UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Virtuelles Eingangstutorium
studiVEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn
FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Virtuelles Eingangstutorium
VEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

khdm
kompetenzzentrum
hochschuldidaktik
mathematik

Hinführung

Wir stellen uns vor, dass jemand auf dem schiefen Turm von Pisa einen Ball senkrecht nach oben wirft. Der Ball unterliegt der Erdanziehungskraft und f"allt zu Boden. Die Anziehungskraft der Erde auf eine Masse m wird beschrieben durch

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung}$$

mit der konstanten Erdbeschleunigung

$$g = 9,81\frac{m}{s^2}.$$

Das Weg - Zeit - Gesetz f"ur den freien Fall ist eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung g, wenn man den Luftwiderstand vernachlässigt. Wir lassen die Bewegung zum Zeitpunkt $x_0 = 0$ beginnen und geben zu sp"ateren Zeiten x den Abstand des Balles vom Boden h an. Wir ben"otigen noch Angaben "uber die Anfangsh"ohe h_0 (Abstand des Balles vom Erdboden zur Zeit $x_0 = 0$) und "uber die Anfangsgeschwindigkeit v_0 (Geschwindigkeit, mit welcher der Ball nach oben geworfen wird). Damit ergibt sich für die Höhe h:

$$h = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot x^2 + v_0 \cdot x + h_0.$$

Dabei ist die Beschleunigung negativ, da das Objekt nach unten angezogen wird. Für unseren Ballwurf gehen wir von einer Anfangshöhe von $h_0 = 52\,m$ und eine Geschwindigkeit von $v_0 = 10\,\frac{m}{s}$ aus. Damit erhalten wir mit dem Weg-Zeit-Gesetz die Funktionsvorschrift

$$\begin{aligned} h &= -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 10x + 52 \\ \Leftrightarrow h &= -4,905x^2 + 10x + 52, \end{aligned}$$

welches die Zuordnung Zeit $\mapsto$ Höhe des Balles zum Erdboden beschreibt. Die Zeit x wird hierbei in Sekunden und die H"ohe h in Metern angegeben, die Einheiten wurden der Einfachheit halber weggelassen.

Preview fehlt:
`h5p/312pisa`

Video 1 *(nur in digitaler Version)*

Aufgabe 1:
Berechnen Sie, welche Höhe der Ball nach einer Sekunde, zwei, drei, vier und f"unf Sekunden hat. Runden Sie auf eine Nachkommastelle.

Zeit in Sekunden	Abstand vom Erdboden in Metern
1	?
2	?
3	?
4	?
5	?

Lösung:

Die H"ohe des Balles lässt sich durch Einsetzen in die Funktionsvorschrift

$$h = -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 10x + 52.$$

bestimmen. Dadurch erhalten wir für die jeweilige Zeit:

$x = 1$ Sekunde:	$h = -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 + 52 = 57,095 \approx 57,1$
$x = 2$ Sekunden:	$h = -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 + 52 = 52,38 \approx 52,4$
$x = 3$ Sekunden:	$h = -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 3^2 + 10 \cdot 3 + 52 = 37,855 \approx 37,9$
$x = 4$ Sekunden:	$h = -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 4^2 + 10 \cdot 4 + 52 = 13,52 \approx 13,5$
$x = 5$ Sekunden:	$h = -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 5^2 + 10 \cdot 5 + 52 = -20,625$

Der Ball hat allerdings bereits vor Ablauf der f"unften Sekunden den Boden erreicht, wie man an dem negativen Wert erkennen kann. Er befindet sich zu diesem Zeitpunkt also **nicht** bei $h = -20,625$m unter der Erdoberfläche, sondern auf dem Boden, also bei $h = 0$.

Offensichtlich endet die Fallbewegung mit dem Zeitpunkt x_A, zu welchem der Ball auf den Erdboden trifft. Um die Fallzeit zu errechnen, bei der der Ball auftrifft, setzen wir die Höhe auf Null und berechnen den zugehörigen Zeitpunkt x_A:

$$-\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 10x + 52 = 0.$$

Im Unterschied zu Nullstellen von Geraden haben wir nun eine quadratische Gleichung. Wir formen um:

$$x^2 - \frac{2}{9,81} \cdot 10x - \frac{2}{9,81} \cdot 52 = 0$$

bzw.

