UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Virtuelles Eingangstutorium
studiVEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn
FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Virtuelles Eingangstutorium
VEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

khdm
kompetenzzentrum
hochschuldidaktik
mathematik

LE 7 - Trigonometrie

7.0 Intro Trigonometrie

Im Folgenden finden Sie die Abschnitte:

Einstiegsaufgabe ..... S. 2
Sinus, Cosinus und Tangens bei rechtwinkligen Dreiecken ..... S. 8
Bestimmung von Seitenl"angen im rechtwinkligen Dreieck ..... S. 9
Winkelberechnung im rechtwinkligen Dreieck ..... S. 13
Ausblick ..... S. 16

Willkommen!

In der Kurzversion dieser Lerneinheit werden wir uns mit folgenden Themen besch"aftigen:

- Sinus, Cosinus und Tangens bei rechtwinkligen Dreiecken
- Bestimmung von Seitenl"angen im rechtwinkligen Dreieck
- Bestimmung von Winkeln im rechtwinkligen Dreieck

Die mathematischen Inhalte in diesem Kurs sind in eine Einstiegsaufgabe eingebettet.

Info 1:

Bemerkung:
Es gibt zwei verschiedene Möglichkeiten Winkel anzugeben. Zunächst betrachten wir Winkel immer im
textbfGradmaß, aslo zum Beispiel $\alpha = 45°$. Im Kapitel
textbfTrigonometrie am Einheitskreis lernen wir zusätzlich das Bogenmaß kennen. Wenn nicht anders angegeben, wird aus dem Kontext klar, welches Maß benutzt wird. Allgemein wird im geometrischen Kontext das Winkelmaß und im analytischen Kontext das Bogenmaß verwendet. Beim Rechnen mit Taschenrechner muss darauf geachtet werden, um welches Maß es sich handelt. Zum einen wird mit einem solchen Buchstabe eine Seite bezeichnet. So heißt die Strecke zwischen A und B hier c. Zum anderen wird mit den kleinen Buchstaben auch die jeweilige Länge der Seite bezeichnet. Demnach ist c auch die Länge der Strecke zwischen den Punkten A und B. Ob die Länge einer Seite oder die Seite an sich gemeint ist wird aus dem jeweiligen Kontext klar. In Formeln wird ausschließlich die Länge verwendet und auf die Ma"seinheiten verzichtet.

Einstiegsaufgabe

Ein 20 m hoher Baum ist in Richtung der Sonne geneigt und schließt mit dem Boden einen Winkel von 80° ein. Der Baum wirft einen Schatten von 10 m L"ange.

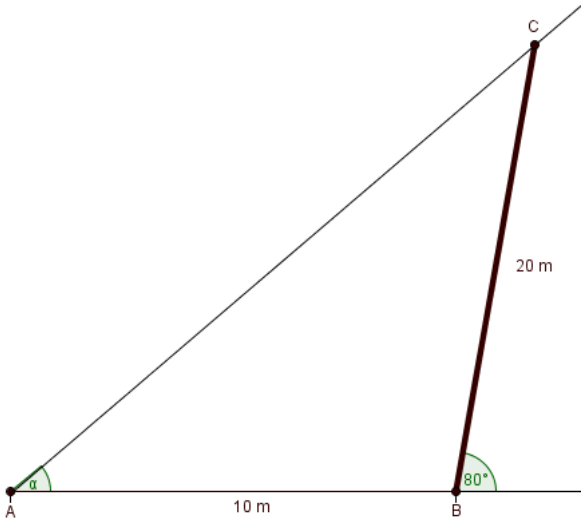


Bild 1 Eine Skizze zur beschriebenen Situation (nicht ma"sstabsgetreu)

Berechnen Sie den Winkel α, den die Sonnenstrahlen mit dem Boden einschlie"sen auf zwei Nachkommastellen genau. Verwenden Sie bei Ihren Berechnungen die Angaben aus der Skizze.

Zur L"osung dieser Aufgabe sollen Sie in jedem Schritt mit rechtwinkligen Dreiecken arbeiten. In diesen kann man die L"angen der Seiten und Gr"oßen der Winkel mithilfe von Gleichungen bestimmen. Schauen Sie sich dazu bitte zun"achst

Sinus, Cosinus und Tangens bei rechtwinkligen Dreiecken

an.

