UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Virtuelles Eingangstutorium
studiVEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn
FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Virtuelles Eingangstutorium
VEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

khdm
kompetenzzentrum
hochschuldidaktik
mathematik

Ergänzungen

Polynomfunktionen (ganzrationale Funktionen)

Man kann die linearen und quadratischen Funktionen verallgemeinern, indem man auch h"ohere Exponenten als zwei zulässt. Geraden werden durch Funktionsvorschriften der Gestalt $f_1(x) = a_1x + a_0$ gegeben. Hierin enthalten ist der Sonderfall $a_1 = 0$ mit der Funktionsvorschrift $f_0(x) = a_0$, der eine Parallele zur x-Achse darstellt. Nehmen wir die n"achst h"ohere Potenz hinzu, so entsteht die quadratische Funktionsvorschrift einer Parabel $f_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Kubische Parabeln haben Funktionsvorschriften der Gestalt $f_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Allgemein kann man nun auch den Ausdruck

$$f_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

f"ur eine beliebige nat"urliche Zahl n betrachten. Diese Funktionsvorschrift bezeichnet man als Polynom n-ten Grades mit $a_n \neq 0$.

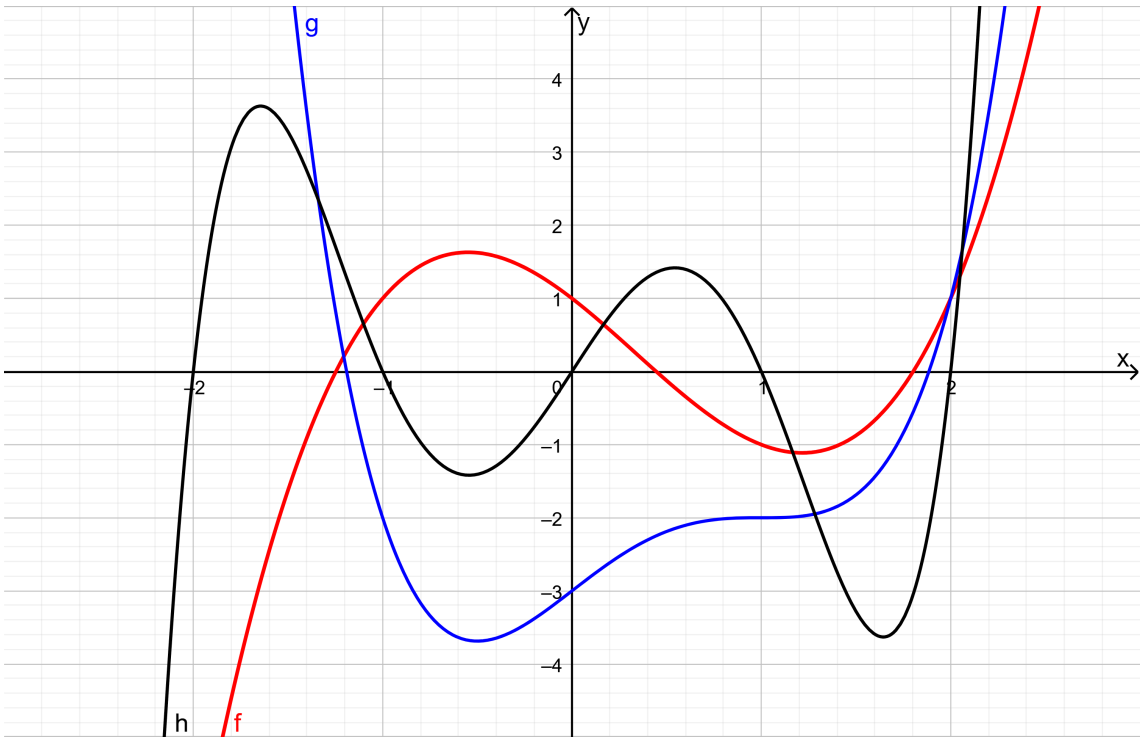


Bild 21 Graphen der Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Funktionsvorschrift $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ (rot), $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 3$ (blau) und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$ (schwarz).

Definition 3:

Unter einer **Polynomfunktion** vom Grad $n \in \mathbb{N}$ versteht man eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch folgende Funktionsvorschrift gegeben ist:

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_ix^i + \ldots + a_1x + a_0$$

mit $a_n \neq 0$ und $a_i \in \mathbb{R}$ mit $i = 1, \ldots, n$.
Die Parameter $a_i \in \mathbb{R}$ werden dabei als **Koeffizienten** bezeichnet. Das Nullpolynom $f_0(x) = 0$ hat keinen Grad.

Satz 2:

F"ur zwei Polynomfunktionen vom Grad n

$$\begin{aligned} P_n: &\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &\text{mit} \quad P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ Q_n: &\quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &\text{mit} \quad Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0\,. \end{aligned}$$

$(a_n \neq 0, \quad b_n \neq 0)$

gilt $P_n(x) = Q_n(x)$ f"ur alle $x \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn alle Koeffizienten "ubereinstimmen (d.h. $a_i = b_i$ f"ur alle $i = 0\,, \ldots\,, n\,$).

Durch **Koeffizientenvergleich** kann demnach die Gleichheit zweier Polynome "uberpr"uft werden. Insbesondere k"onnen Polynome verschiedenen Grades nicht gleich sein.

Dieser Satz kann mathematisch exakt bewiesen werden. Wir verzichten hier aber darauf.