$$x^2 - \frac{20}{9,81} \cdot x - \frac{104}{9,81} = 0\,.$$

Nach der p - q - Formel besitzt die quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

folgende L"osungen:

$$x_1, x_2 = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Im vorliegenden Beispiel erh"alt man:

$$x_A = \frac{10}{9,81} \pm \sqrt{\frac{10^2}{9,81^2} + \frac{104}{9,81}}\,.$$

Infrage kommen also die Zeitpunkte

$$x_A = \frac{10}{9,81} + \sqrt{\frac{10^2}{9,81^2} + \frac{104}{9,81}} \approx 4,43119$$

und

$$x_A = \frac{10}{9,81} - \sqrt{\frac{10^2}{9,81^2} + \frac{104}{9,81}} \approx -2,39246\,.$$

Die negative Fallzeit kann ausgeschlossen werden. Dieser Zeitpunkt liegt in der Vergangenheit vor dem Beginn des Ballwurfs. Der Ball trifft somit nach der Fallzeit $x_A \approx 4,43119$ Sekunden auf dem Boden auf.

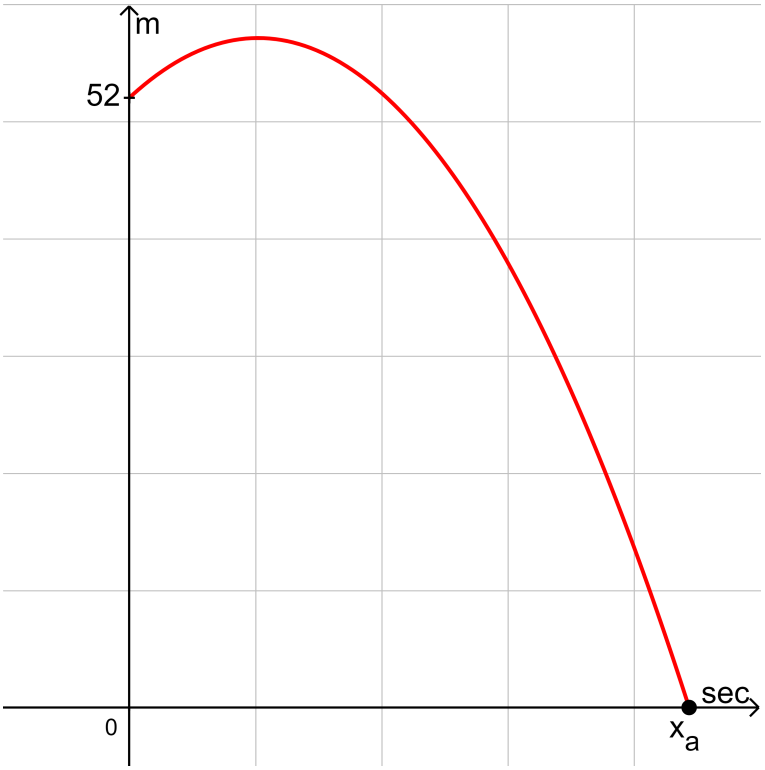


Bild 1 Zeit des Aufpralls des Balls auf den Boden

Schauen wir uns nun den Vorgang noch einmal vollst"andig an:
Nach dem Hochwerfen gewinnt der Ball zun"achst an H"ohe. Er steigt auf bis zum Umkehrpunkt (Scheitelpunkt), geht dort in die Fallbewegung "uber und f"allt dann zu Boden. Alle H"ohen oberhalb der Ausgangsh"ohe werden zweimal durchlaufen. Einmal in der aufsteigenden und einmal in der fallenden Bewegung. Die einzige Ausnahme bildet die Scheitelh"ohe, die nur zu einem einzigen Zeitpunkt erreicht wird. Damit unterscheidet sich diese quadratische Funktion von den linearen Funktionen, wo jeder Funktionswert eindeutig zu einem Argument zugewiesen werden kann.

