UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Virtuelles Eingangstutorium
studiVEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn
FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Virtuelles Eingangstutorium
VEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

khdm
kompetenzzentrum
hochschuldidaktik
mathematik

Aufgaben

Aufgabe 5:
Von einer Parabel sei der Scheitelpunkt $(x_s; y_s) = (-2; 3)$ sowie der Punkt $(5; 7)$ bekannt.

Wie lautet die Gleichung der Parabel? ?
Was ist der graphische Zusammenhang der gesuchten Parabel und der Normalparabel?

Lösung:

Hierf"ur verwenden wir die Scheitelpunktform $y = a(x - x_s)^2 + y_s$ und setzen zun"achst die Koordinaten des Scheitelpunkts $(x_s; y_s) = (-2, ; 3)$ ein:

$$\begin{aligned} & y &=& a(x - x_s)^2 + y_s \\ \Rightarrow\quad & y &=& a(x - (-2))^2 + 3 \\ \Leftrightarrow\quad & y &=& a(x + 2)^2 + 3. \end{aligned}$$

Um den Parameter a zu ermitteln, setzen wir die Koordinaten des zus"atzlichen Punkts $(5; 7)$ in diese Gleichung ein und l"osen nach a auf:

$$\begin{aligned} & 7 &=& a(5 + 2)^2 + 3 \\ \Leftrightarrow\quad & 7 &=& 49a + 3 \\ \Leftrightarrow\quad & 4 &=& 49a \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{4}{49} &=& a. \end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung $y = \frac{4}{49}(x + 2)^2 + 3$.

Aus der Normalparabel ist diese Parabel durch Stauchung mit dem Faktor $\frac{4}{49}$ und anschlie"sendes Verschieben der Kurve um 2 Einheiten nach links und um 3 Einheiten nach oben entstanden.

Aufgabe 6:
Besitzen folgende quadratischen Funktionen Nullstellen?

$$\begin{aligned} f:&\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -3x^2 - 2x + 6 \\ g:&\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = 3x^2 - 2x + 6 \end{aligned}$$

Stellen Sie die Scheitelpunktform her und veranschaulichen Sie sich die Graphen mit einer Zeichnung.

Lösung:

Für die Funktion f formen wir wie folgt um

$$\begin{aligned}
& y &=& -3x^2 - 2x + 6 \\
\Leftrightarrow\quad & y &=& -3\left(x^2 + \frac{2}{3}x - 2\right) \\
\Leftrightarrow\quad & y &=& -3\left(x^2 + 2\cdot\frac{1}{3}\cdot x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\right) \\
\Leftrightarrow\quad & y &=& -3\left(\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\right) \\
\Leftrightarrow\quad & y &=& -3\left(\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} - \frac{18}{9}\right) \\
\Leftrightarrow\quad & y &=& -3\left(\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{19}{9}\right) \\
\Leftrightarrow\quad & y &=& -3\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{19}{3}.
\end{aligned}$$

Wir erkennen, dass die Parabel nach unten ge”offnet ist. Bezogen auf die Normalparabel ist sie nach oben verschoben und muss damit zwei Nullstellen besitzen, was folgendes Schaubild verdeutlicht:

