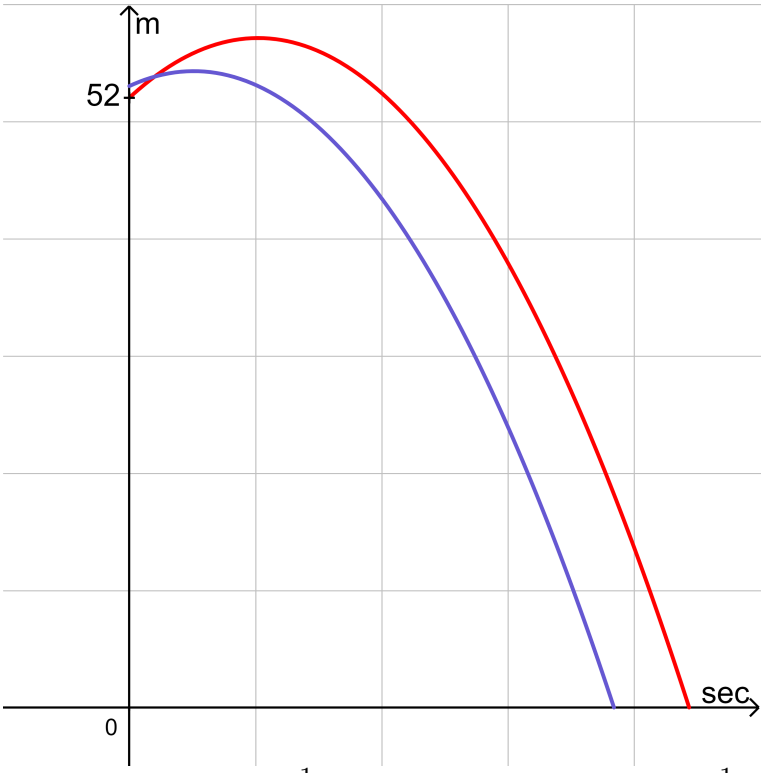


Bild 4 Die beiden Wurfparabeln $h = -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 10x + 52$ und $h = -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 5x + 53$

Aufgabe 2:
Leiten Sie die Gleichungen (1) und (2) her.

Lösung:

Das Weg - Zeit - Gesetz f"ur den Wurf der zweiten Person lautet

$$h = -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 5x + 53.$$

Wir formen mithilfe quadratischer Erg"anzung um:

$$\begin{aligned} h &= -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \left(x^2 - \frac{10}{9,81}x \right) + 53 \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \left(x^2 - \frac{10}{9,81}x + \left(\frac{5}{9,81} \right)^2 - \left(\frac{5}{9,81} \right)^2 \right) + 53 \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \left(x^2 - \frac{10}{9,81}x + \left(\frac{5}{9,81} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{5^2}{9,81} + 53 \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \left(x^2 - \frac{5}{9,81} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5^2}{9,81} + 53 \\ &= 53 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5^2}{9,81} - \frac{1}{2} \cdot 9,81 \left(x^2 - \frac{5}{9,81} \right)^2. \end{aligned}$$

Nun zur Herleitung von Gleichung (2):
Wenn der Ball auf den Boden trifft, hat er eine H"ohe von Null Metern. Wir setzen folglich in obiger Gleichung $h = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 5x + 53 \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= x^2 - \frac{10}{9,81}x - \frac{2 \cdot 53}{9,81}. \end{aligned}$$

Mit der p - q - Formel ergibt sich:

$$x_{1/2} = \frac{5}{9,81} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{9,81} \right)^2 + \frac{2 \cdot 53}{9,81}}.$$

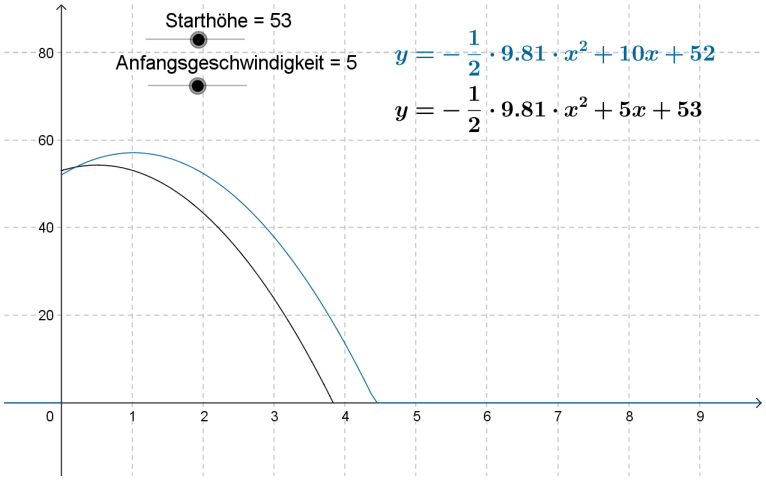
Da wir nur positive Zeiten betrachten, ist der Zeitpunkt des Autritts erreicht bei

$$x_A = x_1 = \frac{5}{9,81} + \sqrt{\frac{5^2}{9,81^2} + \frac{2 \cdot 53}{9,81}}.$$

Aufgabe 3:

Welche Anfangsh"ohe h_0 wäre nötig, um mit der Anfangsgeschwindigkeit $5\frac{m}{s}$ dieselbe Scheitelh"ohe zu erreichen wie mit der Anfangsh"ohe $52m$ und der Anfangsgeschwindigkeit $10\frac{m}{s}$?

Berechnen Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen genau:
Die Anfangshöhe muss mindestens [?] betragen.
Überprüfen Sie Ihr Ergebnis zusätzlich anhand des folgenden Applets:



Interaktion 1 *(nur in digitaler Version)*

Lösung:

Für die niedrigere Anfangsgeschwindigkeit ergibt sich folgende Scheitelh"ohe:

$$h_s = h_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5^2}{9,81}.$$

Gleichsetzen der Scheitelh"ohen liefert die Bedingung:

$$h_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5^2}{9,81} = 52 + \frac{1}{2} \cdot \frac{10^2}{9,81}$$

mit der L"osung:

$$\begin{aligned} h_0 &= 52 + \frac{1}{2} \cdot \frac{10^2}{9,81} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5^2}{9,81} \\ &\approx 55,82 \end{aligned}$$

Die Anfangshöhe muss also mindestens 55,82m betragen.

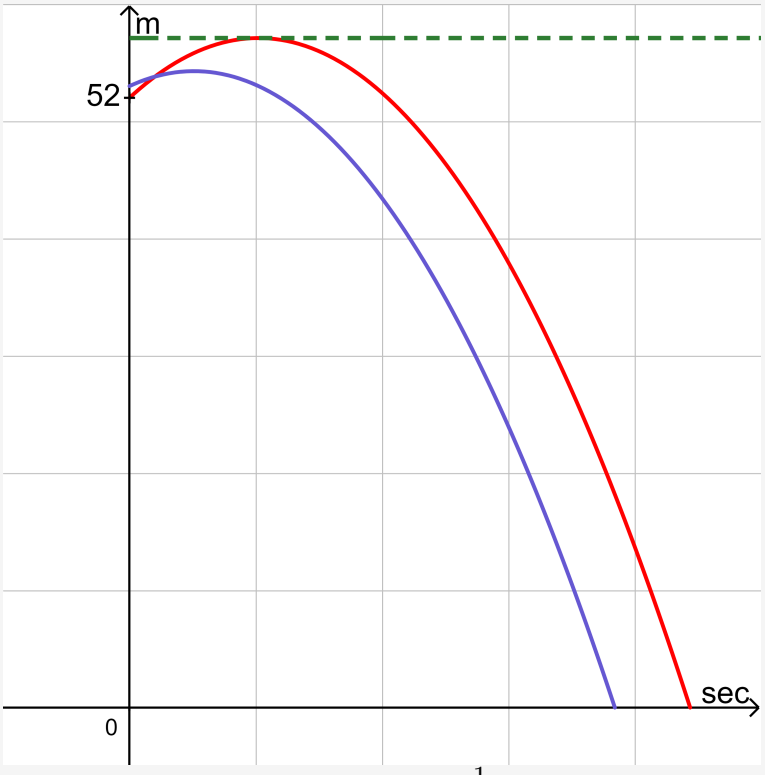


Bild 5 Die beiden Wurfparabeln $h = -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 10x + 52$ und $h = -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 5x + 55,8226$.

Wenn man einen Ball in der H"ohe 52 m mit $10\frac{m}{s}$ nach oben wirft und zugleich einen Ball in der soeben berechneten H"ohe h_0 mit $5\frac{m}{s}$, zu welcher Zeit w"urden sich die B"alle dann treffen?

Berechnen Sie das Ergebnis wieder auf zwei Nachkommastellen genau:
Die Bälle treffen sich nach ? Sekunden.

Lösung:

Wir setzen die Funktionsterme gleich

$$-\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 10x + 52 = -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 5x + 55,8226$$

und bekommen

$$10x + 52 = 5x + 55,8226$$
$$\text{bzw.} \qquad x \approx 0,76$$

Die B”alle treffen sich also nach etwa 0,76 Sekunden.

Inhalte mit Erklärungen

Das Beispiel des Ballwurfs hat gezeigt, dass quadratische Funktionen u.a. in folgenden zwei Aspekten von linearen Funktionen abweichen. Sieht man bei einer linearen Funktion vom Sonderfall der Parallelen zur x-Achse $m = 0$ ab, so werden erstens alle Zahlen auf der y-Achse als Werte angenommen und zweitens besitzen alle diese Werte genau ein Urbild. Beim Ballwurf liegen die Dinge anders. Die Scheitelh"ohe kann der Ball nicht "uberschreiten und gewisse H"ohen wurden zu zwei verschiedenen Zeiten durchlaufen.

Wir betrachten zun"achst die Funktion, die durch $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = f(x) = x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben wird. Den Graphen dieser Funktion nennt man auch die Normalparabel. Die Funktion kann keine Funktionswerte annehmen, die negativ sind, denn ein Quadrat ist immer gr"o"ser oder gleich Null. Daraus ergibt sich Null als minimaler Funktionswert von f. Dagegen wird jeder y-Wert oberhalb des Minimums tats"achlich als Funktionswert angenommen.

Der Minimalwert $y = 0$ wird an der Stelle $x = 0$ angenommen. Den Punkt $(0; 0)$ nennt man Scheitelpunkt.

Geben wir $y > 0$ vor, dann gibt es allerdings zwei Stellen x_1, x_2, die den Funktionswert y haben, n"amlich

$$x_1 = \sqrt{y} \quad \text{und} \quad x_2 = -\sqrt{y}$$

mit

$$x_1^2 = (\sqrt{y})^2 = y \quad \text{und} \quad x_2^2 = (-\sqrt{y})^2 = y.$$

(Mit Wurzeln beschäftigt sich der Kurs *Wurzeln, Potenzen, Logarithmen* ausführlicher.)