Wenn Sie sich noch einmal Bild 1 anschauen, ist bisher kein rechtwinkliges Dreieck zu erkennen. Durch geschickt eingezeichnete Hilfslinien kann man solche rechtwinkligen Dreieck erzeugen.
Wir f"uhren das Lot, was einer senkrechten Strecke zwischen einem Punkt und einer Geraden beschreibt, vom Punkt C auf die waagerechte Strecke zwischen Punkt A und B.

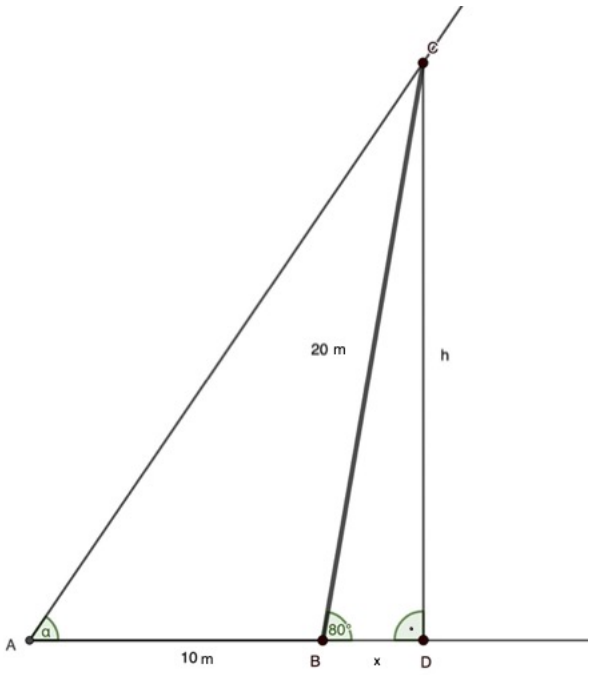


Bild 2 Das Lot h erzeugt zwei rechtwinklige Dreiecke ADC und BDC und stellt in dem Beispiel den Abstand von der Baumspitze zum Boden dar.

Zur Bestimmung der Gr"oße des Winkels α wird nun folgender Plan aufgestellt:

1. Die L"angen x und h kann man im Dreieck BDC berechnen, da alle Winkel und eine Seitenl"ange bekannt sind.

2. Im Dreieck ADC gilt
$$\tan(\alpha) = \frac{h}{10 + x}$$
Wenn h und x berechnet sind, kann man α berechnen.
In dem rechtwinkligen Dreieck BDC sind nun genug Angaben zu finden, um die L"ange der Hilfslinie h mit einer Gleichung zu bestimmen.

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie die L"ange der Hilfslinie h auf zwei Nachkommastellen genau und geben Sie an, welche Gleichung Sie verwendet haben.
Die L"ange der eingezeichneten Hilfslinie h betr"agt $h =$? m.
Zur L"osung der Aufgabe wurde die Gleichung des

- ☐ Sinus
- ☐ Cosinus
- ☐ Tangens

verwendet.

Lösung:

In dem rechtwinkligen Dreieck BDC sind die Gr"oßen aller Winkel und die L"ange der Hypotenuse bekannt. Aus diesen Angaben kann die L"ange der Hilfslinie h mithilfe des **Sinus** des Winkels $80°$ bestimmt werden.

$$\sin(80°) = \frac{h}{20}$$

. Durch Umstellen der Gleichung nach h erh"alt man

$$h = 20 \cdot \sin(80°) \approx 20 \cdot 0,98 = 19,60 \ .$$

Die L"ange der Hilfslinie h betr"agt somit $19,60$ m.

Wenn man nicht direkt rundet, erhält man

$$h = 20 \cdot \sin(80°) \approx 19,70 \ .$$

Im Folgenden wird mit dem Wert $19,60$m weitergerechnet.

Bemerkung

Wenn Sie Werte f"ur Sinus, Cosinus und Tangens mit dem Taschenrechner bestimmen wollen, muss dieser bei Winkelangaben auf Grad (Deg) einstellt werden.

Weitere Informationen zur Bestimmung von L"angen mithilfe von Sinus, Cosinus und Tangens in rechtwinkligen Dreiecken erhalten Sie hier:

Bestimmung von Seitenl"angen im rechtwinkligen Dreieck

Die L"ange der Hilfslinie h betr"agt $19,60$ m. Es ergibt sich folgende neue Skizze:



Bild 3 Die L"ange der Hilfslinie h betr"agt $19,60$ m.