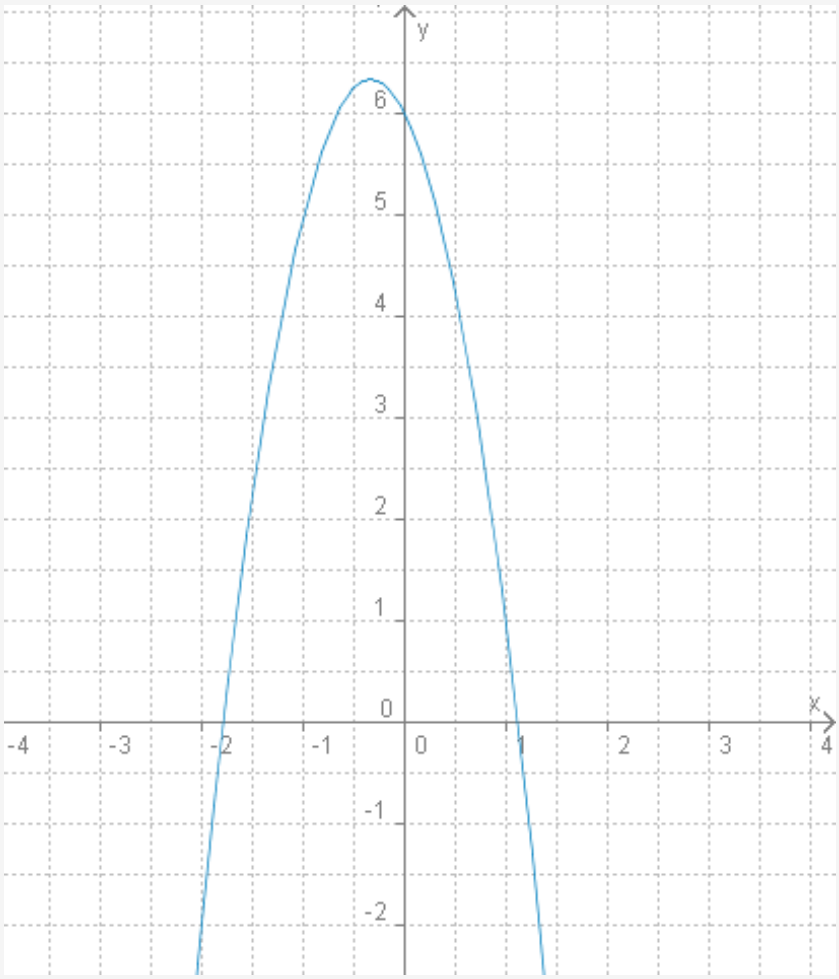


Bild 14 Graph der Funktion $y = -3x^2 - 2x + 6$.

Man hätte auch rechnerisch die Nullstellen bestimmen können, indem man $y = 0$ setzt. Dann erhält man

$$0 = -3x^2 - 2x + 6 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 + \frac{2}{3}x - 2.$$

Für diese Gleichung erhält man mit der pq-Formel die beiden Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - (-2)} = -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{20}}{3}.$$

Somit existieren zwei Nullstellen, nämlich an den Stellen $x_1 = -\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{20}}{3} = -1,824$ und $x_2 = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{20}}{3} = 1,157$.

Für die Funktion g nimmt man folgende Umformungen vor

$$\begin{aligned}
& y &=& 3x^2 - 2x + 6 \\
\Leftrightarrow \quad & y &=& 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + 2\right) \\
\Leftrightarrow \quad & y &=& 3\left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\right) \\
\Leftrightarrow \quad & y &=& 3\left(\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} + \frac{18}{9}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & y &=& 3\left(\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{17}{9}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & y &=& 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{17}{3}.
\end{aligned}$$

Diese Funktion ist nach oben ge”offnet und auch nach oben verschoben und kann somit keine Nullstellen besitzen, was auch der zugeh”orige Graph veranschaulicht:

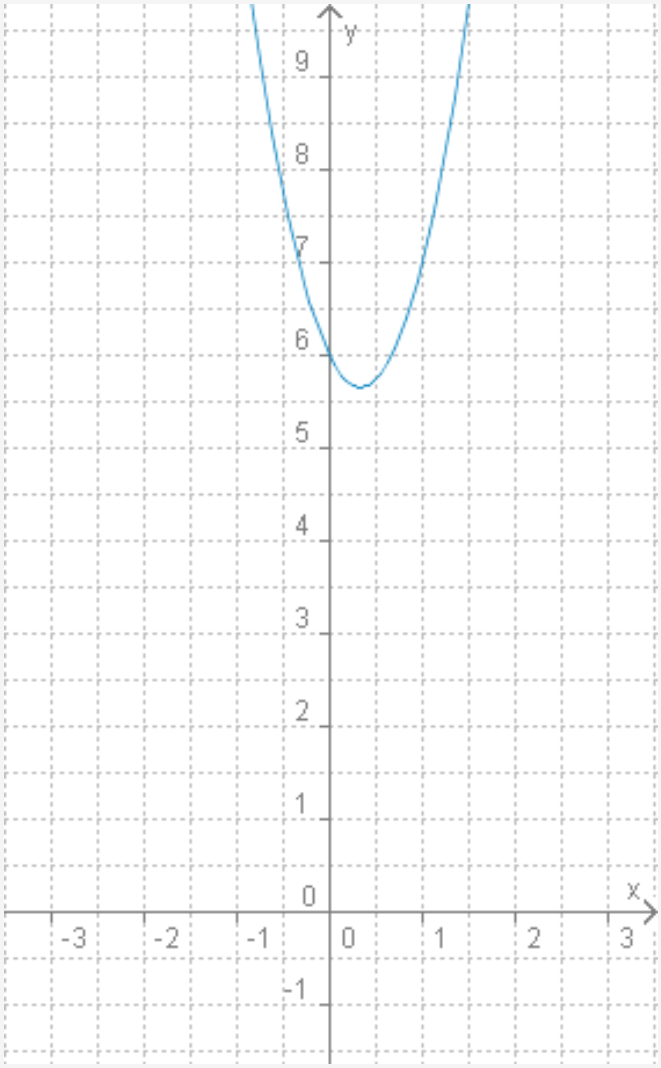


Bild 15 Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x^2 - 2x + 6$.

Auch hier kann man versuchen $y = 0$ zu setzen und potentielle Nullstellen mithilfe der *pq*-Formel berechnen:

$$0 = 3x^2 - 2x + 6 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - \frac{2}{3}x + 2$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - 2} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{-\frac{17}{9}}$$

Da der Term unter der Wurzel negativ ist, gibt es hier keine reellen Lösungen für x und somit keine Nullstellen.

Aufgabe 7:
Besitzen folgende Parabeln Schnittpunkte?

$$a) \quad y = 3(x+2)^2 + 2, \quad y = -2(x+3)^2 - 4$$
$$b) \quad y = (x+1)^2 + 1, \quad y = 2(x-3)^2 - 3$$

Veranschaulichen Sie sich die Graphen mit einer Zeichnung.