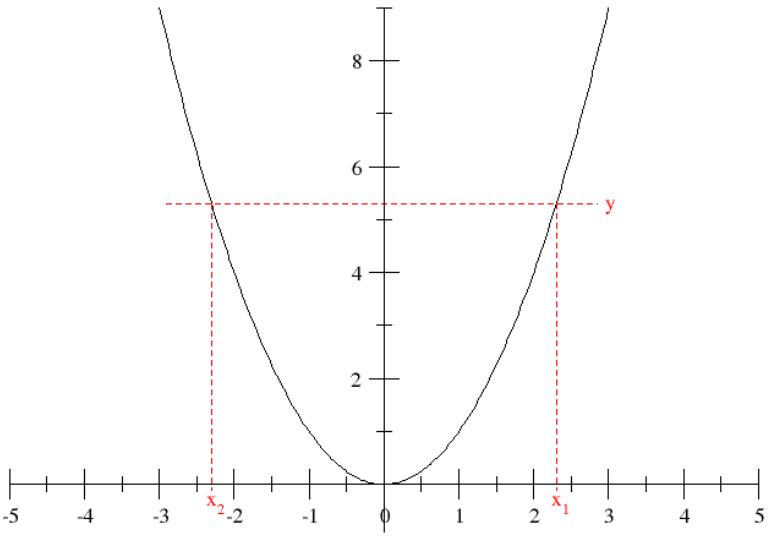
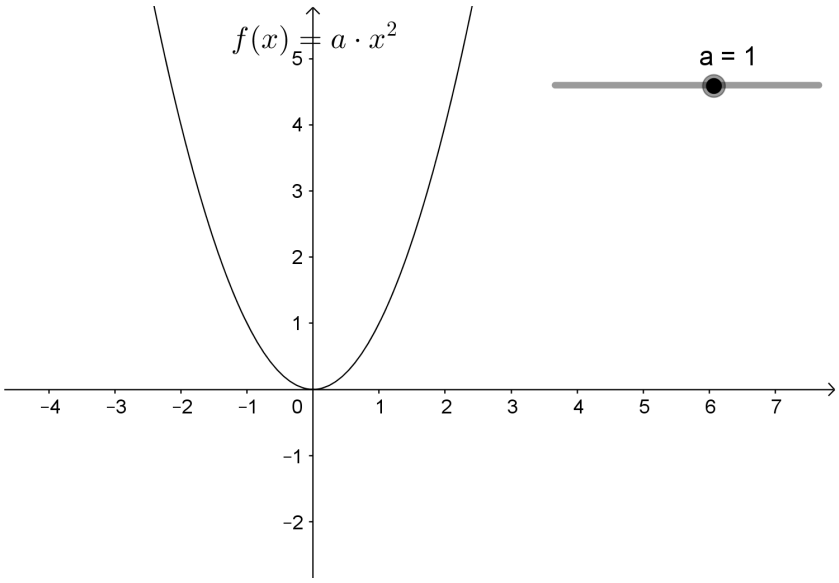


Bild 6 Die Parabel $y = x^2$.

Die allgemein gestreckte Parabel wird als folgende Funktion definiert

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; y = ax^2 \quad \text{mit } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$



Interaktion 2 *(nur in digitaler Version)*

Der Scheitelpunkt liegt hier immer im Punkt $(0;0)$.

Im Folgenden sind zwei F"alle zu unterscheiden:

1. $a < 0$: Die Funktion hat in $x = 0$ ihr Maximum und
2. $a > 0$: Die Funktion hat bei $x = 0$ ein Minimum.

Begründung:

1. $a < 0$: Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \neq 0$, ist $x^2 > 0$, also $ax^2 < 0$.
2. $a > 0$: Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \neq 0$, ist $x^2 > 0$, also $ax^2 > 0$.

Das Vorzeichen des Parameter a gibt also die Öffnungsrichtung der Parabel an. Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben geöffnet und für $a < 0$ ist die Parabel nach unten geöffnet.

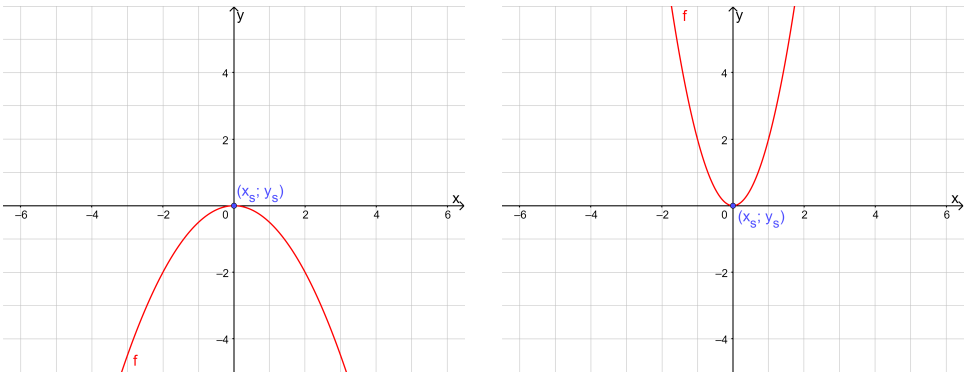


Bild 7 Parabel, die zur Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ gehört, mit Scheitelpunkt als Maximum (links) und Parabel zur Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 2x^2$ mit Scheitelpunkt als Minimum (rechts)

Man nennt a auch den **Streckfaktor**. Je größer der Betrag von a ist, desto stärker ist die Parabel in y-Richtung gestreckt.

Sei $a > 0$. Wir betrachten die Breite der Parabel auf der Höhe $y = 1$. Dort gilt $ax_1^2 = ax_2^2 = 1$. Also sind die dazugehörigen x-Werte $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{a}}$ und $x_2 = +\frac{1}{\sqrt{a}}$. Die Breite der Parabel an dieser Stelle beträgt also $x_2 - x_1 = \frac{2}{\sqrt{a}}$. Das heißt, je größer a ist, desto **schmaler** ist die Parabel bei $y = 1$. Äquivalent lässt sich daraus herleiten, dass je größer der Betrag für a wird, desto schmaler wird die Parabel.

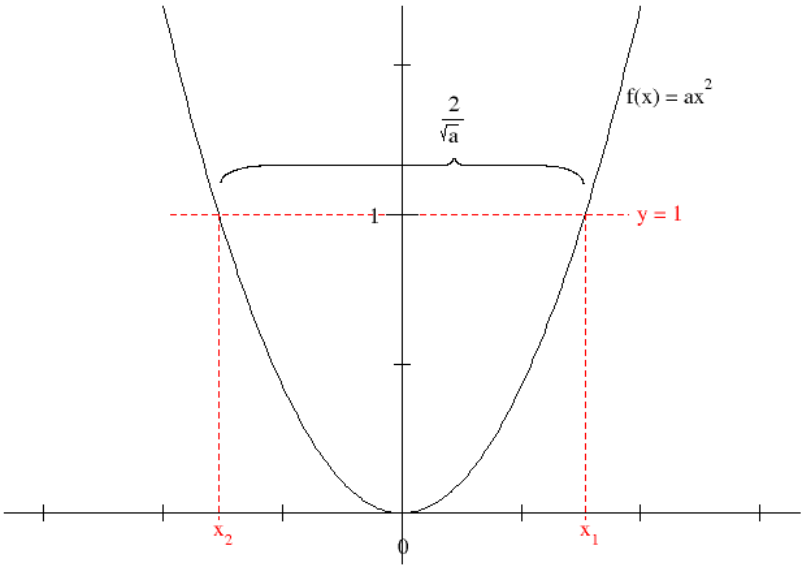


Bild 8

Als N"achstes werden wir den Graphen der Parabel in y-Richtung verschieben. Addiert man einen konstanten Wert zum Funktionsterm, so wird die Parabel parallel zur y-Achse verschoben. Beispielsweise wird die um zwei Einheiten nach oben verschobene Normalparabel durch die Funktionsvorschrift $y = x^2 + 2$ und die um drei Einheiten nach unten verschobene Normalparabel durch $y = x^2 - 3$ beschrieben.

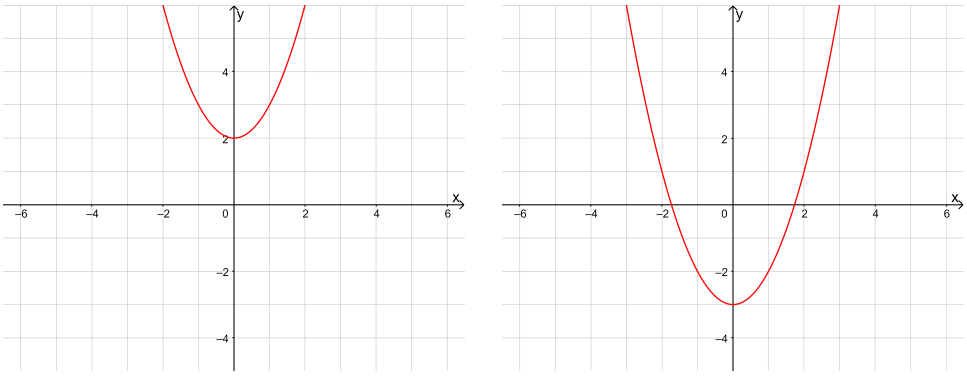


Bild 9 Links: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 + 2$ und Scheitelpunkt bei $(0; 2)$.
Rechts: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^2 - 3$ und Scheitelpunkt bei $(0; -3)$.

Eine Verschiebung in x - Richtung erhält man durch Subtraktion eines konstanten Werts von der Variablen x im Funktionsterm. So wird die um vier Einheiten nach links verschobene Normalparabel durch die Funktionsvorschrift $y = (x + 4)^2$ und die um zwei Einheiten nach rechts verschobene

Normalparabel durch $y = (x-2)^2$ dargestellt.

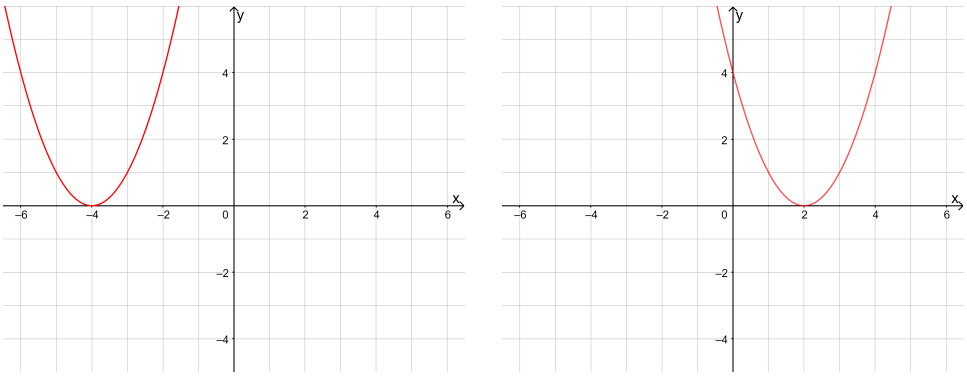


Bild 10 Links $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (x+4)^2$ mit Scheitelpunkt bei $(-4; 0)$. Rechts: $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = (x-2)^2$ mit Scheitelpunkt $(2; 0)$.

Wir können die Normalparabel auch in x- und y- Richtung verschieben. So hat die um drei Einheiten nach unten und um zwei Einheiten nach links verschobene Normalparabel die Funktionsvorschrift $y = (x+2)^2 - 3$.

