UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Virtuelles Eingangstutorium
studiVEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn
FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Virtuelles Eingangstutorium
VEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

khdm
kompetenzzentrum
hochschuldidaktik
mathematik

Anwendung

Aufgabe 16:
F"ur den freien Fall eines K"orpers gilt das Weg - Zeit - Gesetz:

$$y = -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + v_0 x + y_0.$$

Der K"orper wird in der Anfangsh"ohe $y_0 > 0$ mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben ($v_0 > 0$) bzw. nach unten ($v_0 < 0$) geworfen. x steht für die Zeit in Sekunden und y steht für die Höhe vom Boden in Metern.
Runden Sie alle Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen!

1. Sei $v_0 = 3\frac{m}{s}$. Welche Anfangsh"ohe wird ben"otigt, damit der K"orper die Scheitelh"ohe von 60 m erreicht?
   ?
   ~~bleibt~~? Welche Anfangsh"ohe wird ben"otigt, damit der K"orper 6 Sekunden in der Luft
   ?

Lösung:

Gem"a"s der Definition in der Hinführung ist der Punkt

$$(x_s; y_s) = \left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

der Scheitelpunkt der Parabel $y = ax^2 + bx + c$. Nun gilt $v_0 = 3$, womit wir durch Einsetzen die Gleichung $y = -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 3x + y_0$ erhalten. Gesucht ist y_0, f"ur das die Scheitelh"ohe von 60 m erreicht wird. Wir setzten dies in die Gleichung ein:

$$60 = c - \frac{b^2}{4a} = y_0 - \frac{3^2}{4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 9,81\right)}$$

und l"osen dann nach y_0 auf:

$$\begin{aligned}
60 &= y_0 - \frac{3^2}{4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 9,81\right)} \\
\Leftrightarrow \quad 60 &= y_0 - \frac{9}{-2 \cdot 9,81} \\
\Leftrightarrow \quad 60 &= y_0 + \frac{9}{19,62} \\
\Leftrightarrow \quad 60 - \frac{9}{19,62} &= y_0 \\
\Leftrightarrow \quad y_0 &\approx 59,54\,.
\end{aligned}$$

Wir ben"otigen also eine Anfangsh"ohe von ungef"ahr $y_0 \approx 59,54$ m.

Wenn der K"orper 6 Sekunden in der Luft bleibt, bedeutet dies, dass ab dem Zeitpunkt des Abwurfs bis zu seinem Auftreffen auf dem Boden genau 6 Sekunden vergehen. Dies wiederum bedeutet, dass die entsprechende Parabel bei $x = 6$ eine Nullstelle hat und dass damit beim Einsetzen von $x = 6$ in die Funktionsvorschrift $y = -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + 3x + y_0$ der Wert $y = 0$ herauskommen muss. Hierbei ergibt sich folgende Gleichung, die wir erneut nach y_0 aufl"osen:

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 + y_0 \\
\Leftrightarrow 0 &= -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 36 + 18 + y_0 \\
\Leftrightarrow 0 &= -18 \cdot 9,81 + 18 + y_0 \\
\Leftrightarrow 0 &= -158,58 + y_0 \\
\Leftrightarrow y_0 &= 158,58\,.
\end{aligned}$$

Wir ben"otigen also eine Anfangsh"ohe von $y_0 = 158,58$ m.

2. Sei $y_0 = 55\,m$. Welche Anfangsgeschwindigkeit wird ben"otigt, damit der K"orper die Scheitelh"ohe von 60 m erreicht?
   ?
   ~~in der~~ Welche Anfangsgeschwindigkeit wird ben"otigt, damit der K"orper 6 Sekunden Luft bleibt?
   ?

Lösung:

Wenn nun $y_0 = 55$ gilt, lautet die Gleichung zun"achst einmal $y = -\frac{1}{2} \cdot 9,81x^2 + v_0 x + 55$. Gesucht ist nun die Anfangsgeschwindigkeit v_0, f"ur die erneut ein Scheitelh"ohe von $y_s = 60m$ erreicht wird. Wir verwenden dazu erneut die Gleichung $y_s = c - \frac{b^2}{4a}$, setzten die vorgegebenen Werte ein und l"osen dieses Mal nach v_0 auf:

$$\begin{aligned} & 60 &=& 55 - \frac{v_0^2}{4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 9,81\right)} \\ \Leftrightarrow \quad & 60 &=& 55 - \frac{v_0^2}{-2 \cdot 9,81} \\ \Leftrightarrow \quad & 60 &=& 55 - \frac{v_0^2}{-19,62} \\ \Leftrightarrow \quad & 5 &=& \frac{v_0^2}{19,62} \\ \Leftrightarrow \quad & 98,1 &=& v_0^2 \\ \Leftrightarrow \quad & v_0 &=& \pm\sqrt{98,1} \approx \pm 9,90\,. \end{aligned}$$

Da eine negative L"osung als Anfangsgeschwindigkeit ausgeschlossen werden kann, brauchen wir also eine Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 \approx 9,9\frac{m}{s}$.

Um eine Flugzeit von 6 Sekunden zu bekommen, setzen wir wie oben $x = 6$ und $y = 0$ in die Ausgangsgleichung ein und berechnen v_0:

$$\begin{aligned} & 0 &=& -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 6^2 + v_0 \cdot 6 + 55 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 &=& -\frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 36 + v_0 \cdot 6 + 55 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 &=& -18 \cdot 9,81 + v_0 \cdot 6 + 55 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 &=& -176,58 + v_0 \cdot 6 + 55 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 &=& -121,58 + v_0 \cdot 6 \\ \Leftrightarrow \quad & 121,58 &=& v_0 \cdot 6 \\ \Leftrightarrow \quad & v_0 &\approx& 20,26\,. \end{aligned}$$

Wir ben"otigen dann also eine Anfangsgeschwindigkeit $v_0 \approx 20,26\frac{m}{s}$.

Aufgabe 17:

Der Graph einer Parabel geht durch den Punkt $(1;3)$. Au"serdem besitzt die Parabel den Scheitelpunkt $(-2;-\frac{3}{2})$. Wie lautet die Funktionsvorschrift der Parabel in der Darstellung einer ausmultiplizierten quadratischen Funktion? $f(x) =$?

Lösung:

Wir bestimmen den Funktionsterm der Parabel, die ihren Scheitelpunkt bei $\left(-2;-\frac{3}{2}\right)$ hat, und die durch den Punkt $(1;3)$ verl"auft.

Wir setzen den Scheitelpunkt in die Scheitelpunktform ein:

$$y = a(x+2)^2 - \frac{3}{2}\,.$$

Den Parameter a bestimmen wir mit dem Punkt $(1;3)$:

$$\begin{aligned} 3 &= a(1+2)^2 - \frac{3}{2} \\ \frac{9}{2} &= 9a \\ \frac{1}{2} &= a. \end{aligned}$$

Die Scheitelpunktform der Parabel ist also

$$y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - \frac{3}{2}\,.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung aus, erhalten wir die gewünschte Form:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}(x^2+4x+4) - \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 - \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$