UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Virtuelles Eingangstutorium
studiVEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn
FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Virtuelles Eingangstutorium
VEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

khdm
kompetenzzentrum
hochschuldidaktik
mathematik

LE 5 - Elementare Funktionen

5.4 Eigenschaften von Funktionen

Im Folgenden finden Sie die Abschnitte:

Übersicht ..... S. 1
Hinführung ..... S. 2
Inhalte mit Erklärungen ..... S. 6
Aufgaben ..... S. 13
Anwendung ..... S. 16

Übersicht

In diesem Kapitel der Lerneinheit beschäftigen wir uns mit den Grundzügen der Kurvendiskussion, ohne die Analysis vorauszusetzen.

Auf folgende Teile einer Kurvendiskussion gehen wir hierbei ein:

1. Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen,
2. Symmetrien
3. das Monotonieverhalten
4. lokale und globale Extrema,

Umfassenderes Material zur Untersuchung von Extremstellen, Wende- und Sattelpunkten mithilfe der Analysis (Ableitungen) finden Sie im Kurs *Differentialrechnung*. Die Eigenschaften von Exponential-, Logarithmus- und trigonometrischen Funktionen werden im Kurs *Höhere Funktionen* behandelt.

Hinführung

Ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ und Funktionsvorschrift gegeben, kann man meist nicht direkt auf die Eigenschaften der Funktion bzw. auf deren **qualitatives Verhalten** schlie"sen.

Es ist auch nur selten sinnvoll ohne weiteres Wissen eine **Wertetabelle** anzulegen. So ergeben sich besipielsweise f"ur die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0,01x^3 - 10x$ die folgenden Funktionswerte:

x_0	-4	-2	0	2	4	6	8	10
$f(x_0)$	39,36	19,92	0	-19,92	-39,96	-57,85	-74,88	-90

Zeichnet man diese Werte in ein Koordinatensystem ein, so scheint man eine Gerade zu erhalten:

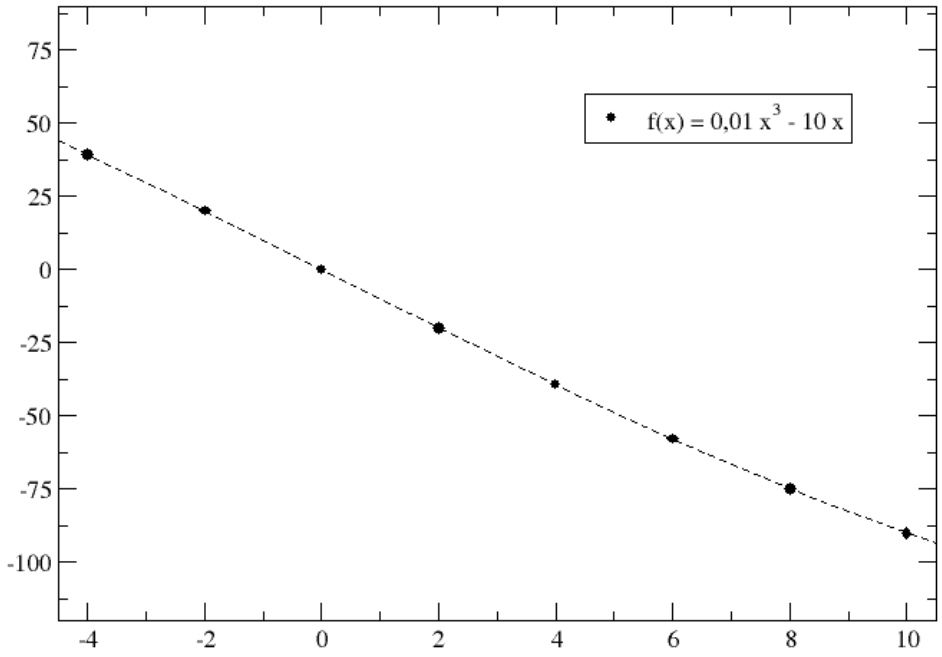


Bild 1

Die Funktionsvorschrift l"asst allerdings vermuten, dass es sich um eine kompliziertere Funktion handelt. Hier kann es helfen – wie in vielen F"allen – sich mithilfe eines Computers den Graph der Funktion in einem größeren Intervall ausgeben zu lassen. Man erh"alt zum Beispiel:

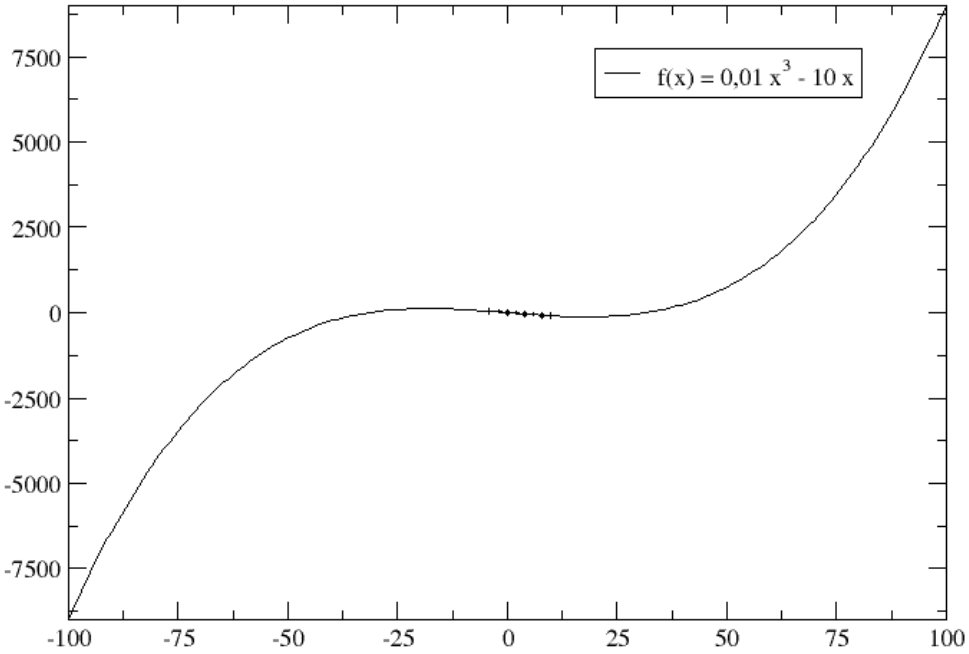


Bild 2

Hier sind wieder die Punkte markiert, die in obiger Wertetabelle aufgelistet waren.