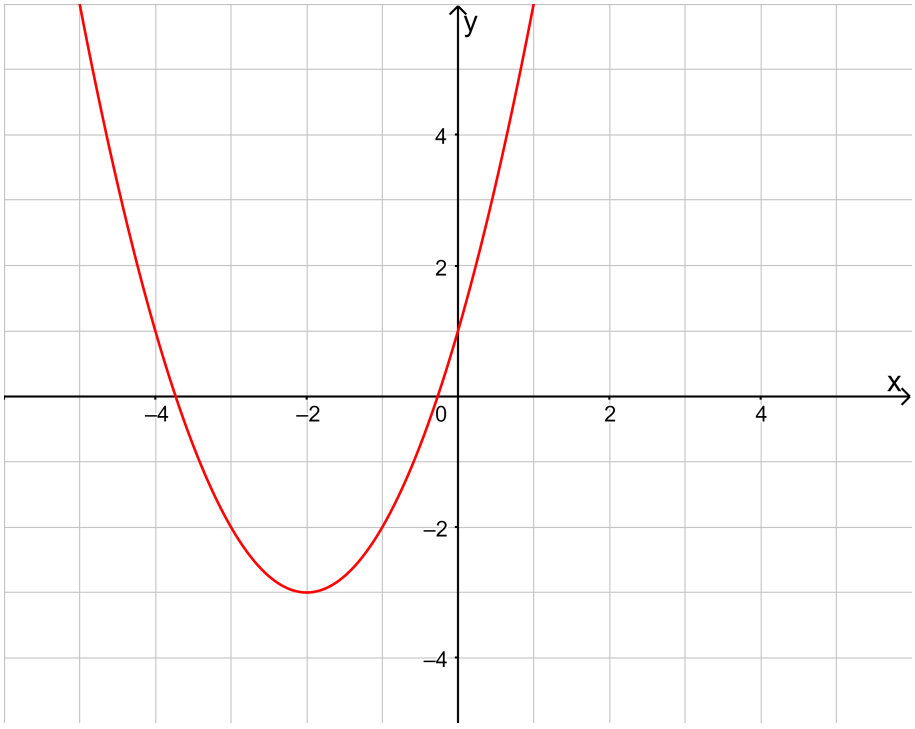


Bild 11 $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = (x+2)^2 - 3$ mit Scheitelpunkt $(-2; 3)$.

Es lässt sich aus dem Beispiel allgemein vermuten, dass bei einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (x - x_s)^2 + y_s$ und $x_s, y_s \in \mathbb{R}$ der Scheitelpunkt bei (x_s, y_s) liegt und dort den Tiefpunkt darstellt.

Diese Vermutung stimmt, da $(x - x_s)^2 >= 0$ durch das Quadrat gilt. Der kleinste Funktionswert wird also erreicht, wenn $x = x_s$ und damit $f(x_s) = y_s$ angenommen wird.

Wird die Funktionsvorschrift um den Streckfaktor a ergänzt, so erhält man

$$y = a(x - x_s)^2 + y_s \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{y - y_s}{a} = (x - x_s)^2$$

und demnach

$$x_{1,2} = x_s \pm \sqrt{\frac{y - y_s}{a}}\,.$$

Der Term unter der Wurzel darf nicht negativ werden. Für $a > 0$ muss also $y > y_s$ gelten und für $a < 0$ muss $y < y_s$ gelten. Die Parabel ist also für positive Streckfaktoren a nach unten geöffnet, da nur größere Funktionswerte als y_s angenommen werden. Äquivalent ist die Parabel für negative Streckfaktoren a nach oben geöffnet, da nur kleinere Funktionswerte als y_s angenommen werden. F"ur die "ubrigen Funktionswerte mit Ausnahme von $y = y_s$ erhalten wir genau zwei Urbilder.

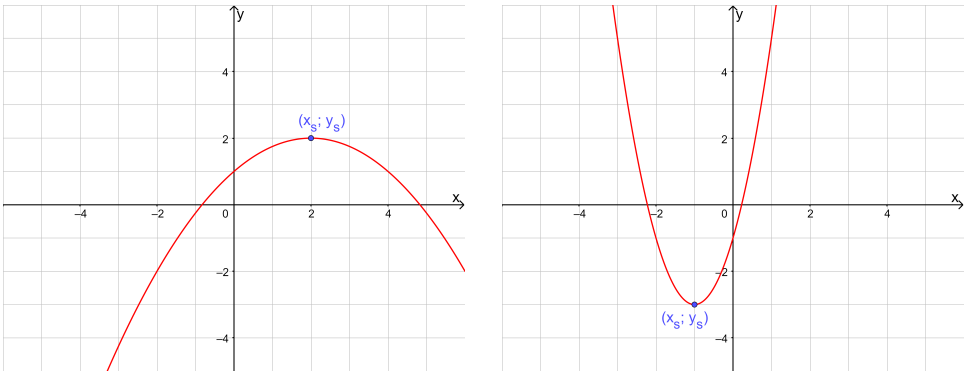


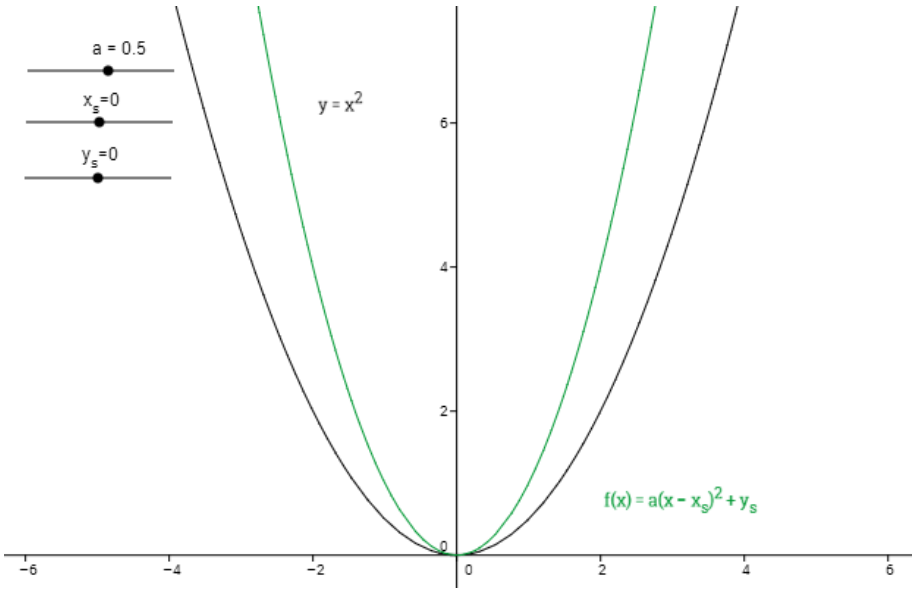
Bild 12 Parabel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:, $y = a(x - x_s)^2 + y_s$ mit Scheitelpunkt als Maximum bzw. Minimum

Satz 1:

Bei einer Parabel, die als Graph der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y = a(x - x_s)^2 + y_s$$

mit $a \neq 0,\ a, x_s, y_s \in \mathbb{R}$ gegeben ist, haben wir f"ur $a < 0$ einen Hochpunkt und f"ur $a > 0$ einen Tiefpunkt im Scheitel.



Interaktion 3 *(nur in digitaler Version)*

Wir wollen eine andere Darstellung des Funktionsterms. Dafür multiplizieren wir die Scheitelpunktform der Parabelgleichung $y = a(x-x_s)^2+y_s$ multiplizieren wir aus und ordnen nach Potenzen von x:

$$\begin{aligned} y &= a(x-x_s)^2 + y_s \\ &= a(x^2 - 2x_s x + x_s^2) + y_s \\ &= ax^2 - 2ax_s x + ax_s^2 + y_s. \end{aligned}$$

Dies f"uhrt auf die allgemeine quadratische Funktionsvorschrift der Form:

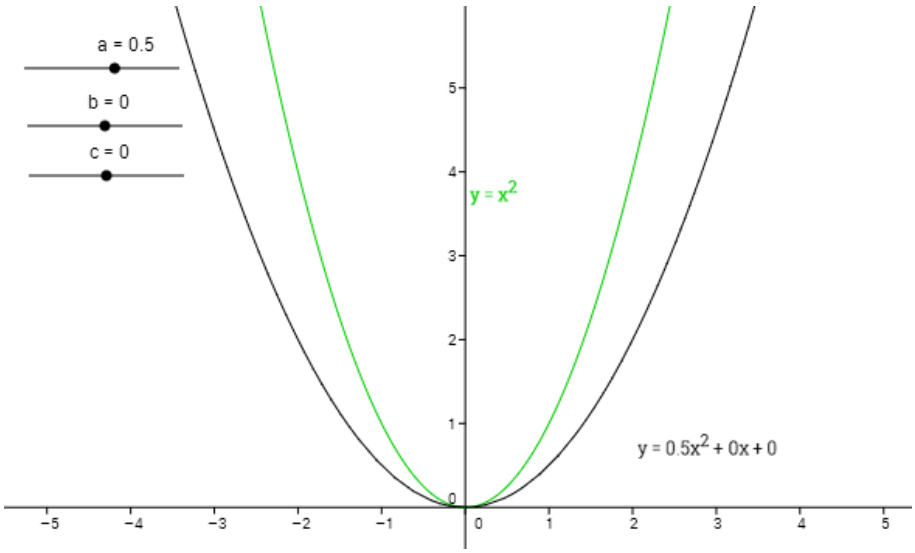
$$y = ax^2 + bx + c$$

mit $b = -2ax_s$ und $c = ax_s^2 + y_s$

Definition 1:
Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die für alle $x \in \mathbb{R}$ als $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit beliebigen, konstanten Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ dargestellt werden können, heißen **quadratische Funktionen**. Diese Darstellung nennt man auch Normalform.

Info 1:
Die Graphen quadratischer Funktionen heißen Parabeln.

Für den Parameter $a \in \mathbb{R}$ wurde $a \neq 0$ gefordert. F"ur $a = 0$ erhalten wir den Sonderfall der bereits bekannten linearen Funktionen.



Interaktion 4 *(nur in digitaler Version)*

Wir haben gesehen, dass Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die als $f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$ dargestellt werden können, auch in die Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ gebracht werden können. Wenn dies auch umgekehrt gilt, kann man aus der Normalform die Scheitelpunktform ermitteln und daraus den jeweiligen Scheitelpunkt ablesen.

Wir nehmen die quadratische Ergänzung (siehe Kurs *Terme und Gleichungen*) zu Hilfe und schreiben die Formel einer quadratischen Funktion (mit $a \neq 0$) folgendermaßen um:

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

Aufgabe 4:
Pr"ufen Sie die "Uberf"uhrung in die Scheitelpunktform nach.

Lösung:

Wir zeigen mithilfe quadratischer Erg"anzung

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

$$\begin{aligned} & ax^2 + bx + c \\ = \; & a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ = \; & a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c \\ = \; & a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ = \; & a\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}. \end{aligned}$$

Im Sonderfall $y = ax^2$ sind Normal- und Scheitelpunktform also identisch. Das erkennt man, indem man in obiger Gleichung $b = 0$ und $c = 0$ einsetzt.

Definition 2:

Der Punkt

$$(x_s; y_s) = \left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right) \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ und } a \neq 0$$

hei"st **Scheitelpunkt** der Parabel $y = ax^2 + bx + c$.

Bemerkungen

- Im Fall $a < 0$ stellt der Scheitelpunkt einen Hochpunkt dar. Der Scheitelwert ist das Maximum aller Funktionswerte.
- Im Fall $a > 0$ stellt der Scheitelpunkt einen Tiefpunkt dar. Der Scheitelwert ist das Minimum aller Funktionswerte.

Wir haben gesehen: Eine Gerade wird durch zwei verschiedene Punkte festgelegt. Die Geradengleichung $y = mx + b$ wird mit Hilfe von zwei Paramtern (m, b) definiert. In die Gleichung einer Parabel $y = ax^2 + bx + c$ gehen drei Parameter ein (a, b und c). Man kann vermuten, dass drei verschiedene Punkte eine Parabel festlegen. Unter Verwendung der Normalform führt dies zu einem System mit drei Gleichungen und drei Unbekannten, welches es zu lösen gilt. Übersichtlicher findet man die Parabelgleichung durch die Verwendung der Scheitelpunktsform, in dem man den Scheitelpunkt und einen weiteren Punkt kennt. Übersichtlicher wird das Problem, wenn man die Scheitelpunktform zugrunde legt.