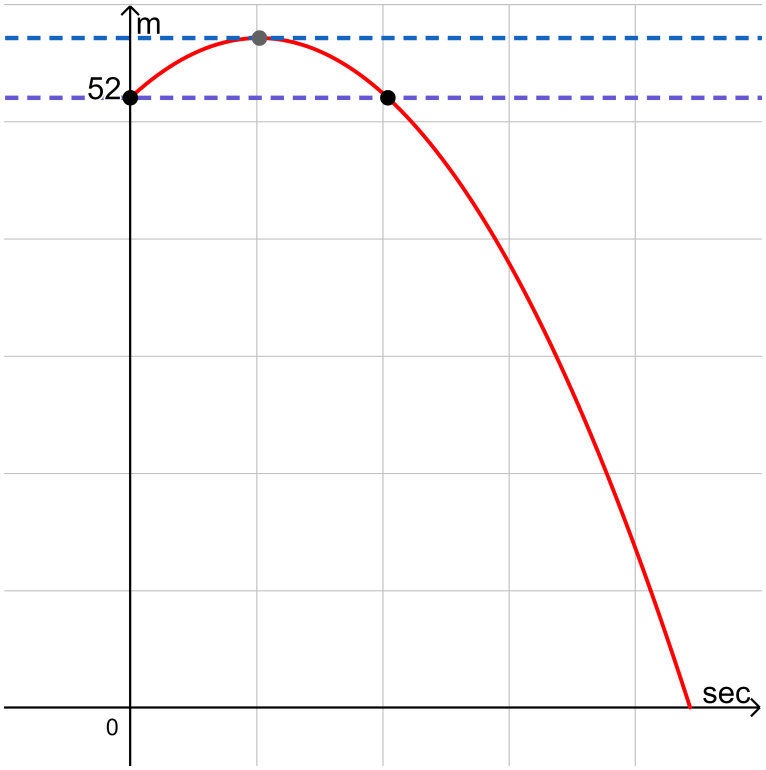


Bild 2 H"ohen oberhalb von $h_0 = 52$ und Scheitelh"ohe

F"ur H"ohen h ergibt sich der dazugehörige Zeitpunkt aus der Gleichung:

$$-\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 10x + 52 = h$$

bzw.

$$x^2 - \frac{2}{9,81} \cdot 10x - \frac{2}{9,81} \cdot 52 + \frac{2}{9,81} \cdot h = 0.$$

Wir l"osen die Gleichung wieder mit der p - q - Formel:

$$\begin{aligned} x &= \frac{10}{9,81} \pm \sqrt{\frac{10^2}{9,81^2} + \frac{104}{9,81} - \frac{2}{9,81}h} \\ &= \frac{10}{9,81} \pm \frac{1}{9,81}\sqrt{10^2 + 9,81 \cdot 104 - 2 \cdot 9,81 \cdot h}\,. \end{aligned}$$

Die L"osungsformel l"asst folgende Schl"usse zu:

- Die Scheitelhöhe h_s entspricht dem größtmöglichen Wert für h, der in die Lösungsformel eingesetzt werden kann. Dann verschwindet der Ausdruck unter der Wurzel. Für noch größere Werte von h würde er negativ und man könnte keine (relle) Wurzel ziehen.

  $$(**) \quad 10^2 + 9,81 \cdot 104 - 2 \cdot 9,81 \cdot h_s = 0\,,$$

  also

  $$h_s = 52 + \frac{1}{2} \cdot \frac{10^2}{9,81} \approx 52 + 5,09684 \approx 57,0968\,.$$

- Für $h > h_s \approx 57,0968$ würde man für den Term unter der Wurzel negative Werte erhalten

  $$10^2 + 9,81 \cdot 104 - 2 \cdot 9,81 \cdot h < 0\,.$$

  Da wir aus negativen Zahlen keine (reellen) Wurzeln ziehen können, werden größere Höhen als h_S nie erreicht.

- Für Höhen $h < h_s \approx 57,0968$ ist der Term unter der Wurzel immer positiv:

$$10^2 + 9,81 \cdot 104 - 2 \cdot 9,81 \cdot h > 0\,.$$

Man erhält für Höhen $52 < h < h_s$ zwei verschiedene positive Zeitpunkte, da für beide Vorzeichen gilt

$$x_{0,1} = \frac{10}{9,81} \pm \frac{1}{9,81}\sqrt{10^2 + 9,81 \cdot 104 - 2 \cdot 9,81 \cdot h} > 0\,.$$

und beide Vorzeichen in der Formel führen zu einem dazugehörig positiven Zeitpunkt:

$$x = \frac{10}{9,81} \pm \frac{1}{9,81}\sqrt{10^2 + 9,81 \cdot 104 - 2 \cdot 9,81 \cdot h}\,.$$

- Bei Höhen $h < 52$ erhalten wir jeweils nur einen positiven Zeitpunkt, da jeweils für die Vorzeichen gilt

$$x_0 = \frac{10}{9,81} + \frac{1}{9,81}\sqrt{10^2 + 9,81 \cdot 104 - 2 \cdot 9,81 \cdot h} > 0\,,$$
$$x_1 = \frac{10}{9,81} - \frac{1}{9,81}\sqrt{10^2 + 9,81 \cdot 104 - 2 \cdot 9,81 \cdot h} < 0\,.$$

Damit kommt nur der positive Zeitpunkt für diese Höhen in Frage.