Doch auch auf **Computerprogramme** sollte man nicht blind vertrauen! Das genutzte Programm kann unter Umst"anden mit einer bei der betrachteten Funktion auftretenden Problematik nicht umgehen, sodass ein fehlerhaftes oder gar kein Ergebnis ausgeben wird.

Man sollte auch (vorher) in der Lage sein zu "uberblicken, welche Eigenschaften der Funktion "uberhaupt von Interesse sind. Ist man eigentlich am qualitativen Verhalten der Funktion f"ur (betragsm"a"sig) gro"se x-Werte interessiert, kann ein zu klein gew"ahlter Ausschnitt des Funktionsgraphen zu irref"uhrenden oder falschen Resultaten f"uhren. Genauso kann auch ein zu groß gewählter Ausschnitt dazu führen, dass man wesentliche Eigenschaften der Funktion nicht erkennt.

Die mathematische Theorie (siehe auch Kurs *Differentialrechnung*) hilft zu entscheiden, ob ein Ausschnitt des Graphen die wesentlichen Eigenschaften wiedergibt. Man weiß, dass eine Funktion dritten Grades höchstens zwei Extremstellen besitzt. Genau diese beiden sind bereits sichtbar in der zweiten Graphik (Bild 2).

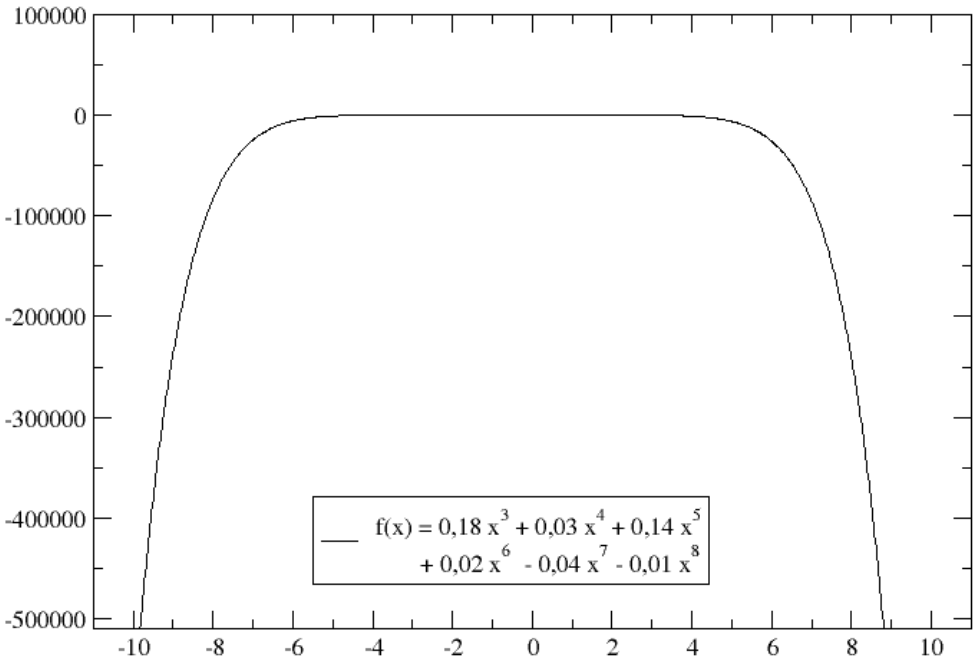


Bild 3 Ausschnitt aus dem Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0,18x^3 + 0,03x^4 + 0,14x^5 + 0,02x^6 - 0,04x^7 - 0,01x^8$. In der hier gewählten Auflösung scheint die Funktion im Bereich $-6 < x < 4$ ein Plateau zu besitzen. Das folgende Bild zeigt aber eine feinere Struktur, die beim Hereinzoomen erkennbar wird.

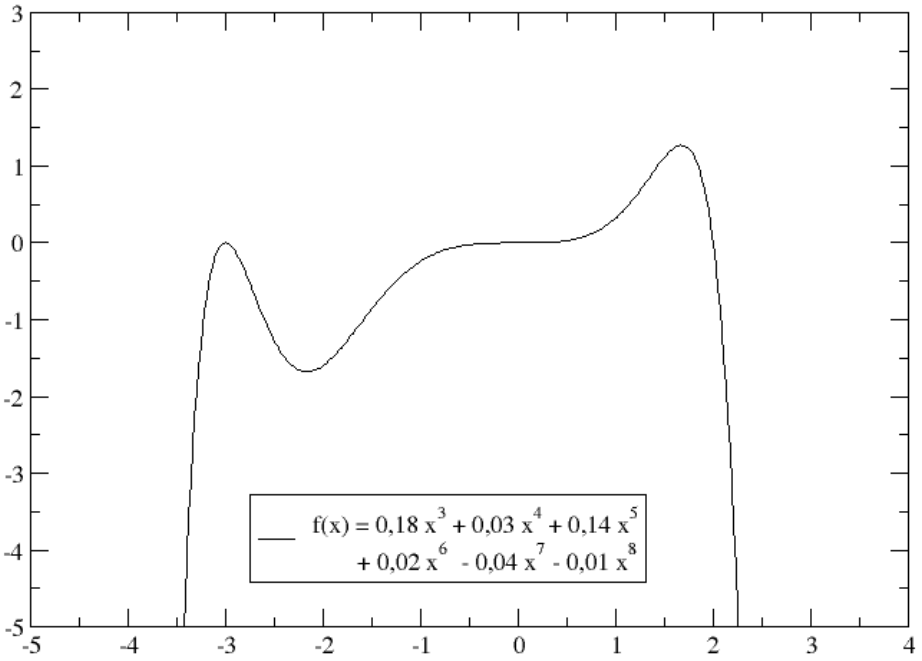


Bild 4 Ausschnitt aus dem Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0,18x^3 + 0,03x^4 + 0,14x^5 + 0,02x^6 - 0,04x^7 - 0,01x^8$. In der nun gewählten Auflösung erkennt man, dass die Funktion im Bereich $-4 < x < 3$ mindestens zwei lokale Maxima und ein lokales Minimum besitzt.