Seien $(x_s; y_s)$ der Scheitelpunkt und $(x_0; y_0)$ ein anderer Punkt auf der Parabel. Eine Funktionsvorschrift der quadratischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch diese beiden Punkte verläuft, sei

gesucht. Geht man von der Scheitelpunktform $f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$ aus, so muss man a so wählen, dass die Parabel durch $(x_0; y_0)$ verläuft.

Bemerkungen

- Die y-Werte der beiden Punkte können nicht übereinstimmen, da der y-Wert im Scheitelpunkt nur einmal auf der Parabel vorkommt.
- Auch die x-Werte der beiden Punkte können nicht übereinstimmen, weil dieser Punkt sonst keinen eindeutigen Funktionswert hätte (und es gilt ja $y_0 \neq y_s$).
- Soll also eine Parabel durch einem Scheitelpunkt und einem zu ihm verschiedenen Punkt gefunden werden, so müssen sowohl die x- also auch die y-Koordinate der beiden Punkte verschieden sein.

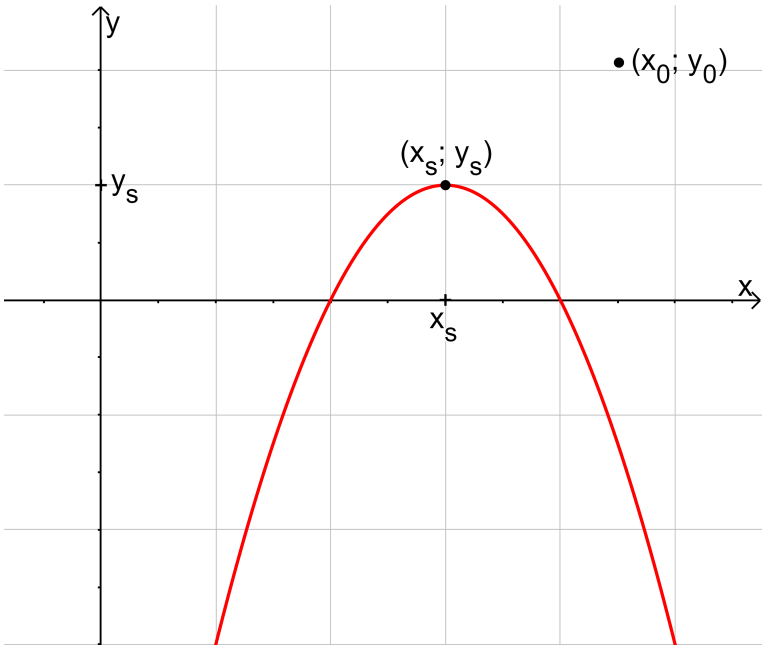


Bild 13

Info 2:

Es seien ein Punkt $(x_s; y_s)$ gegeben und ein weiterer Punkt $(x_0; y_0)$ mit $x_0 \neq x_s$, $y_0 \neq y_s$ und $x_0, y_0, x_s, y_s \in \mathbb{R}$. Dann gibt es genau eine Parabel, die $(x_s; y_s)$ als Scheitelpunkt besitzt und durch den Punkt $(x_0; y_0)$ geht.

Begründung:
Sei $f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$. Dann ist $(x_s; y_s)$ der Scheitelpunkt der Parabel. Dass auch der Punkt $(x_0; y_0)$ auf der Parabel liegt, bedeutet

$$y_0 = a \cdot (x_0 - x_s)^2 + y_s \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{y_0 - y_s}{(x_0 - x_s)^2}\,.$$

Dies ist definiert, da $x_0 \neq x_s$ gilt. Da außerdem $y_0 \neq y_s$ gilt, ist $a \neq 0$ und es liegt tatsächlich eine quadratische Funktion vor.

Es gibt einen weiteren wesentlichen Unterschied zwischen linearen und quadratischen Funktionen. Betrachten wir bei einer linearen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $y = mx + b$ $(m, b \in \mathbb{R})$ die Funktionswerte

an der Stelle x und an der Stelle $x+\Delta x$. Dem Zuwachs Δx im Argument entspricht ein immer gleicher Zuwachs der Funktionswerte

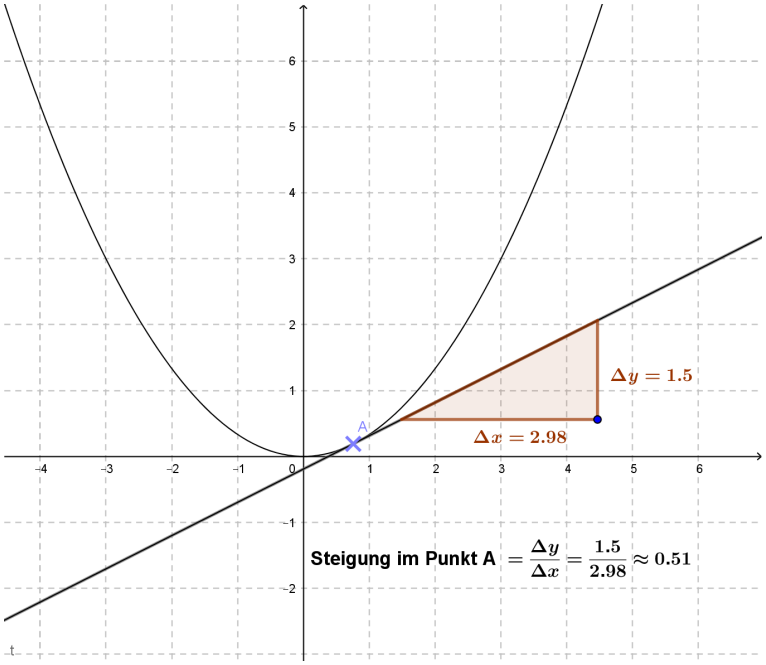
$$(m(x+\Delta x)+b)-(mx+b)=m\Delta x\,.$$

Bei quadratischen Funktionen $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $y=ax^2+bx+c$ ist das nicht mehr der Fall. Dem Zuwachs Δx im Argument entspricht der Zuwachs der Funktionswerte:

$$\begin{aligned} & \big(a(x+\Delta x)^2+b(x+\Delta x)+c\big)-\big(ax^2+bx+c\big) \\ = \;& a\left(2x\Delta x+(\Delta x)^2\right)+b\Delta x\,. \end{aligned}$$

Der Zuwachs der Funktionswerte ist nicht unabh"angig von der Stelle x, in welcher der Zuwachs im Argument abgetragen wird.

Bei der Normalparabel nimmt die Steigung für $x>0$ mit wachsendem x zu, wie man an folgender Grafik erkennt:



Interaktion 5 *(nur in digitaler Version)*

Aufgaben

Aufgabe 5:
Von einer Parabel sei der Scheitelpunkt $(x_s; y_s) = (-2; 3)$ sowie der Punkt $(5; 7)$ bekannt.

Wie lautet die Gleichung der Parabel? ?
Was ist der graphische Zusammenhang der gesuchten Parabel und der Normalparabel?

Lösung:

Hierf"ur verwenden wir die Scheitelpunktform $y = a(x - x_s)^2 + y_s$ und setzen zun"achst die Koordinaten des Scheitelpunkts $(x_s; y_s) = (-2, ; 3)$ ein:

$$\begin{aligned} & y &=& a(x - x_s)^2 + y_s \\ \Rightarrow\quad & y &=& a(x - (-2))^2 + 3 \\ \Leftrightarrow\quad & y &=& a(x + 2)^2 + 3. \end{aligned}$$

Um den Parameter a zu ermitteln, setzen wir die Koordinaten des zus"atzlichen Punkts $(5; 7)$ in diese Gleichung ein und l"osen nach a auf:

$$\begin{aligned} & 7 &=& a(5 + 2)^2 + 3 \\ \Leftrightarrow\quad & 7 &=& 49a + 3 \\ \Leftrightarrow\quad & 4 &=& 49a \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{4}{49} &=& a. \end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung $y = \frac{4}{49}(x + 2)^2 + 3$.

Aus der Normalparabel ist diese Parabel durch Stauchung mit dem Faktor $\frac{4}{49}$ und anschlie"sendes Verschieben der Kurve um 2 Einheiten nach links und um 3 Einheiten nach oben entstanden.

Aufgabe 6:
Besitzen folgende quadratischen Funktionen Nullstellen?

$$\begin{aligned} f:&\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -3x^2 - 2x + 6 \\ g:&\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = 3x^2 - 2x + 6 \end{aligned}$$

Stellen Sie die Scheitelpunktform her und veranschaulichen Sie sich die Graphen mit einer Zeichnung.

Lösung:

Für die Funktion f formen wir wie folgt um

$$\begin{aligned}
& y &=& -3x^2 - 2x + 6 \\
\Leftrightarrow\quad & y &=& -3\left(x^2 + \frac{2}{3}x - 2\right) \\
\Leftrightarrow\quad & y &=& -3\left(x^2 + 2\cdot\frac{1}{3}\cdot x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\right) \\
\Leftrightarrow\quad & y &=& -3\left(\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\right) \\
\Leftrightarrow\quad & y &=& -3\left(\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} - \frac{18}{9}\right) \\
\Leftrightarrow\quad & y &=& -3\left(\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{19}{9}\right) \\
\Leftrightarrow\quad & y &=& -3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{19}{3}.
\end{aligned}$$

Wir erkennen, dass die Parabel nach unten ge”offnet ist. Bezogen auf die Normalparabel ist sie nach oben verschoben und muss damit zwei Nullstellen besitzen, was folgendes Schaubild verdeutlicht:

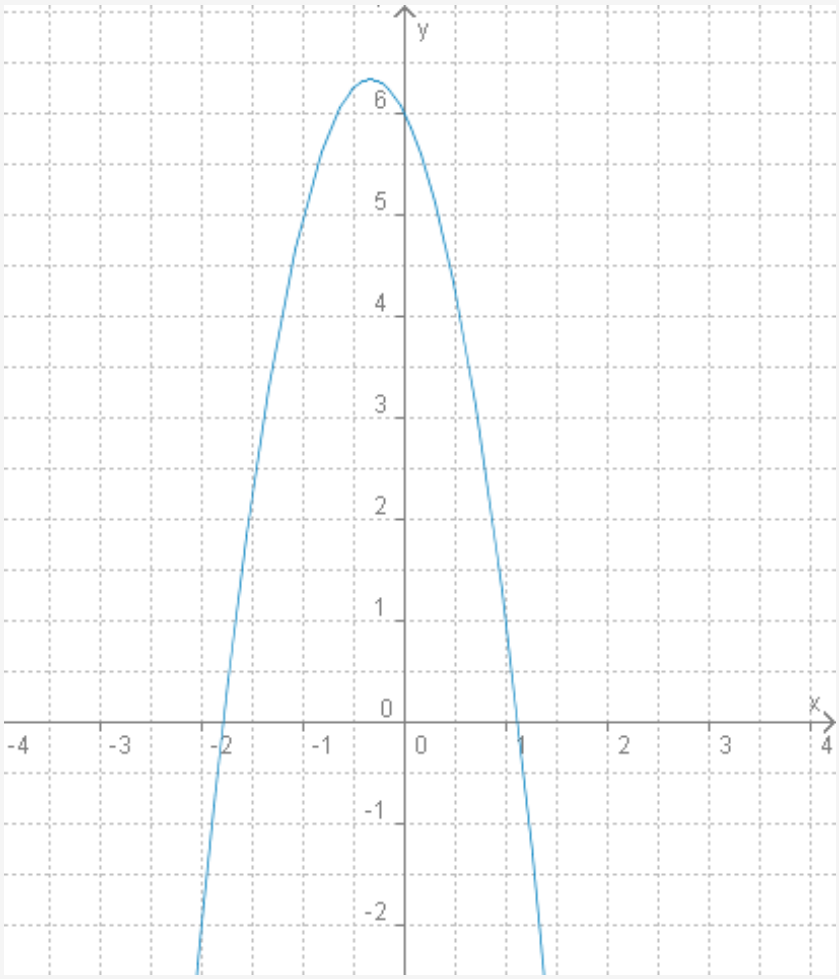


Bild 14 Graph der Funktion $y = -3x^2 - 2x + 6$.