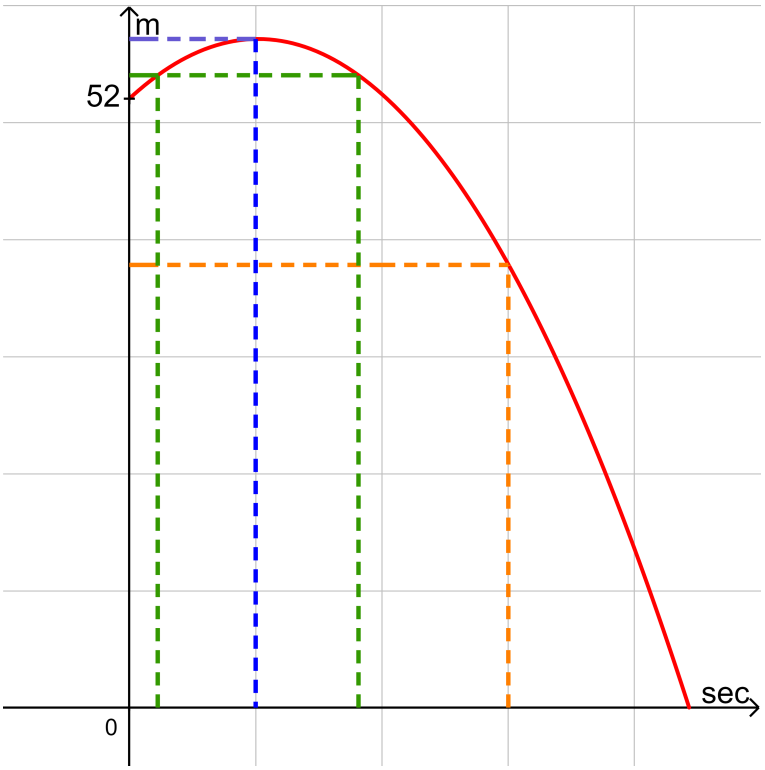


Bild 3 Zu verschiedenen H"ohen geh"orende Zeiten

Berechnen Sie, zu welchen Zeiten die H"ohen $h = 54$ und $h = 40$ durchlaufen werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf eine Nachkommastelle.

Die Höhe $h = 54$ wird zu den Zeiten $x_1 =$? Sekunden und $x_2 =$? Sekunden durchlaufen.

Die Höhe $h = 40$ wird zum Zeitpunkt $x =$? Sekunden durchlaufen.

Lösung:

Der Funktionsgraph der Wurfparabel lautet

$$h = -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 10x + 52.$$

Um die Zeiten zu bestimmen, wann der Ball eine H"ohe von $h = 54$ Metern hat, setzen wir gleich:

$$54 = -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 10x + 52.$$

Wir formen um:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 10x - 2 \\ &= x^2 - \frac{20}{9,81} \cdot x + \frac{4}{9,81} \end{aligned}$$

Jetzt können wir die p - q - Formel anwenden.

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= \frac{10}{9,81} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{9,81}\right)^2 - \frac{4}{9,81}} \\ &= \frac{10}{9,81} \pm \frac{1}{9,81}\sqrt{100 - 4 \cdot 9,81} \\ &= \frac{10}{9,81} \pm \frac{1}{9,81}\sqrt{60,76}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich:

$$x_1 = 0,225 \text{ Sek}, \quad x_2 = 1,814 \text{ Sek}.$$

Gerundet auf eine Nachkommastelle also $x_1 = 0,2$ und $x_2 = 1,8$ Sekunden.