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie die L"ange der Seite x auf zwei Nachkommastellen genau und geben Sie an, welche Gleichung Sie verwendet haben.
Die L"ange der Seite x betr"agt $x =$? m.
Zur L"osung der Aufgabe wurde die Gleichung des

- ☐ Sinus
- ☐ Cosinus
- ☐ Tangens

verwendet.

Lösung:

Es soll die L"ange der Strecke x ermittelt werden. Es sind die L"ange der Hypotenuse und die Winkel im markierten Dreieck aus der Aufgabenstellung bekannt.
Es wird die L"ange der Ankathete zum Winkel $80°$ gesucht und dazu kann der **Cosinus** verwendet werden.

$$\cos(80°) = \frac{x}{20}$$

Durch Umstellen der Gleichung nach x ergibt sich

$$x = 20 \cdot \cos(80°) \approx 20 \cdot 0,17 = 3,40 \ .$$

Damit betr"agt die L"ange der Strecke x ungefähr $3,40$ m.

Wenn man nicht direkt rundet, erhält man

$$x = 20 \cdot \cos(80°) \approx 3,47m \ .$$

Im Folgenden wird mit dem Wert $3,40$m weitergerechnet.

Weitere Lösungsmöglichkeit:
Man kann auch den Tangens verwenden, wenn die Seite h aus der vorigen Aufgabe als bekannt vorausgesetzt wird. Dann erhalten wir

$$\tan(80°) = \frac{19,6}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{19,6}{\tan(80°)} \approx \frac{19,6}{5,67} \approx 3,47 \ .$$

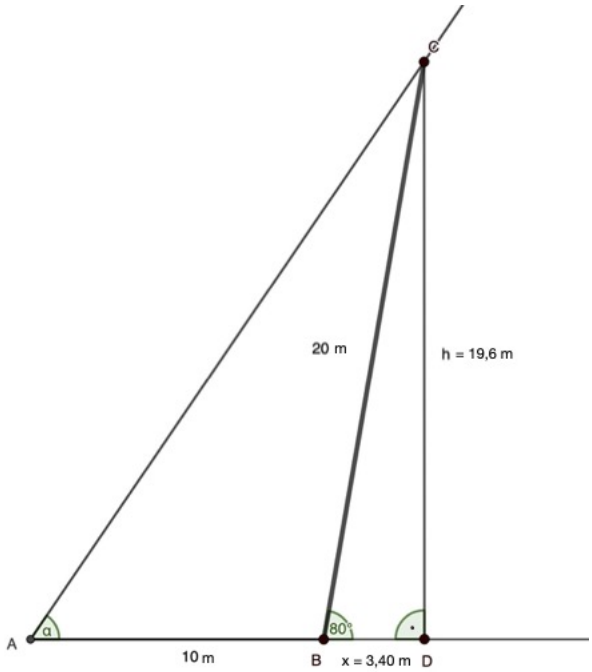


Bild 4 Alle ermittelten Werten wurden in das Bild eingetragen.

Die L"ange der gesamten unteren Seite ber"agt damit 13, 40 m.

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie die Gr"oße des Winkels α auf zwei Nachkommastellen genau und geben Sie an, welche Gleichung Sie verwendet haben.
Die Gr"oße des Winkels α betr"agt [?] °.
Zur L"osung der Aufgabe wurde die Gleichung des

- ☐ Sinus
- ☐ Cosinus
- ☐ Tangens

verwendet.

Lösung:

Aus der Skizze kann entnommen werden, dass die L"ange der Ankathete zu α, die L"ange der Gegenkathete zu α und ein Winkel bekannt sind. Um den Winkel α zu bestimmen, wird daher der **Tangens** verwendet. Es ergibt sich die folgende Gleichung

$$\tan(\alpha) = \frac{19,60}{13,40} \ .$$

Diese Gleichung wird nun nach α aufgel"ost durch die Umkehrung des Tangens, dem Arkustangens arctan, der auf dem Taschenrechner durch die Taste $\tan^{-1}$ dargestellt wird. Dadurch ergibt sich

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{19,6}{13,4}\right) = \tan^{-1}(1,46) \approx 55,59\ ^\circ \ .$$

Der Winkel α hat eine Gr"oße von $55,59°$.