Man hätte auch rechnerisch die Nullstellen bestimmen können, indem man $y = 0$ setzt. Dann erhält man

$$0 = -3x^2 - 2x + 6 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 + \frac{2}{3}x - 2.$$

Für diese Gleichung erhält man mit der pq-Formel die beiden Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - (-2)} = -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{20}}{3}.$$

Somit existieren zwei Nullstellen, nämlich an den Stellen $x_1 = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{20}}{3} = -1,824$ und $x_2 = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{20}}{3} = 1,157$.

Für die Funktion g nimmt man folgende Umformungen vor

$$\begin{aligned}
& y &=& 3x^2 - 2x + 6 \\
\Leftrightarrow \quad & y &=& 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + 2\right) \\
\Leftrightarrow \quad & y &=& 3\left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\right) \\
\Leftrightarrow \quad & y &=& 3\left(\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} + \frac{18}{9}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & y &=& 3\left(\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{17}{9}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & y &=& 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{17}{3}.
\end{aligned}$$

Diese Funktion ist nach oben ge”offnet und auch nach oben verschoben und kann somit keine Nullstellen besitzen, was auch der zugeh”orige Graph veranschaulicht:

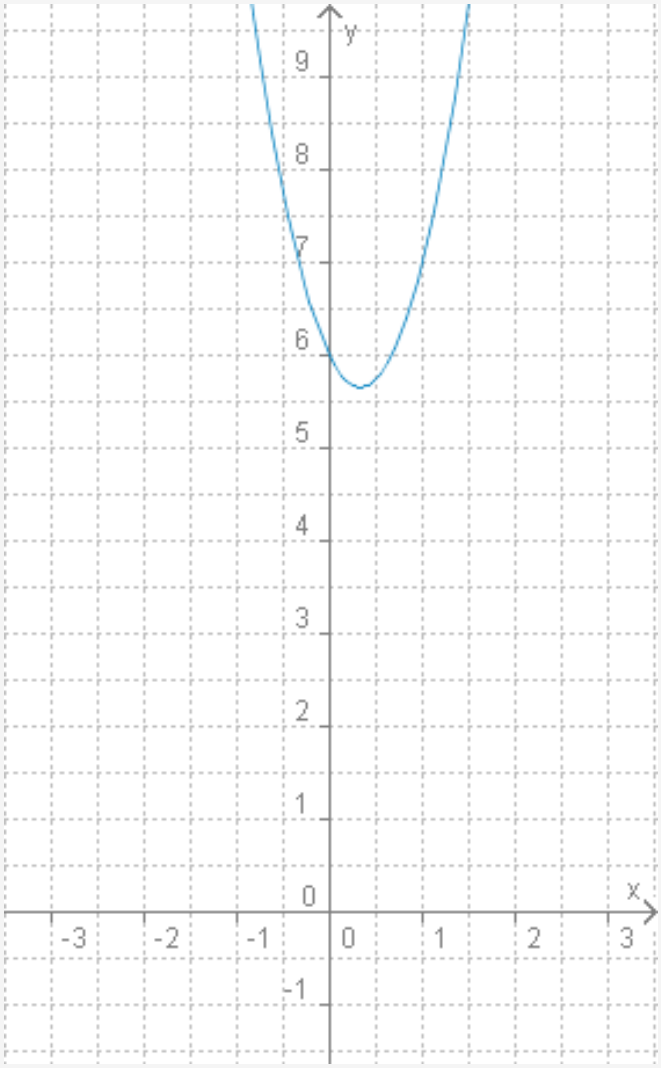


Bild 15 Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x^2 - 2x + 6$.

Auch hier kann man versuchen $y = 0$ zu setzen und potentielle Nullstellen mithilfe der *pq*-Formel berechnen:

$$0 = 3x^2 - 2x + 6 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - \frac{2}{3}x + 2$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - 2} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{-\frac{17}{9}}$$

Da der Term unter der Wurzel negativ ist, gibt es hier keine reellen Lösungen für x und somit keine Nullstellen.

Aufgabe 7:
Besitzen folgende Parabeln Schnittpunkte?

$$a) \quad y = 3(x+2)^2 + 2, \quad y = -2(x+3)^2 - 4$$
$$b) \quad y = (x+1)^2 + 1, \quad y = 2(x-3)^2 - 3$$

Veranschaulichen Sie sich die Graphen mit einer Zeichnung.

Lösung:

a) Um Schnittpunkte zu bestimmen, setzen wir die beiden Funktionsgleichungen gleich und erhalten:

$$\begin{aligned} & 3(x+2)^2+2 &&= -2(x+3)^2-4 \\ \Leftrightarrow\quad & 3x^2+12x+12+2 &&= -2x^2-12x-18-4 \\ \Leftrightarrow\quad & 3x^2+12x+14 &&= -2x^2-12x-22 \\ \Leftrightarrow\quad & 5x^2+24x+36 &&= 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2+\frac{24}{5}x+\frac{36}{5} &&= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann man mithilfe der pq-Formel lösen und erhält

$$x_{1,2} = -\frac{12}{5} \pm \sqrt{\frac{144}{25} - \frac{36}{5}} = -\frac{12}{5} \pm \sqrt{-\frac{36}{25}}.$$

Da der Ausdruck unter der Wurzel negativ ist, existiert keine reelle Lösung. Die beiden Parabeln schneiden sich also nicht.

Dies kann man auch ohne Rechnung direkt an einer Skizze der Funktionen erkennen. Hierzu erstellen wir aus der Scheitelpunktform direkt eine Zeichnung der jeweiligen Graphen in einem Koordinatensystem:

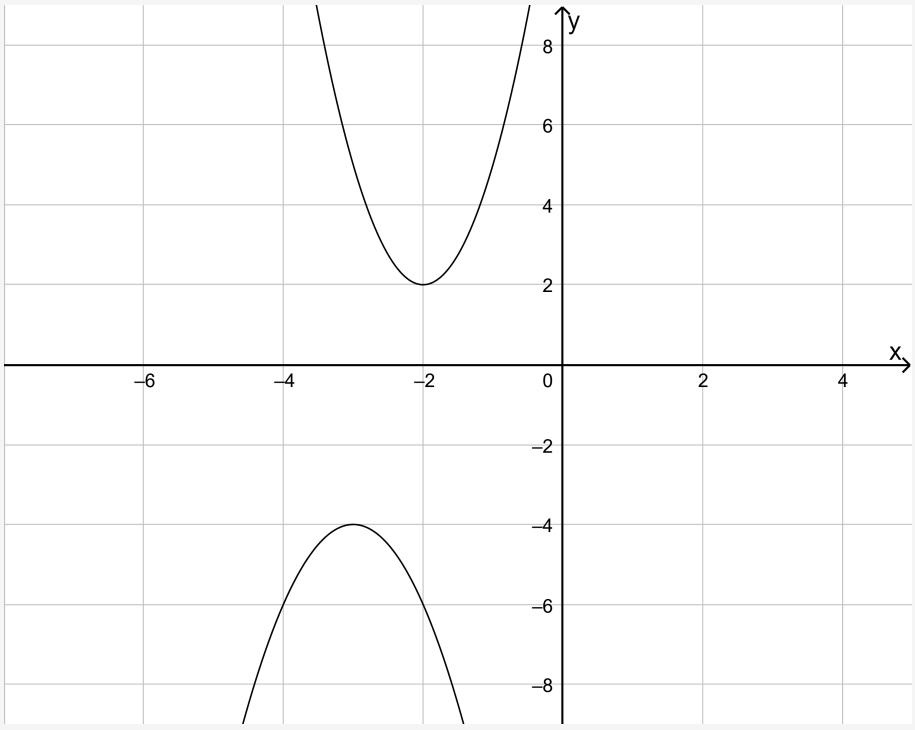


Bild 16 Graphen der Funktionen $y = 3(x+2)^2+2$ und $y = -2(x+3)^2-4$.

Offensichtlich schneiden sich die ersten beiden Graphen nicht.

b) Wir setzen wieder die Funktionsgleichungen gleich:

$$\begin{aligned}(x+1)^2+1 &= 2(x-3)^2-3\\ x^2+2x+1+1 &= 2x^2-12x+18-3\\ x^2+2x+2 &= 2x^2-12x+15\\ -x^2+14x-13 &= 0\\ x^2-14x+13 &= 0\end{aligned}$$

Diese Gleichung kann man mithilfe der pq-Formel lösen und erhält

$$x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{49-13} = 7 \pm 6.$$

Somit ergeben sich zwei Schnittstellen. Eine bei $x_1 = 1$ und $x_2 = 13$.

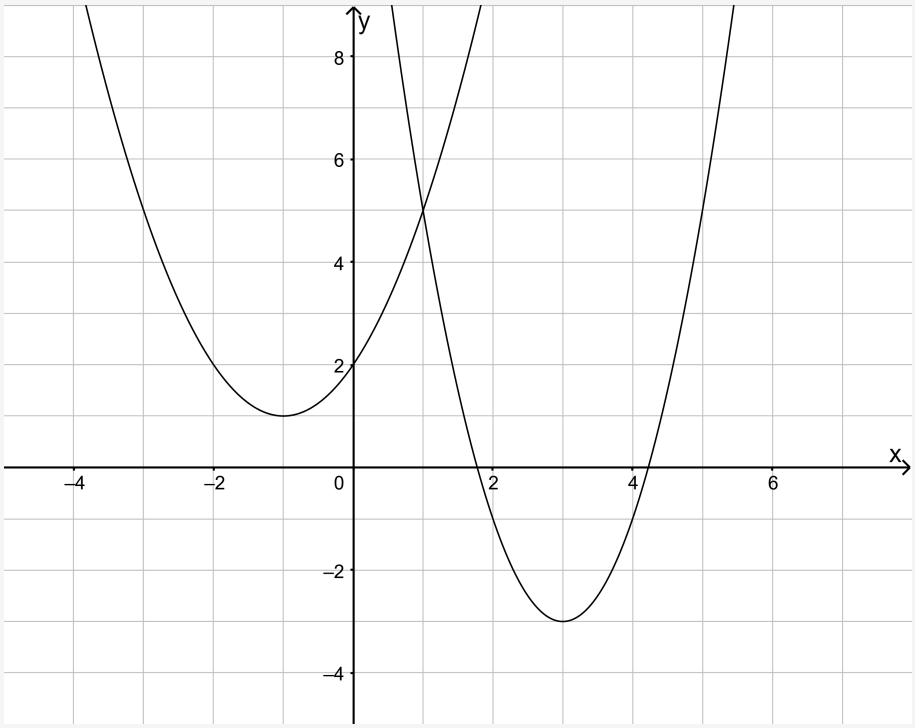


Bild 17 Graphen der Funktionen $y = (x+1)^2+1$ und $y = 2(x-3)^2-3$.