In analoger Weise können wir berechnen, wann der Ball eine Höhe von $h = 40$ Metern erreicht hat:

$$\begin{aligned} 40 &= -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 10x + 52 \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= x^2 - \frac{20}{9,81}x - \frac{24}{9,81} \end{aligned}$$

p - q - Formel:

$$x_{1/2} = \frac{10}{9,81} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{9,81}\right)^2 + \frac{24}{9,81}}$$

Es ergibt sich: $x_1 = -0,848$ und $x_2 = 2,886$. Wir betrachten aber nur positive Zeiten. Demnach hat der Ball eine Höhe von 40 Metern 2,886 Sekunden nach dem Abwurf.
Hier ergibt sich beim Runden auf eine Nachkommastelle also $x = 2,9$ Sekunden.

Alternativ hätten wir die Lösungen auch erhalten, wenn wir die Höhen h direkt in die oben angegebene L"osungsformel

$$x = \frac{10}{9,81} \pm \frac{1}{9,81}\sqrt{10^2 + 9,81 \cdot 104 - 2 \cdot 9,81 \cdot h}$$

eingesetzt hätten.

Die Scheitelh"ohe stellt das Maximum der erreichbaren H"ohen dar. Wir k"onnen das Maximum der Funktionswerte der quadratischen Funktion mittels Differentialrechnung bestimmen (siehe hierzu Kurs *Differentialrechnung*). Wir k"onnen aber auch elementar mit Gleichung (**) und der p - q - Formel zum Ziel kommen. Wir brauchen diese Formel nicht einmal explizit zu benutzen, wie folgende "Uberlegung zeigt (Qudratische Erg"anzung, siehe Kurs *Terme und Gleichungen*):

$$\begin{aligned} h &= -\frac{1}{2}\cdot 9,81x^2 + 10x + 52 \\ &= -\frac{1}{2}\cdot 9,81\left(x^2 - \frac{20}{9,81}x\right) + 52 \\ &= 52 + \frac{1}{2}\cdot\frac{10^2}{9,81} - \frac{1}{2}\cdot 9,81\left(x - \frac{10}{9,81}\right)^2 \\ &= 57,0968 - \frac{1}{2}\cdot 9,81\left(x - \frac{10}{9,81}\right)^2. \end{aligned}$$

Die H"ohe h wird als Differenz dargestellt. Von der Scheitelh"ohe: $h_s \approx 57,0968$ wird folgende H"ohe abgezogen:

$$\frac{1}{2}\cdot 9,81\left(x - \frac{10}{9,81}\right)^2.$$

Die Differenz beträgt Null bei der Zeit

$$x_s = \frac{10}{9,81} \approx 1,01937.$$

Nehmen wir nun an, eine zweite Person ist nicht so kr"aftig wie der erste Werfer und kann nur eine Anfangsgeschwindigkeit von 5 $\frac{m}{s}$ realisieren. Die zweite Person stellt sich aber daf"ur auf eine Kiste und erreicht die Anfangsh"ohe 53 m. Welche Scheitelh"ohe erreicht der Ball nun und wie lange bleibt er in der Luft? Das Weg - Zeit - Gesetz lautet mit den neuen Anfangsbedingungen:

$$h = -\frac{1}{2}\cdot 9,81x^2 + 5x + 53\,.$$

Die H"ohe h kann hier als Differenz dargestellt werden:

$$(1) \qquad h = 53 + \frac{1}{2}\cdot\frac{5^2}{9,81} - \frac{1}{2}\cdot 9,81\left(x - \frac{5}{9,81}\right)^2.$$

Hieraus ergibt sich die Scheitelhöhe:

$$h_s = 53 + \frac{1}{2}\cdot\frac{5^2}{9,81} \approx 53 + 1,27421 \approx 54,27421.$$

Die Zeit, die vergeht bis der Ball auf den Boden auftrifft, betr"agt:

$$(2) \qquad x_A = \frac{5}{9,81} + \sqrt{\frac{5^2}{9,81^2} + \frac{2\cdot 53}{9,81}} \approx 3,83611.$$