Lösung:

a) Um Schnittpunkte zu bestimmen, setzen wir die beiden Funktionsgleichungen gleich und erhalten:

$$\begin{aligned} & 3(x+2)^2+2 &&= -2(x+3)^2-4 \\ \Leftrightarrow\quad & 3x^2+12x+12+2 &&= -2x^2-12x-18-4 \\ \Leftrightarrow\quad & 3x^2+12x+14 &&= -2x^2-12x-22 \\ \Leftrightarrow\quad & 5x^2+24x+36 &&= 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2+\frac{24}{5}x+\frac{36}{5} &&= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann man mithilfe der pq-Formel lösen und erhält

$$x_{1,2} = -\frac{12}{5} \pm \sqrt{\frac{144}{25} - \frac{36}{5}} = -\frac{12}{5} \pm \sqrt{-\frac{36}{25}}.$$

Da der Ausdruck unter der Wurzel negativ ist, existiert keine reelle Lösung. Die beiden Parabeln schneiden sich also nicht.

Dies kann man auch ohne Rechnung direkt an einer Skizze der Funktionen erkennen. Hierzu erstellen wir aus der Scheitelpunktform direkt eine Zeichnung der jeweiligen Graphen in einem Koordinatensystem:

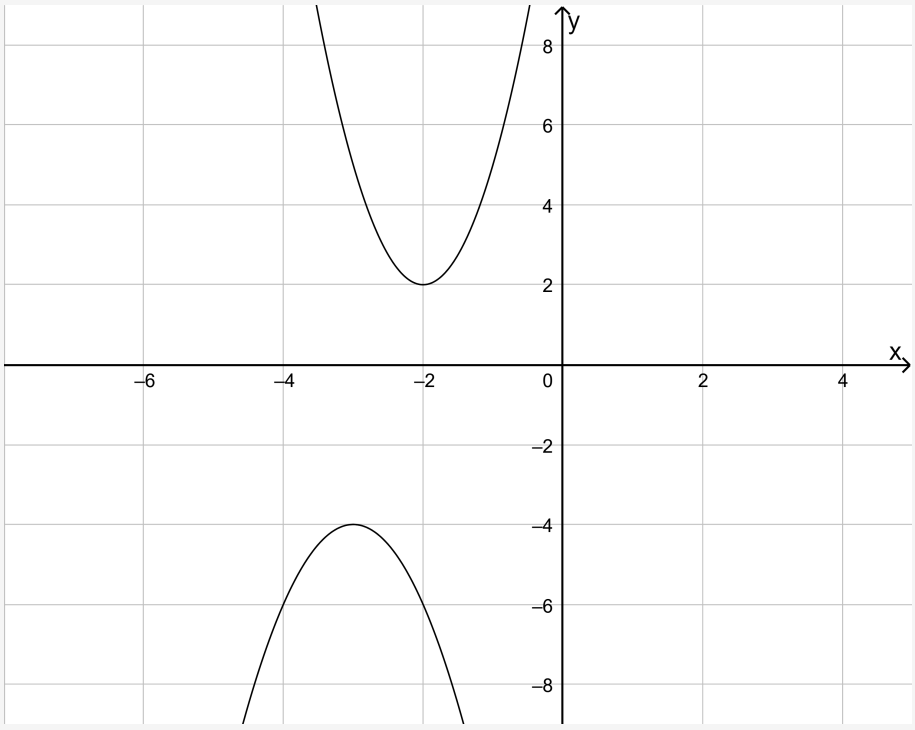


Bild 16 Graphen der Funktionen $y = 3(x+2)^2+2$ und $y = -2(x+3)^2-4$.

Offensichtlich schneiden sich die ersten beiden Graphen nicht.

b) Wir setzen wieder die Funktionsgleichungen gleich:

$$\begin{aligned}(x+1)^2+1 &= 2(x-3)^2-3\\ x^2+2x+1+1 &= 2x^2-12x+18-3\\ x^2+2x+2 &= 2x^2-12x+15\\ -x^2+14x-13 &= 0\\ x^2-14x+13 &= 0\end{aligned}$$

Diese Gleichung kann man mithilfe der pq-Formel lösen und erhält

$$x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{49-13} = 7 \pm 6.$$

Somit ergeben sich zwei Schnittstellen. Eine bei $x_1 = 1$ und $x_2 = 13$.