Auch zu dem Ergebnis, dass mindestens ein Schnittpunkt existiert, kann man durch das Skizzieren der Funktionen schnell gelangen. Jedoch würde man den zweiten Schnittpunkt eventuell übersehen, wenn man nur den Ausschnitt von $x = -4$ bis $x = 7$ betrachtet. Das Tückische an dieser Skizze ist, dass Parabeläste häufig so weiter verlaufen, dass kein weiterer Schnittpunkt zu erwarten ist. Hier dagegen existiert ein zweiter Schnittpunkt, wie man an folgendem Ausschnitt erkennt:

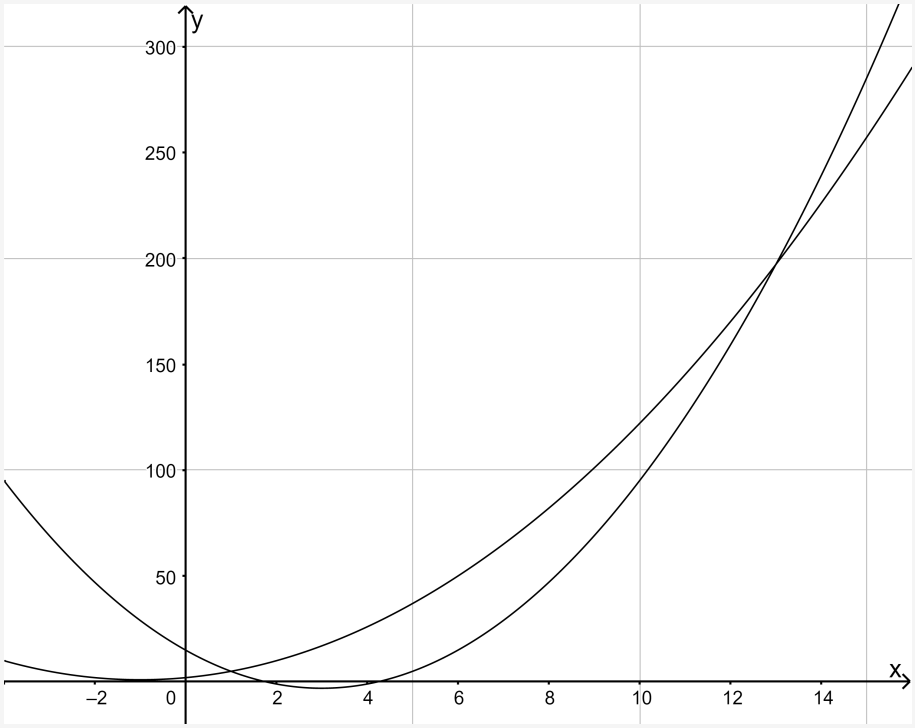


Bild 18 Graphen der Funktionen $y = (x+1)^2 + 1$ und $y = 2(x-3)^2 - 3$.

Aufgabe 8:
Bestimmen Sie (ohne Differentialrechnung bzw. Ableitungen zu Hilfe zu nehmen) den Scheitelpunkt der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 + 2x + \frac{5}{2}$ und geben Sie an, ob es sich um einen Hoch - oder Tiefpunkt handelt.

Der Scheitelpunkt liegt an der Stelle $x_S =$? , $y_S =$? .
Es handelt sich um einen

- ☐ Hochpunkt
- ☐ Tiefpunkt

Lösung:
Dazu f"uhren wir den Funktionsterm in die Scheitelpunktform "uber:

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 + 2x + \frac{5}{2} \\ &= -2\left(x^2 - x - \frac{5}{4}\right) \\ &= -2\left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right) \\ &= -2\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{5}{4}\right) \\ &= -2\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}\right) \\ &= -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 3 \end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt ist damit also $S\left(\frac{1}{2}; 3\right)$. Gem"a"s der Definition 2 muss es sich bei S um einen Hochpunkt handeln, da f"ur den Vorfaktor $-2 < 0$ gilt.

Aufgabe 9:
Welche der folgenden Punkte liegen auf der Parabel $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 5$?

- ☐ $(0; 5)$
- ☐ $(-1; 10)$
- ☐ $\left(1; \frac{15}{2}\right)$
- ☐ $\left(3; \frac{19}{2}\right)$
- ☐ $(5; 5)$

Lösung:
Wir "uberpr"ufen durch Einsetzen:

- $(0; 5)$:

$$-\frac{1}{2} \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 5 = 5$$

Also geh"ort dieser Punkt zum Graphen.

- $(-1; 10)$:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 5 \\ = \; & -\frac{1}{2} + 2 \\ = \; & \frac{3}{2} \neq 10 \end{aligned}$$

Somit geh"ort dieser Punkt nicht dazu.

- $\left(1; \frac{15}{2}\right)$:

$$-\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 5 = -\frac{1}{2} + 8 = \frac{15}{2}$$

Dieser Punkt ist demnach Element des Graphen.

- $\left(3; \frac{19}{2}\right)$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 5 &= -\frac{1}{2} \cdot 9 + 9 + 5 \\ &= -\frac{9}{2} + 14 \\ &= -\frac{9}{2} + \frac{28}{2} \\ &= \frac{19}{2} \end{aligned}$$

Auch der Punkt $\left(3; \frac{19}{2}\right)$ geh"ort damit zum Graphen.

- $(5; 5)$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 5 &= -\frac{1}{2} \cdot 25 + 15 + 5 \\ &= -\frac{25}{2} + 20 \\ &= -\frac{25}{2} + \frac{40}{2} \\ &= \frac{15}{2} \neq 5 \end{aligned}$$

Der letzte Punkt geh"ort demnach nicht zum Graphen.

Aufgabe 10:
Bestimmen Sie die Funktionsvorschriften der im Bild dargestellten Parabeln so genau wie möglich.

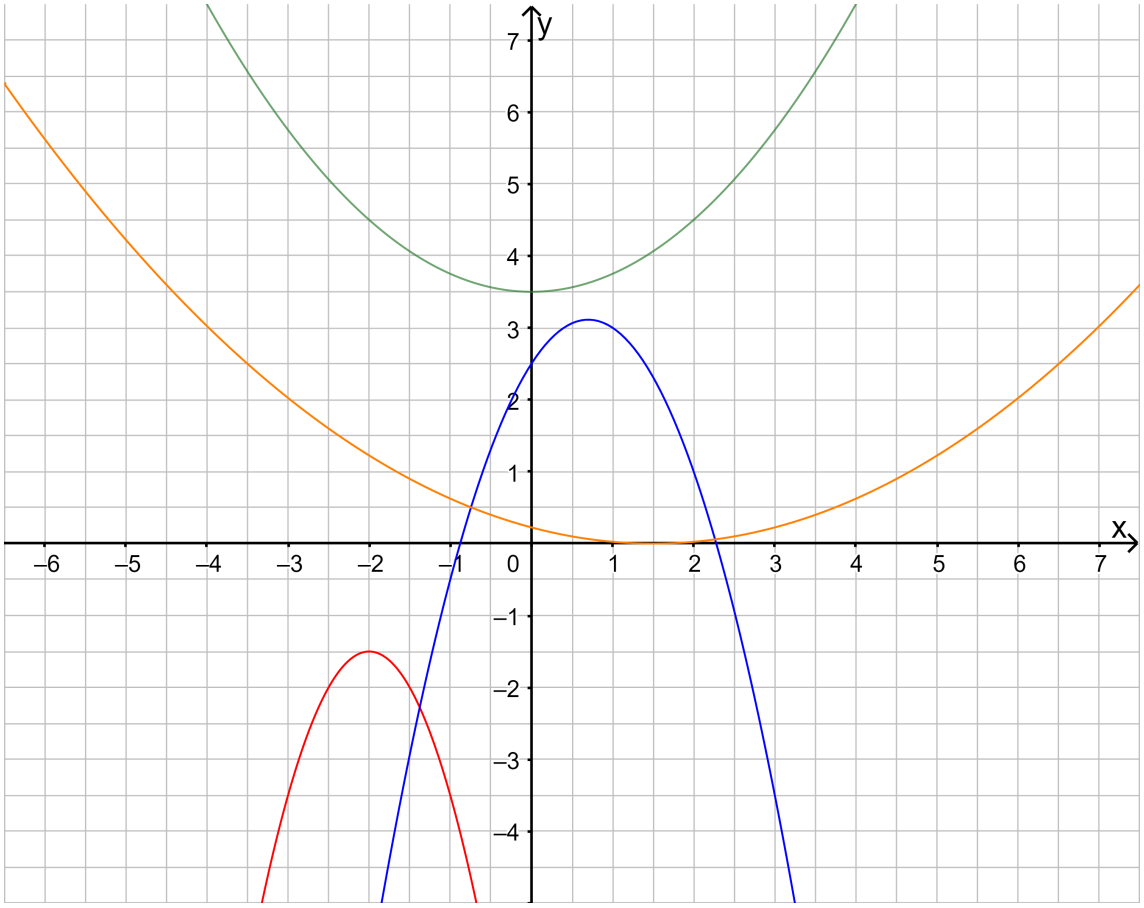


Bild 19

Gr"uner Graph: $f(x) =$?

Orangefarbener Graph: $f(x) =$?

Roter Graph: $f(x) =$?

Blauer Graph: $f(x) =$?

Lösung:

Vorbemerkung: Bei der Bestimmung der Funktionsvorschriften suchen wir nach Punkten (im Idealfall nach dem Scheitelpunkt), die einfach abzulesende Koordinaten zu haben scheinen. Aufgrund von Ungenauigkeiten in der Zeichnung oder beim Ablesen k"onnen Fehler auftreten, sodass die auf dieser Basis berechneten Funktionsgleichungen u.U. nur N"aherungen darstellen.

Gr"uner Graph

Der Scheitelpunkt dieser Parabel ist der Punkt $S_1(0;3,5)$. Geht man von hier aus um eine Einheit nach rechts, erreicht man den Graphen wieder, wenn man um $\frac{1}{4}$ Einheiten nach oben geht. Der Vorfaktor a ist damit $\frac{1}{4}$. Mit Hilfe der Scheitelpunktform $y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$ erhalten wir somit die Funktionsvorschrift $f(x) = \frac{1}{4}(x-0)^2 + 3,5 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{2}$.

Orangefarbener Graph

Der Scheitelpunkt kann bei $S_2(1,5;0)$ abgelesen werden. Des Weiteren scheint der Punkt $(6,5;2,5)$ Element des Graphen zu sein. Wir verwenden also die Scheitelpunktform $y = a \cdot (x-1,5)^2 + 0 = a \cdot (x-1,5)^2$, setzten die Koordinaten dieses Punkts ein und berechnen das noch fehlende a:

$$\begin{aligned} & 2,5 &&= a \cdot (6,5-1,5)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 2,5 &&= a \cdot 5^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 2,5 &&= a \cdot 25 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{25} &&= a \\ \Leftrightarrow \quad & a &&= \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Damit lautet die Funktionsgleichung $y = \frac{1}{10}(x - \frac{3}{2})^2$.

Roter Graph
Den Scheitelpunkt des roten Graphens k"onnen wir als $S_3(-2;-1,5)$ ablesen, d.h. die Funktionsgleichung muss $y = a \cdot (x+2)^2 - 1,5$ lauten, wobei a noch zu bestimmen ist. Gehen wir vom Scheitelpunkt aus um eine Einheit nach rechts, m"ussen wir um 2 Einheiten nach unten gehen, um wieder beim Graphen zu sein, d.h. es muss $a = -2$ gelten. Somit ergibt sich mit der Scheitelpunktform die Funktionsvorschrift $f(x) = -2(x+2)^2 - 1,5$.