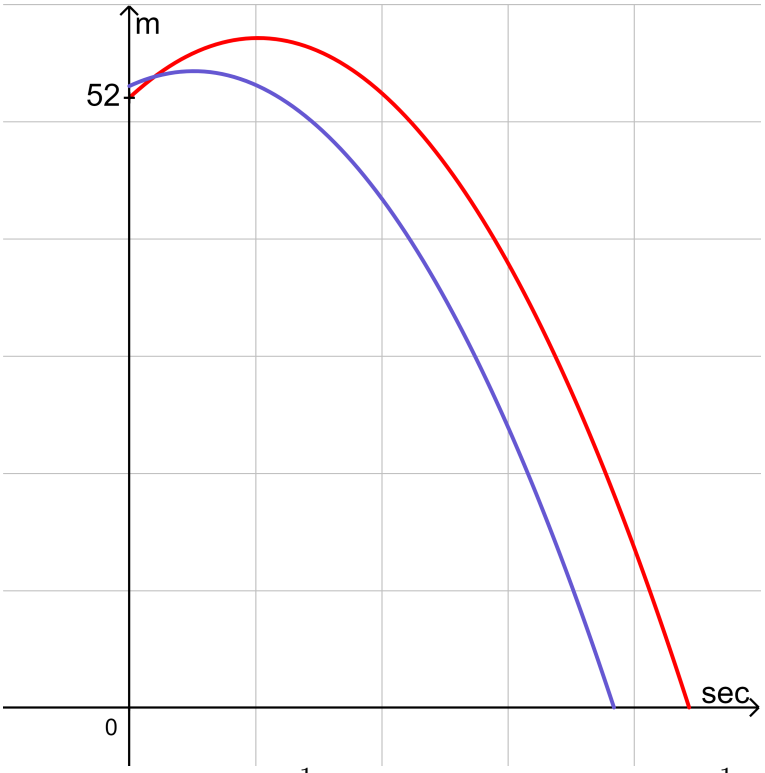


Bild 4 Die beiden Wurfparabeln $h = -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 10x + 52$ und $h = -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 5x + 53$

Aufgabe 2:
Leiten Sie die Gleichungen (1) und (2) her.

Lösung:

Das Weg - Zeit - Gesetz f"ur den Wurf der zweiten Person lautet

$$h = -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 5x + 53.$$

Wir formen mithilfe quadratischer Erg"anzung um:

$$\begin{aligned} h &= -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \left(x^2 - \frac{10}{9,81}x \right) + 53 \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \left(x^2 - \frac{10}{9,81}x + \left(\frac{5}{9,81} \right)^2 - \left(\frac{5}{9,81} \right)^2 \right) + 53 \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \left(x^2 - \frac{10}{9,81}x + \left(\frac{5}{9,81} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{5^2}{9,81} + 53 \\ &= -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \left(x^2 - \frac{5}{9,81} \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5^2}{9,81} + 53 \\ &= 53 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5^2}{9,81} - \frac{1}{2} \cdot 9,81 \left(x^2 - \frac{5}{9,81} \right)^2. \end{aligned}$$

Nun zur Herleitung von Gleichung (2):
Wenn der Ball auf den Boden trifft, hat er eine H"ohe von Null Metern. Wir setzen folglich in obiger Gleichung $h = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 5x + 53 \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= x^2 - \frac{10}{9,81}x - \frac{2 \cdot 53}{9,81}. \end{aligned}$$

Mit der p - q - Formel ergibt sich:

$$x_{1/2} = \frac{5}{9,81} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{9,81} \right)^2 + \frac{2 \cdot 53}{9,81}}.$$

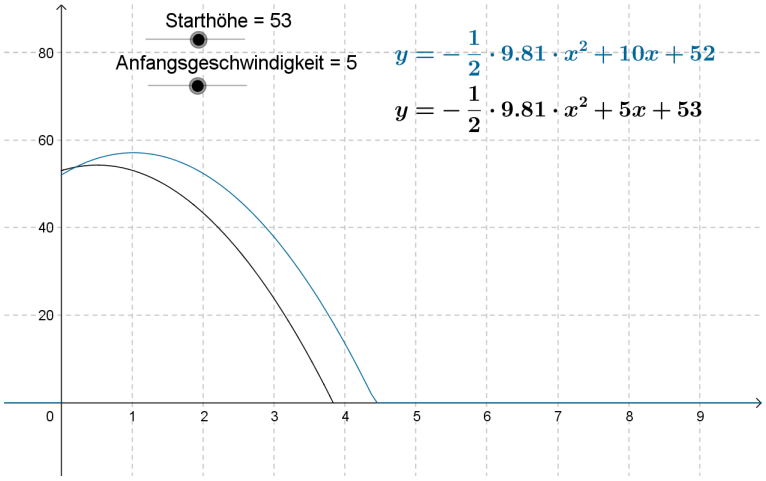
Da wir nur positive Zeiten betrachten, ist der Zeitpunkt des Autritts erreicht bei

$$x_A = x_1 = \frac{5}{9,81} + \sqrt{\frac{5^2}{9,81^2} + \frac{2 \cdot 53}{9,81}}.$$

Aufgabe 3:

Welche Anfangsh"ohe h_0 wäre nötig, um mit der Anfangsgeschwindigkeit $5\frac{m}{s}$ dieselbe Scheitelh"ohe zu erreichen wie mit der Anfangsh"ohe $52m$ und der Anfangsgeschwindigkeit $10\frac{m}{s}$?