Beispielsweise kann das Verhalten der Funktion in einem kleinen Bereich um eine bestimmte Stelle interessant sein, der vom Computer ausgebene Ausschnitt die Stelle aber nur in einer v"ollig unpassenden Skalierung oder gar nicht zeigen. Computer k"onnen auch immer nur mit einer bestimmten Genauigkeit rechnen – die auftretenden Fehler k"onnen sich vervielfachen und oft nur mit vorhandenem Hintergrundwissen umgangen werden.

Die in diesem Kapitel Techniken können helfen, sinnvolle und nützliche Aussagen über das qualitative Verhalten von Funktionen bzw. deren Graphen deren Graphen zu treffen. Sie k"onnen genutzt werden, um abzusch"atzen, ob ein von einem Computerprogramm ausgebenes Resultat f"ur die betrachtete Fragestellung sinnvoll ist, oder um die Eigenschaften einer gegebenen Funktion ohne die Hilfe eines Computer bestimmen zu k"onnen. Sie erleichtern auch das Anfertigen einer Skizze, die die wesentlichen Charakteristika einer Funktion enth"alt.

F"ur die praktische Anwendung sind die bei einer Kurvendiskussion einge"ubten Methoden aber eher als eine Art **Werkzeugkasten** zu sehen: Man wird wahrscheinlich selten alle Werkzeuge auf einmal nutzen – es ist aber gut alle zur Verf"ugung zu haben!

Inhalte mit Erklärungen

Info 1:
Bei einer Kurvendiskussion untersucht man Eigenschaften des **Graphen einer Funktion**. Dabei bestimmen wir im Folgenden

1. die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen,
2. Symmetrien (bezüglich des Koordinatensystems),
3. das Monotonieverhalten,
4. lokale und globale Extrema.

1. Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind genau die Stellen $x \in D$, für die $f(x) = 0$ ist. Solche Stellen nennt man Nullstellen. Für diese Stellen interessiert man sich sehr häufig – wie wir auch bei der Berechnung lokaler Extrema sehen werden – dort sucht man die Nullstellen der Ableitungsfunktion.

Definition 1:
Sei $D \subset \mathbb{R}$. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine Zahl $x_0 \in D$ heißt Nullstelle von f, falls $f(x_0) = 0$.

Bemerkung

- Eine Nullstelle ist eine Stelle, an welcher der Graph von f die x-Achse schneidet oder berührt. Man erhält sie, indem man $f(x) = 0$ setzt und diese Gleichung nach x auflöst.

Liegt die Null im Definitionsbereich D, dann schneidet der Graph von f die y-Achse an der Stelle $x_0 = 0$. Der Funktionswert $f(0)$ an dieser Stelle bildet den y-Wert des Schnittpunkts $(0; f(0))$. Um ihn zu berechnen, gen"ugt es also, den Wert Null in die Funktionsvorschrift einzusetzen.

Satz 1:
Ist $0 \in D$, so schneidet der Graph der Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ die y-Achse im Punkt $(0; f(0))$. F"ur jede Nullstelle $x_i \in D$ ist der Punkt $(x_i; 0)$ ein Schnittpunkt des Funktionsgraphen mit der x-Achse.

Die Berechnung der Nullstellen kann sehr schwierig oder sogar nur n"aherungsweise mithilfe eines Computers m"oglich sein. Wir m"ochten dies hier deshalb nur exemplarisch zeigen. Es sei aber darauf hingewiesen, dass man mit den gleichen Methoden auch alle Stellen, an denen die Funktion einen beliebigen anderen Wert $c \in \mathbb{R}$ erreicht, bestimmen kann. Denn setzt man $g(x) = f(x) - c$, dann nimmt f bei allen Nullstellen der Funktion g den Funktionswert c an (d.h. $f(x_0) = c \Leftrightarrow g(x_0) = f(x_0) - c = 0$).

Beispiel 1:

Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2 - 3x + 2$, dann schneidet f die y-Achse bei $f(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$. Um die Nullstellen zu erhalten, setzt man den Funktionswert gleich Null und löst die resultierende Gleichung $f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0$ mithilfe der pq-Formel:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 2} \\ &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}} \\ &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

sodass sich die Nullstellen $x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$ und $x_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$ ergeben.

Die Funktion f hat also die Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ und schneidet somit die Koordinatenachsen insgesamt in den Punkten $(0; 2)$, $(1; 0)$ und $(2; 0)$.

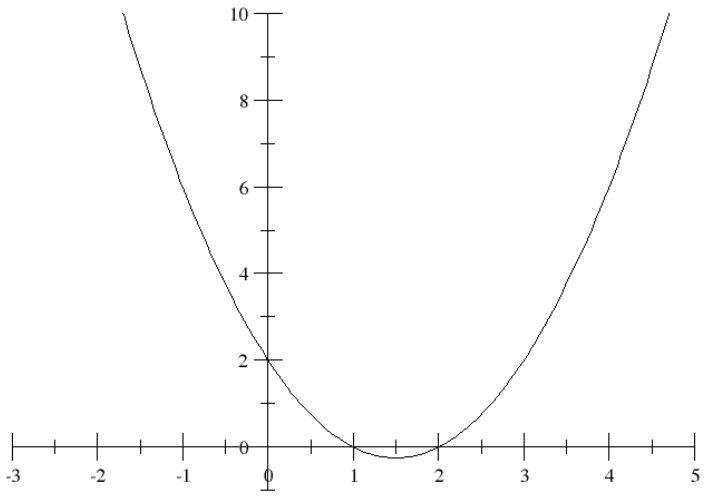


Bild 5

2. Symmetrien bezüglich des Koordinatensystems

Manche Funktionen weisen Symmetrien bez"uglich einer Achse oder eines Punktes auf, d.h. spiegelt man den Graph der Funktion an dieser Achse bzw. an diesem Punkt, so erh"alt man wieder den urspr"unglichen Funktionsgraphen. Dabei interessieren wir uns hier allerdings nicht f"ur Symmetrien bez"uglich beliebiger Achsen oder Punkte, sondern nur bez"uglich der *y-Achse* oder bez"uglich des *Ursprungs*.