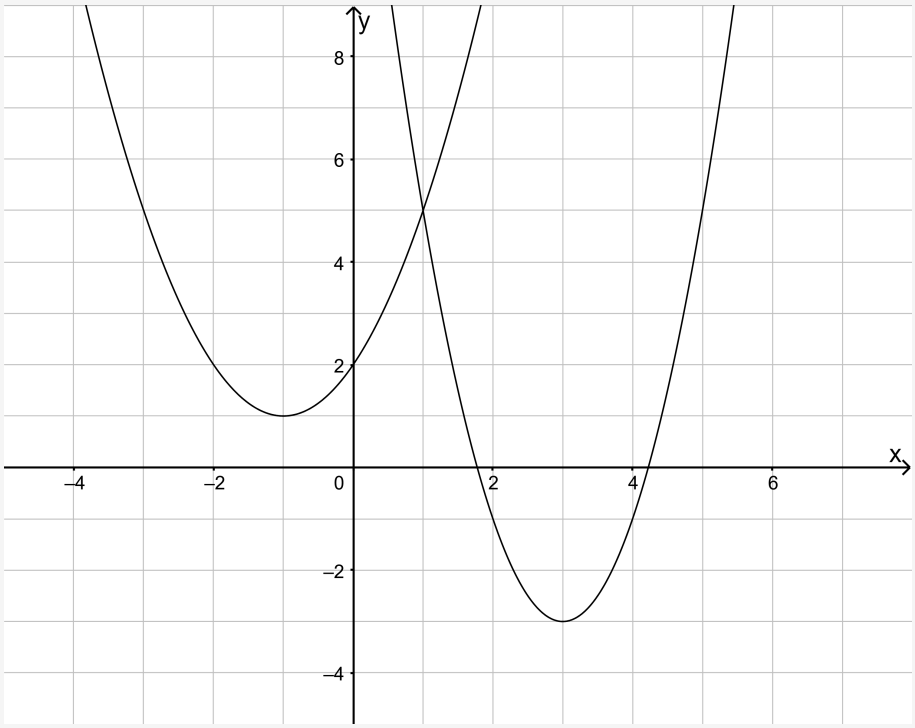


Bild 17 Graphen der Funktionen $y = (x+1)^2+1$ und $y = 2(x-3)^2-3$.

Auch zu dem Ergebnis, dass mindestens ein Schnittpunkt existiert, kann man durch das Skizzieren der Funktionen schnell gelangen. Jedoch würde man den zweiten Schnittpunkt eventuell übersehen, wenn man nur den Ausschnitt von $x = -4$ bis $x = 7$ betrachtet. Das Tückische an dieser Skizze ist, dass Parabeläste häufig so weiter verlaufen, dass kein weiterer Schnittpunkt zu erwarten ist. Hier dagegen existiert ein zweiter Schnittpunkt, wie man an folgendem Ausschnitt erkennt:

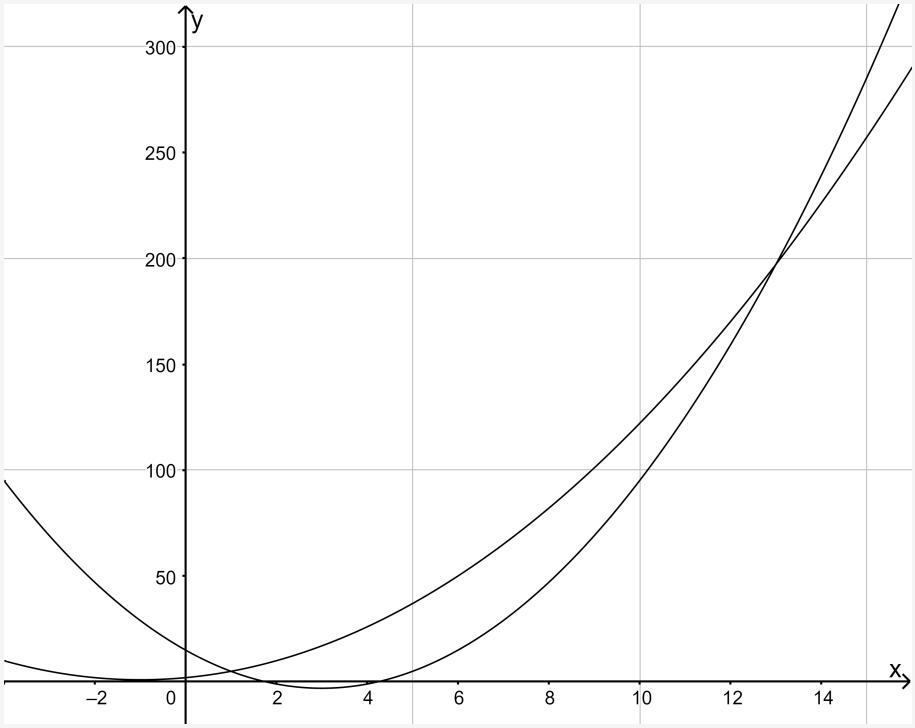


Bild 18 Graphen der Funktionen $y = (x+1)^2 + 1$ und $y = 2(x-3)^2 - 3$.

Aufgabe 8:
Bestimmen Sie (ohne Differentialrechnung bzw. Ableitungen zu Hilfe zu nehmen) den Scheitelpunkt der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 + 2x + \frac{5}{2}$ und geben Sie an, ob es sich um einen Hoch - oder Tiefpunkt handelt.