Berechnen Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen genau:
Die Anfangshöhe muss mindestens [?] betragen.
Überprüfen Sie Ihr Ergebnis zusätzlich anhand des folgenden Applets:



Interaktion 1 *(nur in digitaler Version)*

Lösung:

Für die niedrigere Anfangsgeschwindigkeit ergibt sich folgende Scheitelh"ohe:

$$h_s = h_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5^2}{9,81}.$$

Gleichsetzen der Scheitelh"ohen liefert die Bedingung:

$$h_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5^2}{9,81} = 52 + \frac{1}{2} \cdot \frac{10^2}{9,81}$$

mit der L"osung:

$$\begin{aligned} h_0 &= 52 + \frac{1}{2} \cdot \frac{10^2}{9,81} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5^2}{9,81} \\ &\approx 55,82 \end{aligned}$$

Die Anfangshöhe muss also mindestens 55,82m betragen.

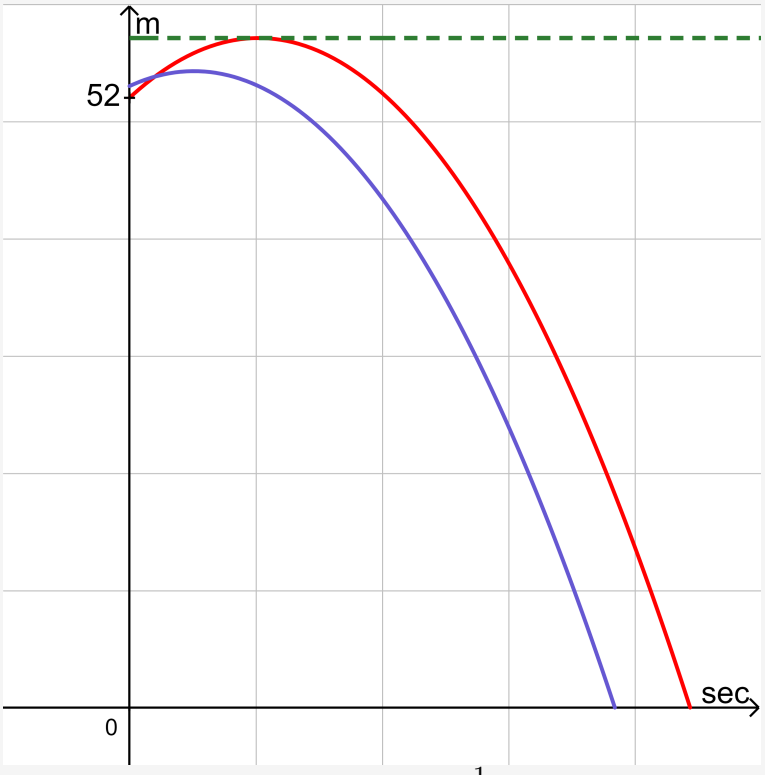


Bild 5 Die beiden Wurfparabeln $h = -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 10x + 52$ und $h = -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 5x + 55,8226$.

Wenn man einen Ball in der H"ohe 52 m mit $10\frac{m}{s}$ nach oben wirft und zugleich einen Ball in der soeben berechneten H"ohe h_0 mit $5\frac{m}{s}$, zu welcher Zeit w"urden sich die B"alle dann treffen?

Berechnen Sie das Ergebnis wieder auf zwei Nachkommastellen genau:
Die Bälle treffen sich nach ? Sekunden.

Lösung:

Wir setzen die Funktionsterme gleich

$$-\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 10x + 52 = -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 5x + 55,8226$$

und bekommen

$$10x + 52 = 5x + 55,8226$$
$$\text{bzw.} \qquad x \approx 0,76$$

Die B”alle treffen sich also nach etwa 0,76 Sekunden.