Diese k"onnen besonders leicht verifiziert werden und erleichtern (falls vorhanden) die Berechnung der Wertetabelle und besonderer Punkte. Denn so hat z.B. ein lokales Extremum an der Stelle x_0 auch ein lokales Extremum an der Stelle $-x_0$ zur Folge, wenn eine Funktion symmetrisch zur y-Achse ist.

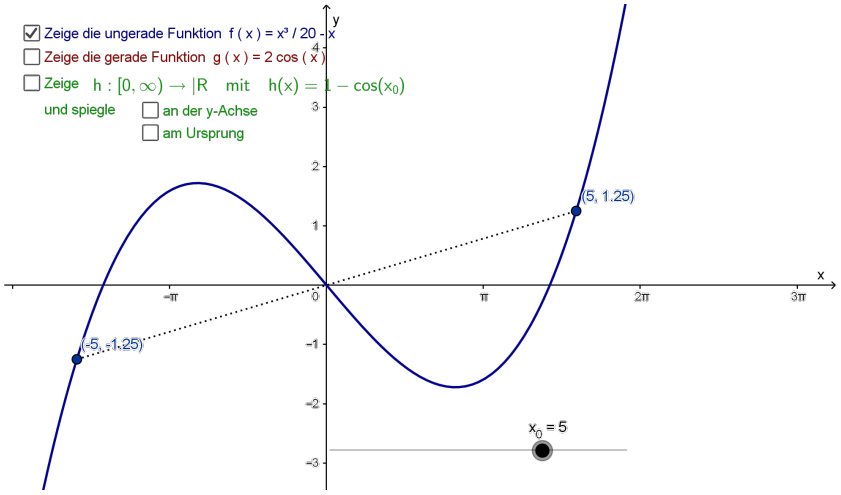
Definition 2:

Sei $D \subset \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in D$ auch $-x \in D$ gilt. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion f heißt

- **achsensymmetrisch zur y-Achse** oder auch **gerade**, wenn $f(-x) = f(x)$ f"ur jedes $x \in D$ gilt,
- **punktsymmetrisch zum Ursprung** oder auch **ungerade**, wenn $f(-x) = -f(x)$ f"ur jedes $x \in D$ gilt.

Aufgabe 1:

Lassen Sie sich im Applet eine gerade und eine ungerade Funktion anzeigen und stellen Sie verschiedene Werte von x_0 ein, um zu beobachten, wo sich jeweils der Punkt $(-x_0; f(-x_0))$ befindet. Spiegeln Sie außerdem die gegebene Funktion h an der y-Achse und am Ursprung.



Interaktion 1 *(nur in digitaler Version)*

Beispiel 2:

Wir betrachten die Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^2 + 2 = x^4 - 4x^2 + 2 = f(x).$$

Damit ist f eine gerade Funktion bzw. achsensymmetrisch zur y-Achse.

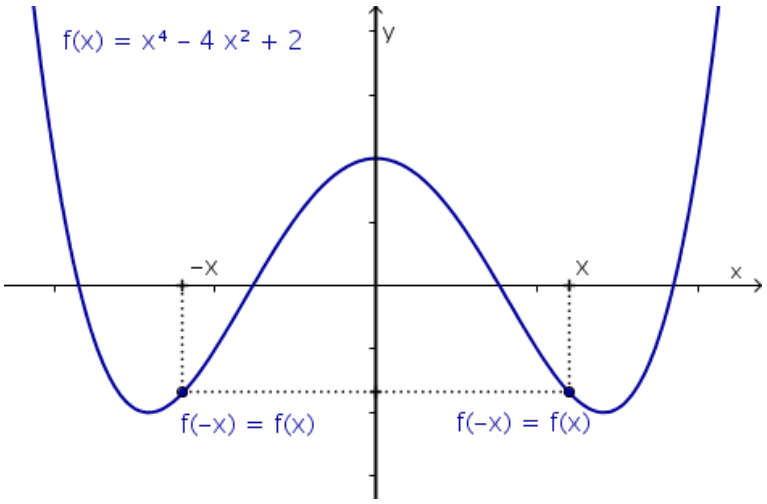


Bild 6 Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ ist gerade.

3. Monotonieverhalten

Betrachten wir das Steigungsverhalten einer Funktion anhand der folgenden Definition.

Definition 3:

Sei $D \subset \mathbb{R}$. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt auf einem Intervall $I \subset D$

- **monoton wachsend**, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt: Wenn $x_1 < x_2$, dann $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- **streng monoton wachsend**, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt: Wenn $x_1 < x_2$, dann $f(x_1) < f(x_2)$.
- **monoton fallend**, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt: Wenn $x_1 < x_2$, dann $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- **streng monoton fallend**, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt: Wenn $x_1 < x_2$, dann $f(x_1) > f(x_2)$.

Die Definition beinhaltet, dass jede auf einem Intervall I *streng* monoton wachsende (bzw. fallende) Funktion dort auch monoton wachsend (bzw. fallend) ist.

Im Kurs *Differentialrechnung* wird gezeigt, wie man das Monotonieverhalten mit Hilfe des Vorzeichen der ersten Ableitung bestimmen kann.

Beispiel 3:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x) = x^2$. Hier gilt auf dem Intervall $]0, \infty[$ f"ur alle reellen Zahlen x_1 und x_2 mit $x_1 < x_2$ auch $x_1^2 < x_2^2$ und daher $f(x_1) = x_1^2 < x_2^2 = f(x_2)$. Die Funktion $f(x)$ ist also auf dem Intervall $]0, \infty[$ streng monoton steigend.