Der Scheitelpunkt liegt an der Stelle $x_S =$? , $y_S =$? .
Es handelt sich um einen

- ☐ Hochpunkt
- ☐ Tiefpunkt

Lösung:
Dazu f"uhren wir den Funktionsterm in die Scheitelpunktform "uber:

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 + 2x + \frac{5}{2} \\ &= -2\left(x^2 - x - \frac{5}{4}\right) \\ &= -2\left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right) \\ &= -2\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{5}{4}\right) \\ &= -2\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}\right) \\ &= -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 3 \end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt ist damit also $S\left(\frac{1}{2}; 3\right)$. Gem"a"s der Definition 2 muss es sich bei S um einen Hochpunkt handeln, da f"ur den Vorfaktor $-2 < 0$ gilt.

Aufgabe 9:
Welche der folgenden Punkte liegen auf der Parabel $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 5$?

- ☐ $(0; 5)$
- ☐ $(-1; 10)$
- ☐ $\left(1; \frac{15}{2}\right)$
- ☐ $\left(3; \frac{19}{2}\right)$
- ☐ $(5; 5)$

Lösung:
Wir "uberpr"ufen durch Einsetzen:

- $(0; 5)$:

$$-\frac{1}{2} \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 5 = 5$$

Also geh"ort dieser Punkt zum Graphen.

- $(-1; 10)$:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-1) + 5 \\ = \; & -\frac{1}{2} + 2 \\ = \; & \frac{3}{2} \neq 10 \end{aligned}$$

Somit geh"ort dieser Punkt nicht dazu.

- $\left(1; \frac{15}{2}\right)$:

$$-\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 5 = -\frac{1}{2} + 8 = \frac{15}{2}$$

Dieser Punkt ist demnach Element des Graphen.

- $\left(3; \frac{19}{2}\right)$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 5 &= -\frac{1}{2} \cdot 9 + 9 + 5 \\ &= -\frac{9}{2} + 14 \\ &= -\frac{9}{2} + \frac{28}{2} \\ &= \frac{19}{2} \end{aligned}$$

Auch der Punkt $\left(3; \frac{19}{2}\right)$ geh"ort damit zum Graphen.

- $(5; 5)$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 5 &= -\frac{1}{2} \cdot 25 + 15 + 5 \\ &= -\frac{25}{2} + 20 \\ &= -\frac{25}{2} + \frac{40}{2} \\ &= \frac{15}{2} \neq 5 \end{aligned}$$

Der letzte Punkt geh"ort demnach nicht zum Graphen.

Aufgabe 10:
Bestimmen Sie die Funktionsvorschriften der im Bild dargestellten Parabeln so genau wie möglich.

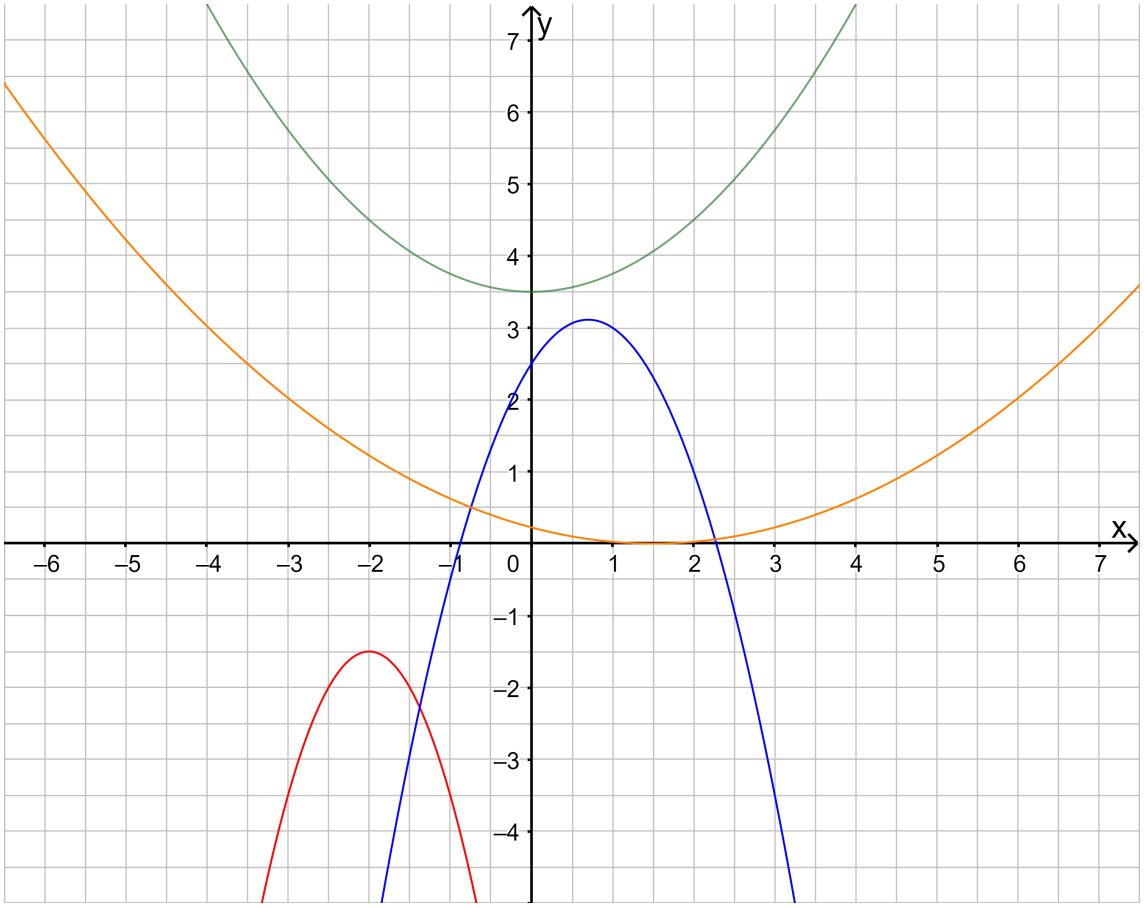


Bild 19

Gr"uner Graph: $f(x) =$?