Blauer Graph
Beim blauen Graph k"onnen wir den Scheitelpunkt nicht genau ablesen, sodass wir insgesamt drei Punkte zur Festlegung der Gleichung ben"otigen. Dazu stellen wir fest, dass die Parabel die $y-$Achse bei $y = 2,5$ schneidet. Somit ist $(0;2,5)$ der erste Punkt. Des Weiteren liegen die Punkte $(2;1)$ und $(-1;-0,5)$ auf dem Graphen. Diese setzen wir nun nacheinander in die allgemeine Funktionsvorschrift $f(x) = ax^2 + bx + c$ ein und berechnen die drei unbekannten Parameter a, b und c:

$$\begin{aligned} & 2,5 &&= a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{5}{2} &&= c \end{aligned}$$

Damit haben wir unseren ersten Parameter $c = \frac{5}{2}$ bestimmt.
Setzen wir diesen sowie die Koordinaten des zweiten Punkts in die Ausgangsgleichung ein und l"osen diese nach einer der noch unbekannten Variablen auf:

$$\begin{aligned} & 1 &&= a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & -\frac{3}{2} &&= a \cdot 4 + b \cdot 2 \\ \Leftrightarrow \quad & -\frac{3}{2} - 2b &&= a \cdot 4 \\ \Leftrightarrow \quad & -\frac{3}{8} - \frac{1}{2}b &&= a \end{aligned}$$

Setzen wir nun die bisherigen Ergebnisse ($a = -\frac{3}{8} - \frac{1}{2}b$ sowie $c = \frac{5}{2}$) und den dritten Punkt in

die Ausgangsgleichung ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned} -0,5 &= \left(-\frac{3}{8}-\frac{1}{2}b\right)\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+\frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow\quad -\frac{1}{2} &= -\frac{3}{8}-\frac{1}{2}b-b+\frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow\quad -3 &= -\frac{3}{8}-\frac{3}{2}b \\ \Leftrightarrow\quad -\frac{24}{8}+\frac{3}{8} &= -\frac{3}{2}b \\ \Leftrightarrow\quad -\frac{21}{8} &= -\frac{3}{2}b \\ \Leftrightarrow\quad -\frac{21}{8}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) &= b \\ \Leftrightarrow\quad \frac{7}{4} &= b \end{aligned}$$

Damit ist $b=\frac{7}{4}, c=\frac{5}{2}$ und $a=-\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{4}=-\frac{3}{8}-\frac{7}{8}=-\frac{10}{8}=-\frac{5}{4}$ und die Funktionsvorschrift lautet somit insgesamt

$$f(x)=-\frac{5}{4}x^2+\frac{7}{4}x+\frac{5}{2}.$$

Aufgabe 11:
Gegeben ist die quadratische Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=-3x^2+5x-10.$$

Welche Werte auf der y-Achse werden nicht als Funktionswerte angenommen und welche Werte treten als Funktionswerte auf? Geben Sie f"ur jeden Funktionswert y die Stellen x an, an denen dieser Funktionswert angenommen wird!

Lösung:

Zur Beantwortung der Frage f"uhren wir die Funktionsvorschrift zun"achst mithilfe der quadratischen Erg"anzung in die Scheitelpunktform "uber:

$$\begin{aligned} y &= -3x^2+5x-10 \\ \Leftrightarrow\quad y &= -3\left(x^2-\frac{5}{3}x+\frac{10}{3}\right) \\ \Leftrightarrow\quad y &= -3\left(x^2-2\cdot\frac{5}{6}\cdot x+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2+\frac{10}{3}\right) \\ \Leftrightarrow\quad y &= -3\left(\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}+\frac{120}{36}\right) \\ \Leftrightarrow\quad y &= -3\left(\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{95}{36}\right) \\ \Leftrightarrow\quad y &= -3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{95}{12} \end{aligned}$$

Da $-3 < 0$ gilt, ist die Parabel nach unten ge"offnet und hat den Scheitelpunkt (Hochpunkt) bei $(\frac{5}{6}; -\frac{95}{12})$. Somit werden alle Werte $y \leq -\frac{95}{12}$ angenommen, w"ahrend alle Werte $y > -\frac{95}{12}$ als Funktionswerte nicht in Frage kommen.

Um letztlich noch f"ur jeden Funktionswert y die Stellen x anzugeben, an denen dieser Funktionswert angenommen wird, l"osen wir die Gleichung nach x auf:

$$\begin{aligned} & y &=& -3x^2 + 5x - 10 \\ \Leftrightarrow\quad & y &=& -3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{95}{12} \\ \Leftrightarrow\quad & y + \frac{95}{12} &=& -3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 \\ \Leftrightarrow\quad & -\frac{y}{3} - \frac{95}{36} &=& \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 \end{aligned}$$

Wir können die Wurzel ziehen, da wir nur Funktionswerte y betrachten mit $y \leq -\frac{95}{12}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & -\frac{y}{3} - \frac{95}{36} &=& \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 \\ \Leftrightarrow\quad & \pm\sqrt{-\frac{y}{3} - \frac{95}{36}} &=& x - \frac{5}{6} \\ \Leftrightarrow\quad & \pm\sqrt{-\frac{y}{3} - \frac{95}{36}} + \frac{5}{6} &=& x\,, \end{aligned}$$

und damit die L"osung der letzten Teilaufgabe: Setzt man in der letzten Gleichung ein beliebiges $y \leq -\frac{95}{12}$ ein, so erh"alt man die beiden zugeh"origen x.

Aufgabe 12:
Besitzen die folgende Parabel und Gerade Schnittpunkte

$$y = 2x^2 - 3x + 1, \quad y = 5x - 4\,?$$

Veranschaulichen Sie sich die Kurven mit einer Zeichnung.

Lösung:
Wir erstellen erneut eine Zeichnung der beiden Graphen in einem Koordinatensystem. Dazu m"ussen wir die quadratische Funktion jedoch erst in die Scheitelpunktform bringen, um

schneller auf den Graphen zu kommen:

$$\begin{aligned} & y = 2x^2 - 3x + 1 \\ \Leftrightarrow \quad & y = 2(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}) \\ \Leftrightarrow \quad & y = 2\left(x^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \quad & y = 2\left(\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{8}{16}\right) \\ \Leftrightarrow \quad & y = 2\left(\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right) \\ \Leftrightarrow \quad & y = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Nun k"onnen wir die beiden Graphen zeichnen:

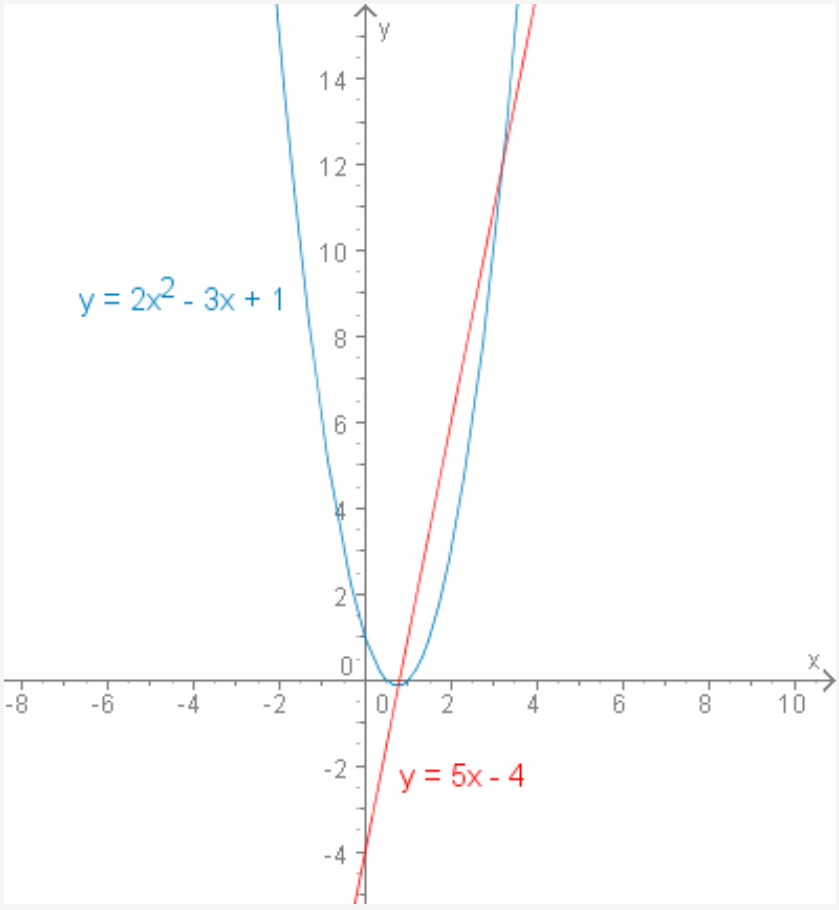


Bild 20 Graphen der Funktionen $y = 2x^2 - 3x + 1$ (blau) und $y = 5x - 4$ (rot).

Wir sehen anschaulich, dass sich die Gerade und die Parabel in zwei Punkten schneiden.

Rechnerisch ergibt sich, wenn man die beiden Funktionsterme gleich setzt:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x + 1 &= 5x - 4 \\ 2x^2 - 8x + 5 &= 0 \\ x^2 - 4x + \frac{5}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Die pq-Formel liefert die Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - \frac{5}{2}} = 2 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

und somit $x_1 \approx 3,22$ und $x_2 \approx 0,78$. Diese beiden Schnittpunkte der Parabel mit der Geraden stimmen mit der Skizze überein.

Aufgabe 13:
Suchen Sie nach dem Fehler:

Gegeben sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 2x^2 - 12x + 18$. Wo liegt der Scheitelpunkt der Parabel?
Antwort: $g(x) = 2x^2 - 12x + 18 = 2 \cdot (x^2 - 6x + 9) = 2(x-3)^2$. Somit liegt der Scheitelpunkt bei $(-3; 0)$.

Lösung:
Der Scheitelpunkt wurde falsch abgelesen, es liegt ein Vorzeichenfehler vor. Der Scheitelpunkt liegt bei $(x_s; y_s) = (3; 0)$.

Aufgabe 14:
Suchen Sie nach dem Fehler:

Bestimmen Sie den Scheitelpunkt der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6x + 10$.
Antwort:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}x^2 + 6x + 10 \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 2 \cdot 3x + 9 - 9 + 10 \\ &= \left(\frac{1}{2}x + 3\right)^2 + 1\,. \end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt ist also $S(-3; 1)$.

Lösung:
Es wurde vergessen, den Vorfaktor von x^2 vor der quadratischen Erg"anzung auszuklammern. Die quadratische Erg"anzung sowie der Scheitelpunkt sind daher falsch.
Korrekte L"osung:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}(x^2 + 12x + 20) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 2 \cdot 6x + 36 - 36 + 20) \\ &= \frac{1}{2}\left((x+6)^2 - 16\right) \\ &= \frac{1}{2}(x+6)^2 - 8. \end{aligned}$$

Somit ist der Scheitelpunkt $S(-6;-8)$.

Aufgabe 15:
Suchen Sie nach dem Fehler:

Erl"autern Sie, wie die Funktion $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $h(x)=(x-3)^2-7$ durch geometrische Abbildungen aus $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=x^2$ entstanden ist:
Antwort: f wurde um 3 in x-Richtung und um 7 in y-Richtung verschoben.

Lösung:
Es liegt erneut ein Vorzeichenfehler vor: f wurde um -7 in y-Richtung verschoben, d.h. um 7 nach unten. Der L"osende dachte möglicherweise, man m"usse auch das Vorzeichen des y-Achsenabschnitts umdrehen, um auf die entsprechende Verschiebung zu kommen.