Das ist anschaulich klar. Rechnerisch prüfen wir nach, ob aus $x_1 < x_2$ auch wirklich immer $f(x_1) > f(x_2)$ folgt. Hierfür formen wir zuerst die zu zeigende Ungleichung wie folgt um:

$$\begin{aligned} & f(x_2) > f(x_1) && | -f(x_1) \\ \Leftrightarrow \quad & f(x_2) - f(x_1) > 0 && | f(x) = x^2 \text{ einsetzen} \\ \Leftrightarrow \quad & x_2^2 - x_1^2 > 0 && | \text{ 3. binomische Formel} \\ \Leftrightarrow \quad & (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0 \end{aligned}$$

Die Ungleichung stimmt, da $x_2 - x1 > 0$ und $x_2 + x_1 > 0$ sind und damit auch ihr Produkt positiv ist, wenn $x_1 < x_2$ gilt. Wir haben also insgesamt gezeigt, dass $f(x_2) > f(x_1)$ für alle $x_1 < x_2$ gilt.

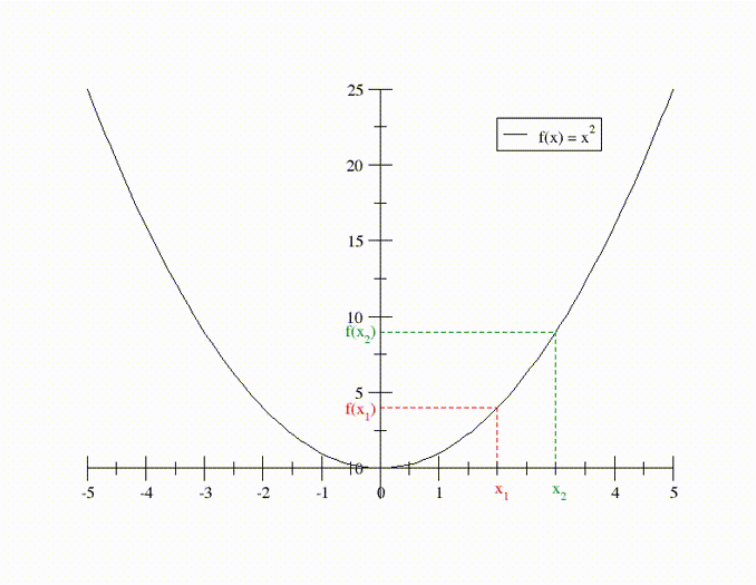


Bild 7

Zur Veranschaulichung kann man beispielsweise die Punkte $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$ wählen. Es ist also $x_1 < x_2$. Und wegen $f(x_1) = f(2) = 2^2 = 4$ und $f(x_2) = f(3) = 3^2 = 9$ gilt auch $f(x_1) < f(x_2)$. Dieses Beispiel ist selbstverständlich kein Beweis und dient lediglich der Illustration.

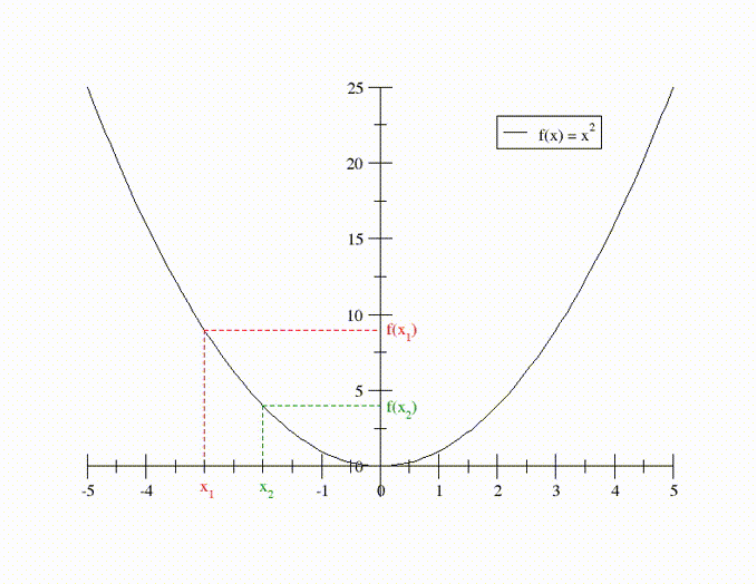


Bild 8

Betrachtet man das Intervall $]-\infty, 0[$ und wählt hier beispielsweise $x_1 = -3$ und $x_2 = -2$, sodass wieder $x_1 < x_2$ gilt, so kann man nachrechnen, dass gilt: $f(x_1) = f(-3) = (-3)^2 = 9$ und $f(x_2) = f(-2) = (-2)^2 = 4$. Hier gilt also **nicht**, dass aus $x_1 < x_2$ auch $f(x_1) < f(x_2)$ folgt!

Anschaulich ist dagegen klar, dass die umgekehrte Aussage gilt: Für alle $x_1 < x_2$ aus $]-\infty, 0[$ ist $f(x_1) > f(x_2)$, das heißt f ist streng monoton fallend.

Begründung *(Aufklapptext)*

Rechnerisch gilt für $x_1 < x_2$:

Rechnerisch prüfen wir nach, ob aus $x_1 < x_2$ auch wirklich immer $f(x_1) < f(x_2)$ folgt. Hierfür formen wir zuerst die zu zeigende Ungleichung wie folgt um:

$$\begin{aligned} & f(x_2) < f(x_1) && | -f(x_1) \\ \Leftrightarrow \quad & f(x_2) - f(x_1) < 0 && | f(x) = x^2 \text{ einsetzen} \\ \Leftrightarrow \quad & x_2^2 - x_1^2 < 0 && | \text{ 3. binomische Formel} \\ \Leftrightarrow \quad & (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) < 0 \end{aligned}$$

Die Ungleichung stimmt, da $x_2 - x_1 > 0$ und $x_2 + x_1 < 0$ sind und damit auch ihr Produkt negativ ist, wenn $x_1 < x_2$ gilt. Wir haben also insgesamt gezeigt, dass $f(x_1) > f(x_2)$ für alle $x_1 < x_2$ gilt.

Die Funktion ist also auf dem Intervall $]-\infty, 0[$ streng monoton fallend und auf dem Intervall $]0, \infty[$ streng monoton steigend.