Orangefarbener Graph: $f(x) =$?

Roter Graph: $f(x) =$?

Blauer Graph: $f(x) =$?

Lösung:

Vorbemerkung: Bei der Bestimmung der Funktionsvorschriften suchen wir nach Punkten (im Idealfall nach dem Scheitelpunkt), die einfach abzulesende Koordinaten zu haben scheinen. Aufgrund von Ungenauigkeiten in der Zeichnung oder beim Ablesen k"onnen Fehler auftreten, sodass die auf dieser Basis berechneten Funktionsgleichungen u.U. nur N"aherungen darstellen.

Gr"uner Graph

Der Scheitelpunkt dieser Parabel ist der Punkt $S_1(0;3,5)$. Geht man von hier aus um eine Einheit nach rechts, erreicht man den Graphen wieder, wenn man um $\frac{1}{4}$ Einheiten nach oben geht. Der Vorfaktor a ist damit $\frac{1}{4}$. Mit Hilfe der Scheitelpunktform $y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$ erhalten wir somit die Funktionsvorschrift $f(x) = \frac{1}{4}(x-0)^2 + 3,5 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{7}{2}$.

Orangefarbener Graph

Der Scheitelpunkt kann bei $S_2(1,5;0)$ abgelesen werden. Des Weiteren scheint der Punkt $(6,5;2,5)$ Element des Graphen zu sein. Wir verwenden also die Scheitelpunktform $y = a \cdot (x-1,5)^2 + 0 = a \cdot (x-1,5)^2$, setzten die Koordinaten dieses Punkts ein und berechnen das noch fehlende a:

$$\begin{aligned} & 2,5 &&= a \cdot (6,5-1,5)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 2,5 &&= a \cdot 5^2 \\ \Leftrightarrow \quad & 2,5 &&= a \cdot 25 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{25} &&= a \\ \Leftrightarrow \quad & a &&= \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Damit lautet die Funktionsgleichung $y = \frac{1}{10}(x - \frac{3}{2})^2$.

Roter Graph
Den Scheitelpunkt des roten Graphens k"onnen wir als $S_3(-2;-1,5)$ ablesen, d.h. die Funktionsgleichung muss $y = a \cdot (x+2)^2 - 1,5$ lauten, wobei a noch zu bestimmen ist. Gehen wir vom Scheitelpunkt aus um eine Einheit nach rechts, m"ussen wir um 2 Einheiten nach unten gehen, um wieder beim Graphen zu sein, d.h. es muss $a = -2$ gelten. Somit ergibt sich mit der Scheitelpunktform die Funktionsvorschrift $f(x) = -2(x+2)^2 - 1,5$.

Blauer Graph
Beim blauen Graph k"onnen wir den Scheitelpunkt nicht genau ablesen, sodass wir insgesamt drei Punkte zur Festlegung der Gleichung ben"otigen. Dazu stellen wir fest, dass die Parabel die $y-$Achse bei $y = 2,5$ schneidet. Somit ist $(0;2,5)$ der erste Punkt. Des Weiteren liegen die Punkte $(2;1)$ und $(-1;-0,5)$ auf dem Graphen. Diese setzen wir nun nacheinander in die allgemeine Funktionsvorschrift $f(x) = ax^2 + bx + c$ ein und berechnen die drei unbekannten Parameter a, b und c:

$$\begin{aligned} & 2,5 &&= a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{5}{2} &&= c \end{aligned}$$

Damit haben wir unseren ersten Parameter $c = \frac{5}{2}$ bestimmt.
Setzen wir diesen sowie die Koordinaten des zweiten Punkts in die Ausgangsgleichung ein und l"osen diese nach einer der noch unbekannten Variablen auf:

$$\begin{aligned} & 1 &&= a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & -\frac{3}{2} &&= a \cdot 4 + b \cdot 2 \\ \Leftrightarrow \quad & -\frac{3}{2} - 2b &&= a \cdot 4 \\ \Leftrightarrow \quad & -\frac{3}{8} - \frac{1}{2}b &&= a \end{aligned}$$