Anwendung

Aufgabe 16:
F"ur den freien Fall eines K"orpers gilt das Weg - Zeit - Gesetz:

$$y = -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + v_0 x + y_0.$$

Der K"orper wird in der Anfangsh"ohe $y_0 > 0$ mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben ($v_0 > 0$) bzw. nach unten ($v_0 < 0$) geworfen. x steht für die Zeit in Sekunden und y steht für die Höhe vom Boden in Metern.
Runden Sie alle Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen!

1. Sei $v_0 = 3\frac{m}{s}$. Welche Anfangsh"ohe wird ben"otigt, damit der K"orper die Scheitelh"ohe von 60 m erreicht?
   ?
   ~~bleibt~~? Welche Anfangsh"ohe wird ben"otigt, damit der K"orper 6 Sekunden in der Luft
   ?

Lösung:

Gem"a"s der Definition in der Hinführung ist der Punkt

$$(x_s; y_s) = \left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

der Scheitelpunkt der Parabel $y = ax^2 + bx + c$. Nun gilt $v_0 = 3$, womit wir durch Einsetzen die Gleichung $y = -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 3x + y_0$ erhalten. Gesucht ist y_0, f"ur das die Scheitelh"ohe von 60 m erreicht wird. Wir setzten dies in die Gleichung ein:

$$60 = c - \frac{b^2}{4a} = y_0 - \frac{3^2}{4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 9,81\right)}$$

und l"osen dann nach y_0 auf:

$$\begin{aligned}
60 &= y_0 - \frac{3^2}{4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 9,81\right)} \\
\Leftrightarrow \quad 60 &= y_0 - \frac{9}{-2 \cdot 9,81} \\
\Leftrightarrow \quad 60 &= y_0 + \frac{9}{19,62} \\
\Leftrightarrow \quad 60 - \frac{9}{19,62} &= y_0 \\
\Leftrightarrow \quad y_0 &\approx 59,54\,.
\end{aligned}$$

Wir ben"otigen also eine Anfangsh"ohe von ungef"ahr $y_0 \approx 59,54$ m.

Wenn der K"orper 6 Sekunden in der Luft bleibt, bedeutet dies, dass ab dem Zeitpunkt des Abwurfs bis zu seinem Auftreffen auf dem Boden genau 6 Sekunden vergehen. Dies wiederum bedeutet, dass die entsprechende Parabel bei $x = 6$ eine Nullstelle hat und dass damit beim Einsetzen von $x = 6$ in die Funktionsvorschrift $y = -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 3x + y_0$ der Wert $y = 0$ herauskommen muss. Hierbei ergibt sich folgende Gleichung, die wir erneut nach y_0 aufl"osen:

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 + y_0 \\
\Leftrightarrow 0 &= -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 36 + 18 + y_0 \\
\Leftrightarrow 0 &= -18 \cdot 9,81 + 18 + y_0 \\
\Leftrightarrow 0 &= -158,58 + y_0 \\
\Leftrightarrow y_0 &= 158,58\,.
\end{aligned}$$

Wir ben"otigen also eine Anfangsh"ohe von $y_0 = 158,58$ m.

2. Sei $y_0 = 55\,m$. Welche Anfangsgeschwindigkeit wird ben"otigt, damit der K"orper die Scheitelh"ohe von 60 m erreicht?
   ?
   ~~in der~~ Welche Anfangsgeschwindigkeit wird ben"otigt, damit der K"orper 6 Sekunden Luft bleibt?
   ?

Lösung:

Wenn nun $y_0 = 55$ gilt, lautet die Gleichung zun"achst einmal $y = -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + v_0 x + 55$. Gesucht ist nun die Anfangsgeschwindigkeit v_0, f"ur die erneut ein Scheitelh"ohe von $y_s = 60m$ erreicht wird. Wir verwenden dazu erneut die Gleichung $y_s = c - \frac{b^2}{4a}$, setzten die vorgegebenen Werte ein und l"osen dieses Mal nach v_0 auf:

$$\begin{aligned} & 60 &=& 55 - \frac{v_0^2}{4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 9,81\right)} \\ \Leftrightarrow \quad & 60 &=& 55 - \frac{v_0^2}{-2 \cdot 9,81} \\ \Leftrightarrow \quad & 60 &=& 55 - \frac{v_0^2}{-19,62} \\ \Leftrightarrow \quad & 5 &=& \frac{v_0^2}{19,62} \\ \Leftrightarrow \quad & 98,1 &=& v_0^2 \\ \Leftrightarrow \quad & v_0 &=& \pm\sqrt{98,1} \approx \pm 9,90\,. \end{aligned}$$

Da eine negative L"osung als Anfangsgeschwindigkeit ausgeschlossen werden kann, brauchen wir also eine Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 \approx 9,9\frac{m}{s}$.

Um eine Flugzeit von 6 Sekunden zu bekommen, setzen wir wie oben $x = 6$ und $y = 0$ in die Ausgangsgleichung ein und berechnen v_0:

$$\begin{aligned} & 0 &=& -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 6^2 + v_0 \cdot 6 + 55 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 &=& -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 36 + v_0 \cdot 6 + 55 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 &=& -18 \cdot 9,81 + v_0 \cdot 6 + 55 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 &=& -176,58 + v_0 \cdot 6 + 55 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 &=& -121,58 + v_0 \cdot 6 \\ \Leftrightarrow \quad & 121,58 &=& v_0 \cdot 6 \\ \Leftrightarrow \quad & v_0 &\approx& 20,26\,. \end{aligned}$$

Wir ben"otigen dann also eine Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \approx 20,26\frac{m}{s}$.

Aufgabe 17:

Der Graph einer Parabel geht durch den Punkt $(1;3)$. Au"serdem besitzt die Parabel den Scheitelpunkt $(-2;-\frac{3}{2})$. Wie lautet die Funktionsvorschrift der Parabel in der Darstellung einer ausmultiplizierten quadratischen Funktion? $f(x) =$?

Lösung:

Wir bestimmen den Funktionsterm der Parabel, die ihren Scheitelpunkt bei $\left(-2;-\frac{3}{2}\right)$ hat, und die durch den Punkt $(1;3)$ verl"auft.

Wir setzen den Scheitelpunkt in die Scheitelpunktform ein:

$$y = a(x+2)^2 - \frac{3}{2}\,.$$

Den Parameter a bestimmen wir mit dem Punkt $(1;3)$:

$$\begin{aligned} 3 &= a(1+2)^2 - \frac{3}{2} \\ \frac{9}{2} &= 9a \\ \frac{1}{2} &= a. \end{aligned}$$

Die Scheitelpunktform der Parabel ist also

$$y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - \frac{3}{2}\,.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung aus, erhalten wir die gewünschte Form:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}(x^2+4x+4) - \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 - \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ergänzungen

Polynomfunktionen (ganzrationale Funktionen)

Man kann die linearen und quadratischen Funktionen verallgemeinern, indem man auch h"ohere Exponenten als zwei zulässt. Geraden werden durch Funktionsvorschriften der Gestalt $f_1(x) = a_1x + a_0$ gegeben. Hierin enthalten ist der Sonderfall $a_1 = 0$ mit der Funktionsvorschrift $f_0(x) = a_0$, der eine Parallele zur x-Achse darstellt. Nehmen wir die n"achst h"ohere Potenz hinzu, so entsteht die quadratische Funktionsvorschrift einer Parabel $f_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Kubische Parabeln haben Funktionsvorschriften der Gestalt $f_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Allgemein kann man nun auch den Ausdruck

$$f_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

f"ur eine beliebige nat"urliche Zahl n betrachten. Diese Funktionsvorschrift bezeichnet man als Polynom n-ten Grades mit $a_n \neq 0$.

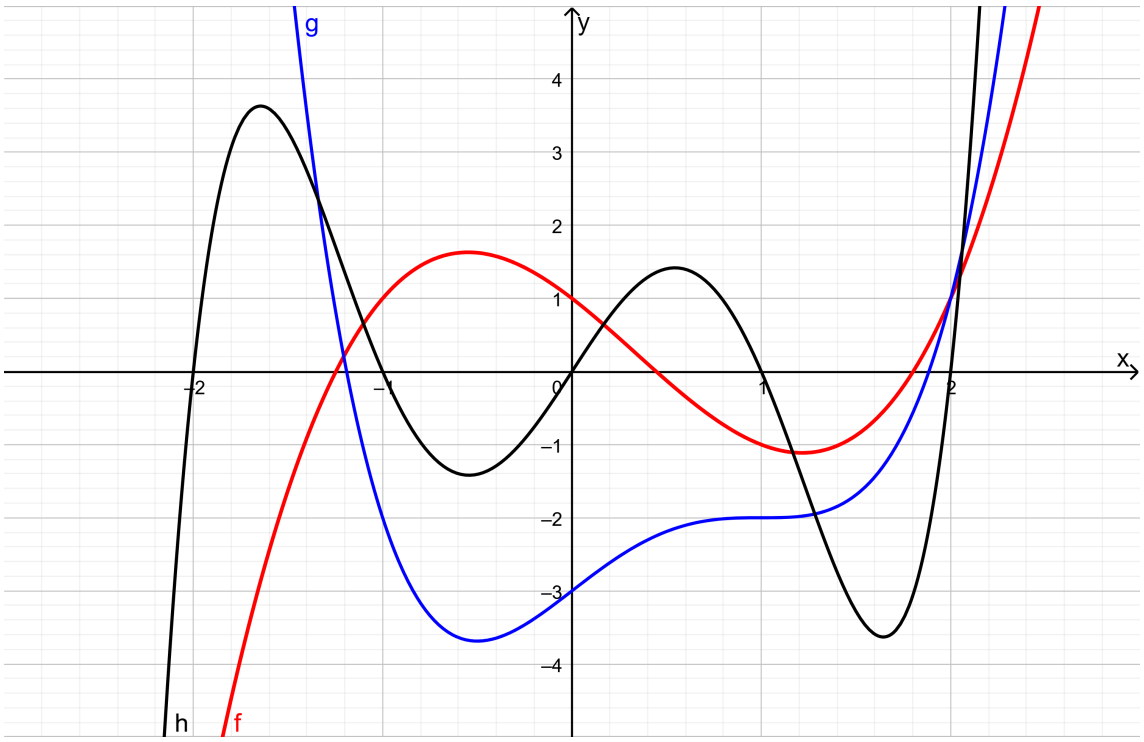


Bild 21 Graphen der Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Funktionsvorschrift $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ (rot), $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 3$ (blau) und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$ (schwarz).

Definition 3:

Unter einer **Polynomfunktion** vom Grad $n \in \mathbb{N}$ versteht man eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch folgende Funktionsvorschrift gegeben ist:

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_ix^i + \ldots + a_1x + a_0$$

mit $a_n \neq 0$ und $a_i \in \mathbb{R}$ mit $i = 1, \ldots, n$.
Die Parameter $a_i \in \mathbb{R}$ werden dabei als **Koeffizienten** bezeichnet. Das Nullpolynom $f_0(x) = 0$ hat keinen Grad.

Satz 2:

F"ur zwei Polynomfunktionen vom Grad n

$$\begin{aligned} P_n: &\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &\text{mit} \quad P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ Q_n: &\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &\text{mit} \quad Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0\,. \end{aligned}$$

$(a_n \neq 0, \quad b_n \neq 0)$

gilt $P_n(x) = Q_n(x)$ f"ur alle $x \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn alle Koeffizienten "ubereinstimmen (d.h. $a_i = b_i$ f"ur alle $i = 0\,, \ldots\,, n\,$).

Durch **Koeffizientenvergleich** kann demnach die Gleichheit zweier Polynome "uberpr"uft werden. Insbesondere k"onnen Polynome verschiedenen Grades nicht gleich sein.

Dieser Satz kann mathematisch exakt bewiesen werden. Wir verzichten hier aber darauf.