4. Lokale und globale Extrema

Die Berechnung von Extrempunkten - also von Hoch- und Tiefpunkten - ist einer der zentralen Themen jeder Kurvendiskussion. **Lokale Extrema** sind folgendermaßen definiert:

Definition 4:
Sei $D \subset \mathbb{R}$. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann hat f an der Stelle $x_e \in D$ ein **lokales Minimum** (bzw. **lokales Maximum**), falls es ein offenes Intervall $I \subset D$ gibt, sodass $x_e \in I$ und $f(x_e) \leq f(x)$ (bzw. $f(x_e) \geq f(x)$) für alle $x \in I$ ist.

Diese präzise Formulierung drückt lediglich aus, dass die Funktionswerte für alle x, die „nahe genug“ an dem lokalen Maximum x_e liegen, kleiner oder gleich dem Funktionswert in $f(x_e)$ sind. Analog müssen die Funktionswerte für alle x, die „nahe genug“ am Minimum x_e liegen, größer oder gleich dem Funktionswert in $f(x_e)$ sein.

Eine ähnliche Definition gilt für globale Extrema, also die Stellen, an denen eine Funktion ihren **insgesamt** größten bzw. kleinsten Funktionswert annimmt:

Definition 5:
Sei $D \subset \mathbb{R}$. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann hat f an der Stelle $x_e \in D$ ein **globales Minimum** (bzw. **globales Maximum**), falls $f(x_e) \leq f(x)$ (bzw. $f(x_e) \geq f(x)$) für alle $x \in D$ ist.

Meist benutzt man die Differentialrechnung (Ableitungen der Funktion), um Extrema zu bestimmen. Diese Herangehensweise wird im Kurs *Differentialrechnung* ausführlich beschrieben.

Bei den Polynomfunktionen, mit denen wir uns in diesem Kurs beschäftigen, kann man sich anhand von Graphen Folgendes überlegen:

- Lineare Funktionen, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind, besitzen keine Extremstellen.



Bild 9

- Quadratische Funktionen besitzen entweder einen Hoch- oder einen Tiefpunkt, der sich im Scheitelpunkt der Parabel befindet, falls dieser Punkt nicht durch die Wahl des Definitionsbereiches ausgeschlossen ist.

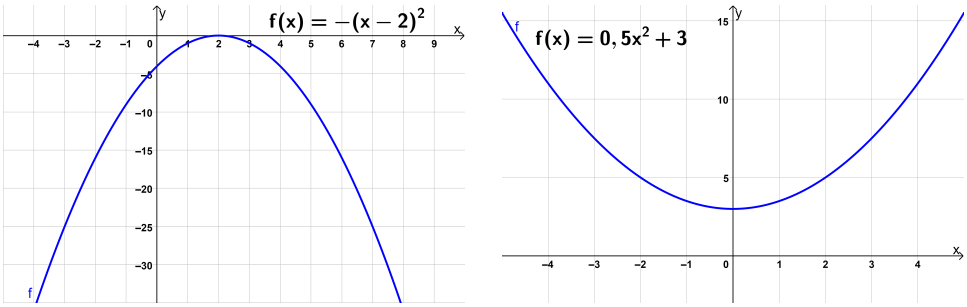


Bild 10

- Polynomfunktionen höheren Grades können mehrere oder auch gar keine Hoch- und Tiefpunkte besitzen.

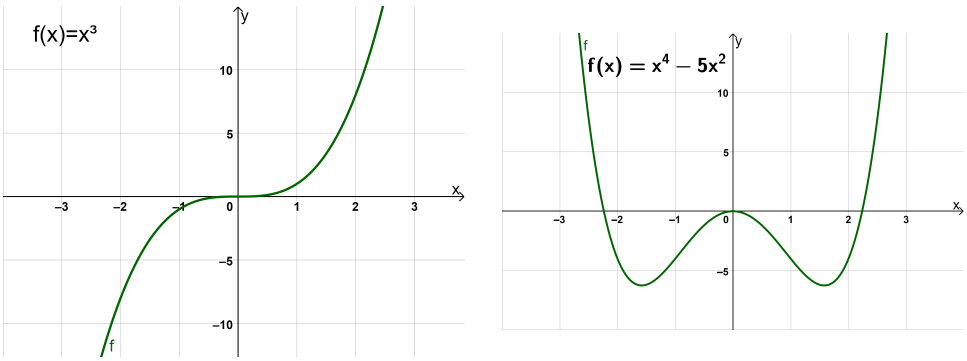


Bild 11

Aufgaben

Eine Reihe von Aufgaben zu Maxima und Minima sind im Kurs *Differentialrechnung* enthalten.

Aufgabe 2:
Was gilt für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x - 18$?

- ☐ Sie ist weder monoton steigend noch monoton fallend.
- ☐ Sie ist monoton steigend.
- ☐ Sie ist streng monoton steigend.
- ☐ Sie ist monoton fallend.
- ☐ Sie ist streng monoton fallend.

Lösung:

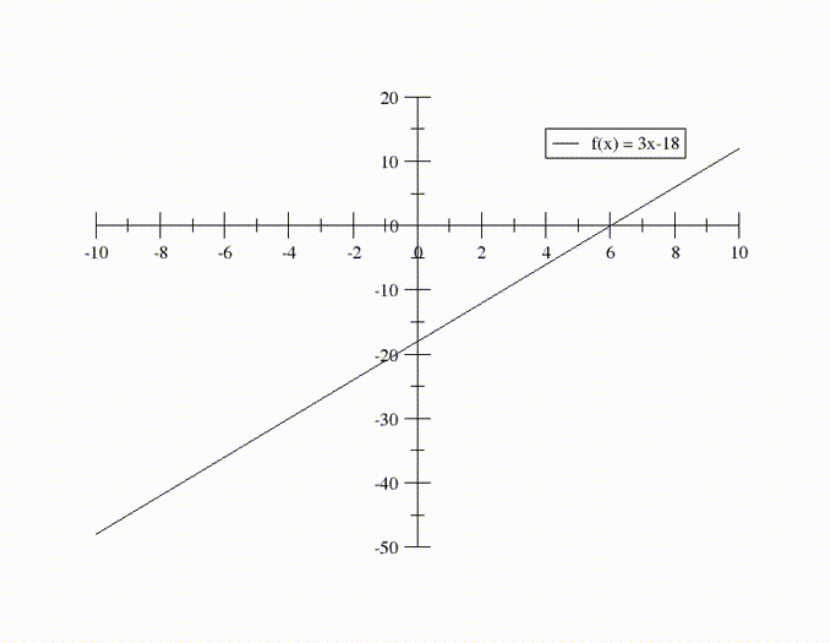


Bild 12

Der Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x - 18$ ist eine Gerade mit positiver Steigung $m = 3$ und Achsenabschnitt bei $f(0) = -18$.