Setzen wir nun die bisherigen Ergebnisse ($a = -\frac{3}{8} - \frac{1}{2}b$ sowie $c = \frac{5}{2}$) und den dritten Punkt in

die Ausgangsgleichung ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned} -0,5 &= \left(-\frac{3}{8}-\frac{1}{2}b\right)\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+\frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow\quad -\frac{1}{2} &= -\frac{3}{8}-\frac{1}{2}b-b+\frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow\quad -3 &= -\frac{3}{8}-\frac{3}{2}b \\ \Leftrightarrow\quad -\frac{24}{8}+\frac{3}{8} &= -\frac{3}{2}b \\ \Leftrightarrow\quad -\frac{21}{8} &= -\frac{3}{2}b \\ \Leftrightarrow\quad -\frac{21}{8}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) &= b \\ \Leftrightarrow\quad \frac{7}{4} &= b \end{aligned}$$

Damit ist $b=\frac{7}{4}, c=\frac{5}{2}$ und $a=-\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{4}=-\frac{3}{8}-\frac{7}{8}=-\frac{10}{8}=-\frac{5}{4}$ und die Funktionsvorschrift lautet somit insgesamt

$$f(x)=-\frac{5}{4}x^2+\frac{7}{4}x+\frac{5}{2}.$$

Aufgabe 11:
Gegeben ist die quadratische Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=-3x^2+5x-10.$$

Welche Werte auf der y-Achse werden nicht als Funktionswerte angenommen und welche Werte treten als Funktionswerte auf? Geben Sie f"ur jeden Funktionswert y die Stellen x an, an denen dieser Funktionswert angenommen wird!

Lösung:

Zur Beantwortung der Frage f"uhren wir die Funktionsvorschrift zun"achst mithilfe der quadratischen Erg"anzung in die Scheitelpunktform "uber:

$$\begin{aligned} y &= -3x^2+5x-10 \\ \Leftrightarrow\quad y &= -3\left(x^2-\frac{5}{3}x+\frac{10}{3}\right) \\ \Leftrightarrow\quad y &= -3\left(x^2-2\cdot\frac{5}{6}\cdot x+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2+\frac{10}{3}\right) \\ \Leftrightarrow\quad y &= -3\left(\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}+\frac{120}{36}\right) \\ \Leftrightarrow\quad y &= -3\left(\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{95}{36}\right) \\ \Leftrightarrow\quad y &= -3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{95}{12} \end{aligned}$$

Da $-3 < 0$ gilt, ist die Parabel nach unten ge"offnet und hat den Scheitelpunkt (Hochpunkt) bei $(\frac{5}{6}; -\frac{95}{12})$. Somit werden alle Werte $y \leq -\frac{95}{12}$ angenommen, w"ahrend alle Werte $y > -\frac{95}{12}$ als Funktionswerte nicht in Frage kommen.

Um letztlich noch f"ur jeden Funktionswert y die Stellen x anzugeben, an denen dieser Funktionswert angenommen wird, l"osen wir die Gleichung nach x auf:

$$\begin{aligned} & y &=& -3x^2 + 5x - 10 \\ \Leftrightarrow\quad & y &=& -3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{95}{12} \\ \Leftrightarrow\quad & y + \frac{95}{12} &=& -3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 \\ \Leftrightarrow\quad & -\frac{y}{3} - \frac{95}{36} &=& \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 \end{aligned}$$

Wir können die Wurzel ziehen, da wir nur Funktionswerte y betrachten mit $y \leq -\frac{95}{12}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & -\frac{y}{3} - \frac{95}{36} &=& \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 \\ \Leftrightarrow\quad & \pm\sqrt{-\frac{y}{3} - \frac{95}{36}} &=& x - \frac{5}{6} \\ \Leftrightarrow\quad & \pm\sqrt{-\frac{y}{3} - \frac{95}{36}} + \frac{5}{6} &=& x\,, \end{aligned}$$

und damit die L"osung der letzten Teilaufgabe: Setzt man in der letzten Gleichung ein beliebiges $y \leq -\frac{95}{12}$ ein, so erh"alt man die beiden zugeh"origen x.

Aufgabe 12:
Besitzen die folgende Parabel und Gerade Schnittpunkte

$$y = 2x^2 - 3x + 1, \quad y = 5x - 4\,?$$

Veranschaulichen Sie sich die Kurven mit einer Zeichnung.

Lösung:
Wir erstellen erneut eine Zeichnung der beiden Graphen in einem Koordinatensystem. Dazu m"ussen wir die quadratische Funktion jedoch erst in die Scheitelpunktform bringen, um

schneller auf den Graphen zu kommen:

$$\begin{aligned} & y = 2x^2 - 3x + 1 \\ \Leftrightarrow \quad & y = 2(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}) \\ \Leftrightarrow \quad & y = 2\left(x^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \quad & y = 2\left(\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{8}{16}\right) \\ \Leftrightarrow \quad & y = 2\left(\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right) \\ \Leftrightarrow \quad & y = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Nun k"onnen wir die beiden Graphen zeichnen:

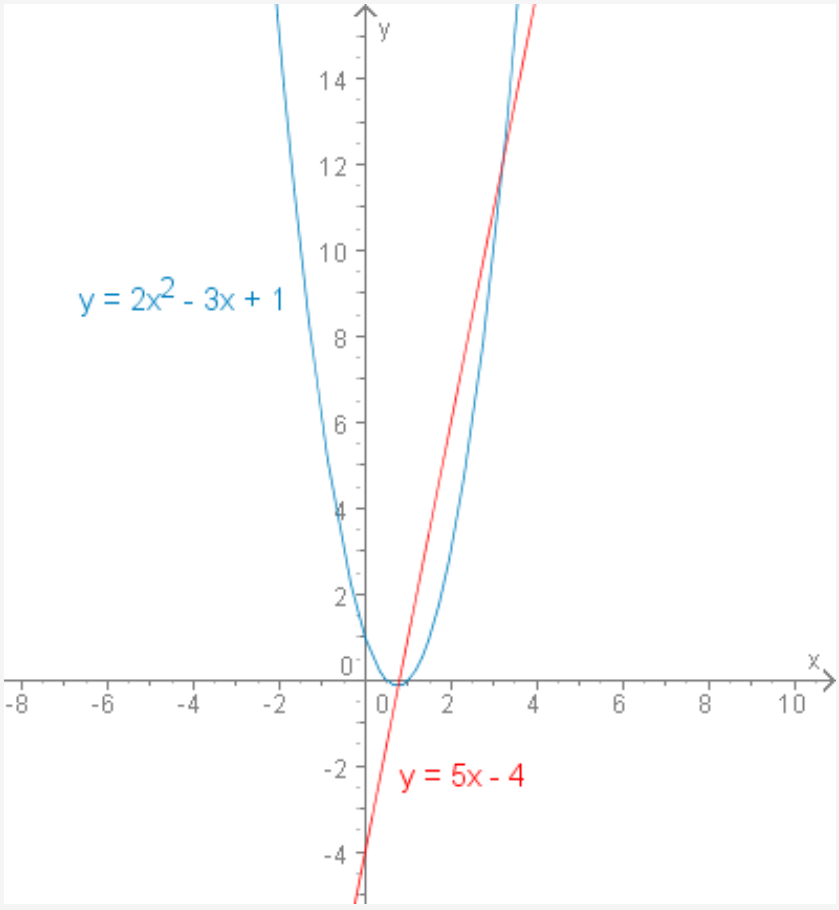


Bild 20 Graphen der Funktionen $y = 2x^2 - 3x + 1$ (blau) und $y = 5x - 4$ (rot).

Wir sehen anschaulich, dass sich die Gerade und die Parabel in zwei Punkten schneiden.

Rechnerisch ergibt sich, wenn man die beiden Funktionsterme gleich setzt:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x + 1 &= 5x - 4 \\ 2x^2 - 8x + 5 &= 0 \\ x^2 - 4x + \frac{5}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Die pq-Formel liefert die Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - \frac{5}{2}} = 2 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

und somit $x_1 \approx 3,22$ und $x_2 \approx 0,78$. Diese beiden Schnittpunkte der Parabel mit der Geraden stimmen mit der Skizze überein.

Aufgabe 13:
Suchen Sie nach dem Fehler:

Gegeben sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 2x^2 - 12x + 18$. Wo liegt der Scheitelpunkt der Parabel?
Antwort: $g(x) = 2x^2 - 12x + 18 = 2 \cdot (x^2 - 6x + 9) = 2(x-3)^2$. Somit liegt der Scheitelpunkt bei $(-3; 0)$.

Lösung:
Der Scheitelpunkt wurde falsch abgelesen, es liegt ein Vorzeichenfehler vor. Der Scheitelpunkt liegt bei $(x_s; y_s) = (3; 0)$.

Aufgabe 14:
Suchen Sie nach dem Fehler:

Bestimmen Sie den Scheitelpunkt der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6x + 10$.
Antwort:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}x^2 + 6x + 10 \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 2 \cdot 3x + 9 - 9 + 10 \\ &= \left(\frac{1}{2}x + 3\right)^2 + 1\,. \end{aligned}$$

Der Scheitelpunkt ist also $S(-3; 1)$.

Lösung:
Es wurde vergessen, den Vorfaktor von x^2 vor der quadratischen Erg"anzung auszuklammern. Die quadratische Erg"anzung sowie der Scheitelpunkt sind daher falsch.
Korrekte L"osung:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}(x^2 + 12x + 20) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 2 \cdot 6x + 36 - 36 + 20) \\ &= \frac{1}{2}\left((x+6)^2 - 16\right) \\ &= \frac{1}{2}(x+6)^2 - 8. \end{aligned}$$

Somit ist der Scheitelpunkt $S(-6;-8)$.

Aufgabe 15:
Suchen Sie nach dem Fehler:

Erl"autern Sie, wie die Funktion $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $h(x)=(x-3)^2-7$ durch geometrische Abbildungen aus $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=x^2$ entstanden ist:
Antwort: f wurde um 3 in x-Richtung und um 7 in y-Richtung verschoben.

Lösung:
Es liegt erneut ein Vorzeichenfehler vor: f wurde um -7 in y-Richtung verschoben, d.h. um 7 nach unten. Der L"osende dachte möglicherweise, man m"usse auch das Vorzeichen des y-Achsenabschnitts umdrehen, um auf die entsprechende Verschiebung zu kommen.