Sie ist daher anschaulich gesehen streng monoton steigend. Streng monoton steigend beinhaltet laut Definition immer auch monoton steigend.

Rechnerisch gilt für $x_1 < x_2$:

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= 3x_2 - 18 - (3x_1 - 18) \\ &= 3 \cdot (x_2 - x_1) > 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 3:
Nutzen Sie Ihr Wissen über quadratische Funktionen, um zur Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -0,9 \cdot (x-4)^2 + 1$ eine Kurvendiskussion zu erstellen, die folgende Punkte beinhaltet:

- Schnittpunkte mit den Achsen des Koordinatensystems
- Symmetrien bezüglich des Koordinatensystems
- Monotonie
- Lokale und globale Extrema

Lösung:

- Schnittpunkte mit den Achsen des Koordinatensystems:

  Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$\begin{aligned} f(0) &= -0,9 \cdot (0-4)^2 + 1 \\ &= -0,9 \cdot 16 + 1 \\ &= -13,4, \end{aligned}$$

  der Schnittpunkt mit der y-Achse lautet also $(0; 13,4)$.

  Schnittpunkte mit der x-Achse:

$$\begin{aligned} f(x) = -0,9 \cdot (x-4)^2 + 1 &= 0 \\ -0,9 \cdot (x-4)^2 &= -1 \\ (x-4)^2 &= \frac{10}{9} \\ x-4 &= \pm\sqrt{\frac{10}{9}} \\ x &= \pm\sqrt{\frac{10}{9}} + 4. \end{aligned}$$

  Es ergeben sich also zwei Nullstellen mit der x-Achse: $x_1 = \sqrt{\frac{10}{9}} + 4 \approx 5,054$ und $x_2 = -\sqrt{\frac{10}{9}} + 4 \approx 2,946$.

  Die Schnittpunkte sind also $(0; -13.4)$, $(5,054; 0)$ und $(2,946; 0)$.

- Symmetrien zu den Koordinatenachsen:

  Man kann leicht nachrechnen, dass weder $f(-x)$ noch $-f(-x)$ das gleiche ergibt wie $f(x)$, indem man die Klammer auflöst und vergleicht:

$$\begin{aligned} f(x) &= -0,9 \cdot (x-4)^2 + 1 \\ &= -0,9 \cdot (x^2 - 8x + 16) + 1 \\ &= -0,9x^2 + 7,2x - 13,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= -0,9 \cdot (-x-4)^2 + 1 \\ &= -0,9 \cdot ((-1) \cdot (x+4))^2 + 1 \\ &= -0,9 \cdot (-1)^2 \cdot (x+4)^2 + 1 \\ &= -0,9 \cdot (x^2 + 8x + 16) + 1 \\ &= -0,9x^2 - 7,2x - 13,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -f(-x) &= (-1) \cdot (-0,9x^2 - 7,2x - 13,4) \\ &= 0,9x^2 + 7,2x + 13,4 \end{aligned}$$

Man findet also weder eine Symmetrie zur y-Achse noch zum Ursprung des Koordinatensystems. Dass keine Symmetrie zur y-Achse vorliegt, kann man auch direkt an der Scheitelpunktform der Parabelgleichung ablesen: Der Term $(x-4)$ führt dazu, dass der Scheitelpunkt bei $x=4$ liegt, also nicht auf der y-Achse. Punktsymmetrisch sind Parabeln ebenfalls nicht.

- Monotonie

  An der Scheitelpunktform der Parabelgleichung $f(x) = -0,9 \cdot (x-4)^2 + 1$ kann man einiges ablesen: Der Scheitelpunkt liegt bei $(4,1)$, die Parabel ist leicht gestaucht (zu erkennen am Vorfaktor $-0,9$) und nach unten geöffnet (zu erkennen am Vorzeichen des Vorfaktors: $-0,9$).

  Die Funktion $f(x)$ ist daher bis zum Scheitelpunkt, also auf dem Intervall $]-\infty, 4[$, streng monoton steigend (aufgrund ihrer Öffnung nach unten) und ab dem Scheitelpunkt, also auf dem Intervall $]4, \infty[$, streng monoton fallend.

- Lokale und globale Extrema

  Wie schon erwähnt, kann man den Scheitelpunkt direkt ablesen als $(4;1)$. Da die Parabel nach unten geöffnet ist, handelt es sich hierbei um ein globales Maximum.

  Globale oder lokale Minima besitzt die Parabel nicht, da sie auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist und ihre Funktionswerte immer weiter sinken, wenn x gegen $\pm\infty$ strebt.

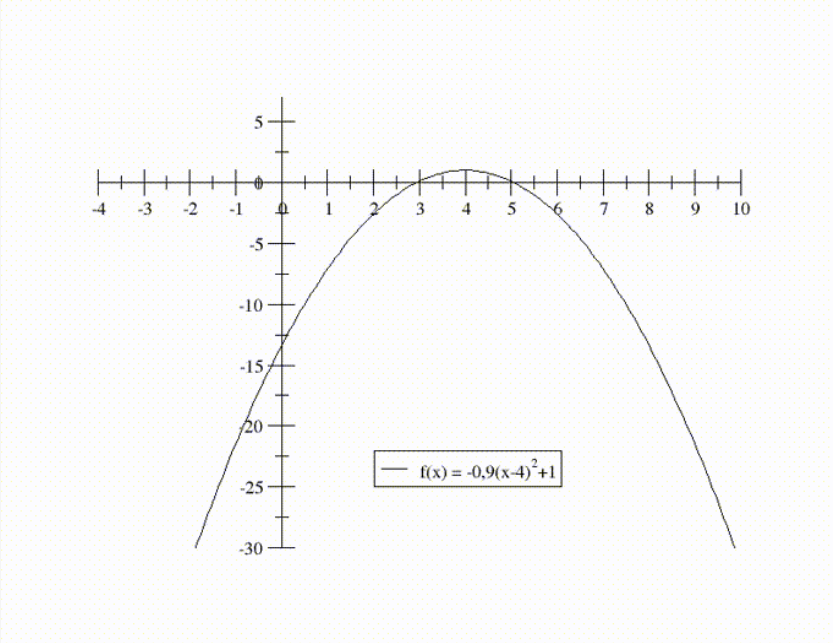


Bild 13

Anwendung

In vielen praktischen Anwendungen erh"alt man die zu untersuchende Funktion durch die Modellierung eines realen Problems. Wie bereits in der „Hinf"uhrung“ angedeutet ist man zumeist nicht an einer umfassenden Untersuchung der Funktion interessiert, sondern m"ochte nur bei der Modellbildung entstehende Fragen an die Funktion beantworten.

In vielen F"allen versucht man Maxima oder Minima einer Modellfunktion zu bestimmen. Anwendungsbeispiele mit dieser Fragestellung sind im Kurs *Differentialrechnung* zu finden.

An dieser Stelle m"ochten wir alle in diesem Kapitel aufgeführten Punkte anhand der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2(x+1)^2 - 4$ veranschaulichen. Wir greifen dabei auf das Wissen über quadratische Funktionen zurück, das im vorangehenden Teil dieses Kurses vermittelt wird.

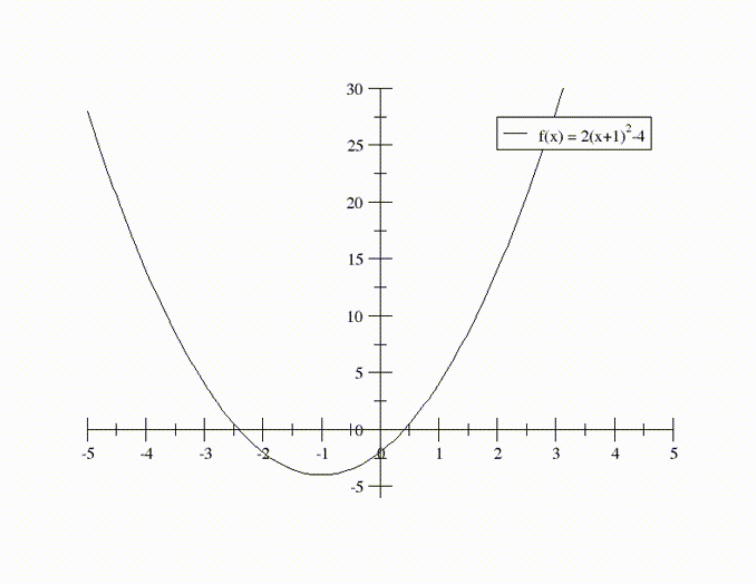


Bild 14

- Schnittpunkte mit den Achsen des Koordinatensystems:

  Schnittpunkt mit der y-Achse:
  $f(0) = 2 \cdot (0+1)^2 - 4 = 2 \cdot 1 - 4 = -2$
  Das heißt, der Schnittpunkt mit der y-Achse ist $(0; -2)$.

  Schnittpunkte mit der x-Achse:

$$\begin{aligned} f(x) = 2 \cdot (x+1)^2 - 4 &= 0 && \mid +4 \\ 2 \cdot (x+1)^2 &= 4 && \mid :2 \\ (x+1)^2 &= 2 && \mid \sqrt{\ } \\ x + 1 &= \pm\sqrt{2} && \mid -1 \\ x &= \pm\sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

  Es ergeben sich also zwei Schnittpunkte mit der x-Achse: $x_1 = \sqrt{2} - 1 \approx 0,414$ und $x_2 = -\sqrt{2} - 1 \approx -2,414$.

  Die Schnittpunkte sind also $(0; -2)$, $(0,414; 0)$ und $(2,414; 0)$.

- Symmetrien bezüglich Koordinatenachsen:

  Man kann leicht nachrechnen, dass weder $f(-x)$ noch $-f(-x)$ das gleiche ergibt wie $f(x)$, indem man die Klammer auflöst und die Koeffizienten der Terme vergleicht:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \cdot (x+1)^2 - 4 \\ &= 2 \cdot (x^2 + 2x + 1) - 4 \\ &= 2x^2 + 4x - 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2 \cdot (-x+1)^2 - 4 \\ &= 2 \cdot (1-x)^2 - 4 \\ &= 2 \cdot (1 - 2x + x^2) - 4 \\ &= 2x^2 - 4x - 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -f(-x) &= (-1) \cdot (2x^2 - 4x - 2) \\ &= -2x^2 + 4x + 2. \end{aligned}$$

  Man findet also weder eine Symmetrie zur y-Achse noch zum Ursprung des Koordinatensystems. Dass keine Symmetrie zur y-Achse vorliegt, kann man auch direkt an der Scheitelpunktform der Parabelgleichung ablesen: Der Term $(x+1)$ führt dazu, dass der Scheitelpunkt bei $x = -1$ liegt, also nicht auf der y-Achse. Punktsymmetrisch sind Parabeln ebenfalls nicht.

- Monotonie

  An der Scheitelpunktform der Parabelgleichung $f(x) = 2 \cdot (x+1)^2 - 4$ kann man einiges ablesen: Der Scheitelpunkt liegt bei $(-1, -4)$ und die Parabel ist nach oben geöffnet (zu erkennen am Vorzeichen des Vorfaktors: $+2$).

  Die Funktion $f(x)$ ist daher bis zum Scheitelpunkt, also auf dem Intervall $]-\infty, -1[$, streng monoton fallend und ab dem Scheitelpunkt, also auf dem Intervall $]-1, \infty[$, streng monoton steigend.

- Lokale und globale Extrema

  Wie schon erwähnt, kann man den Scheitelpunkt direkt ablesen als $(-1; -4)$. Da die Parabel nach oben geöffnet ist, handelt es sich hierbei um ein globales Minimum.

  Globale oder lokale Maxima besitzt die Parabel nicht, da sie auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist und ihre Funktionswerte immer weiter steigen, wenn x gegen $\pm\infty$ strebt.