Falls Sie zuvor die Werte $h = 19,70\text{m}$ und $x = 3,47\text{m}$ ermittelt haben, erhalten Sie als Lösung

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{19,7}{13,47}\right) \approx 55,63\ ^\circ \ .$$

Bemerkung
Bei der Verwendung von $\tan^{-1}$ werden Werte f"ur α zwischen $0°$ und $90°$ geliefert.

Der Winkel, den die Sonnenstrahlen mit dem Boden einschließen, betr"agt $\alpha = 55,59°$.
Weitere Informationen zur Bestimmung von Winkeln mithilfe von Sinus, Cosinus und Tangens in rechtwinkligen Dreiecken erhalten Sie hier:

Winkelberechnung im rechtwinkligen Dreieck

Was Sie in der ausführlichen Lerneinheit dieses Wissensbereichs erwartet, können Sie im Ausblick nachlesen:

Intro Trigonometrie

Sinus, Cosinus und Tangens bei rechtwinkligen Dreiecken

Die Trigonometrie besch"aftigt sich mit der Berechnung von Seitenl"angen und Winkeln im Dreieck aus drei gegebenen St"ucken. Dazu werden zun"achst einige Begriffe ben"otigt.
In einem beliebigen rechtwinkligen Dreieck mit einem gegebenen Winkel α bezeichnet man die Seiten wie folgt

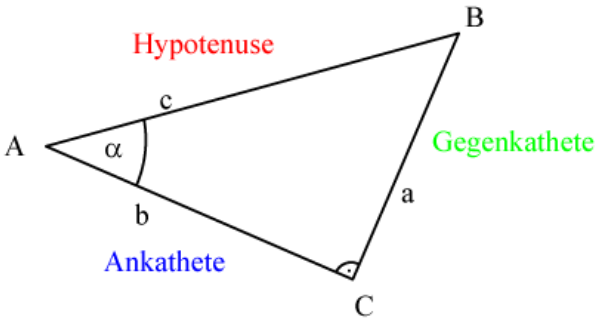


Bild 5 Bezeichnungen am rechtwinkligen Dreieck.

Im rechtwinkligen Dreieck wird die Seite, die dem rechten Winkel gegen"uber liegt als **Hypotenuse** bezeichnet. Die Seiten, die an dem rechten Winkel anliegen, heißen Katheten. Dabei liegt die **Ankathete** an den Winkel α an und die **Gegenkathete** liegt dem Winkel α gegen"uber.
Die Seitenlängen könne in einem Zusammenhang gebracht werden. Dafür definieren wir *sin*, *cos* und *tan* wie folgt:

Info 2:

In einem rechtwinkligen Dreieck mit gegebenem Winkel α mit $0° < \alpha < 90°$ definiert man die Verhältnisse der Seiten folgendermaßen:

Sinus: $\sin(\alpha) := \frac{\text{L"ange der Gegenkathete zu } \alpha}{\text{L"ange der Hypotenuse}}$

Cosinus: $\cos(\alpha) := \frac{\text{L"ange der Ankathete zu } \alpha}{\text{L"ange der Hypotenuse}}$

Tangens: $\tan(\alpha) := \frac{\text{L"ange der Gegenkathete zu } \alpha}{\text{L"ange der Ankathete zu } \alpha}$

Der Wert der Verh"altnisse ist nur von der Gr"oße des Winkels α, nicht aber von der Gr"oße des Dreiecks abh"angig. Dies wird ausf"uhrlich in der Langversion zur Trigonometrie mithilfe von Strahlens"atzen begr"undet. An dieser Stelle soll eine kurze Veranschaulichung geliefert werden:

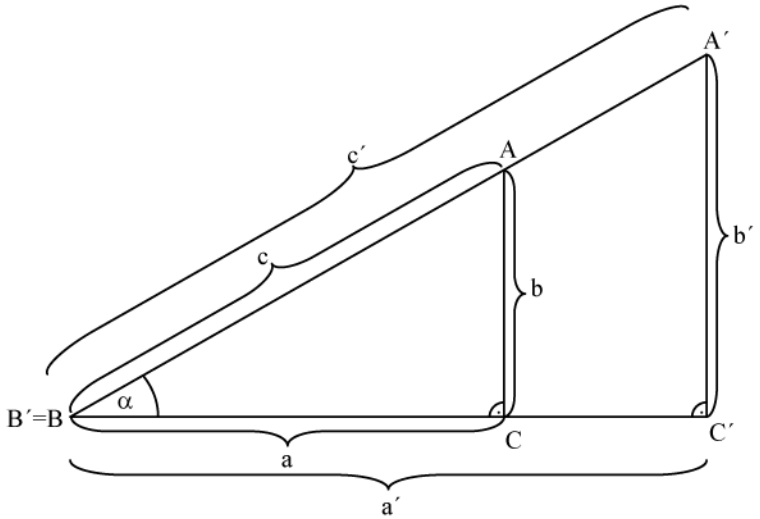


Bild 6

Aufgrund der Strahlensätze gilt

$$\boxed{\begin{aligned}\tan(\alpha) &= \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}\\ \sin(\alpha) &= \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}\\ \cos(\alpha) &= \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}\end{aligned}}$$

Dieser Zusammenhang l"asst sich auf die anderen Winkel β und γ "ubertragen, wenn sie nicht den rechten Winkel darstellen.

Intro Trigonometrie

Bestimmung von Seitenl"angen im rechtwinkligen Dreieck

Es gibt Tabellen, in denen wichtige Werte f"ur Sinus, Cosiuns und Tangens festgehalten sind. Hier wird nur ein Ausschnitt davon dargestellt.

α	$30°$	$45°$	$60°$
$\sin(\alpha)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan(\alpha)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

Wenn Sie Aufgabenstellungen der Trigonometrie l"osen, sollten Sie dazu einen Taschenrechner bereit legen, da die Werte f"ur Sinus, Cosinus und Tangens eines Winkels meist nicht im Kopf zu bestimmen sind.
Es werden nun Beispiele zur Berechnung von Seitenl"angen mithilfe von Sinus, Cosinus und Tangens angegeben.

Beispiel 1:

Gegeben sei das folgende rechtwinklige Dreieck:

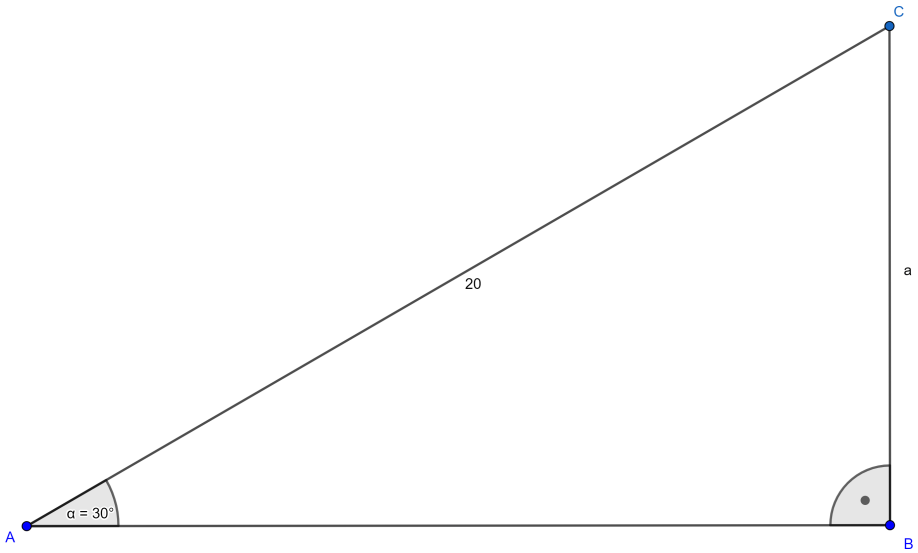


Bild 7

Es soll die L"ange der Gegenkathete a mithilfe der Angaben aus der Skizze bestimmt werden. Es sind die Gr"oße des Winkels α und die L"ange der Hypotenuse b bekannt, daher kann der Sinus zur Bestimmung der L"ange der Gegenkathete a verwendet werden.
Aus der Gleichung

$$\sin(30°) = \frac{a}{20}$$

kann durch Umstellen die Gleichung

$$a = 20 \cdot \sin(30°)$$

gewonnen werden. Aus der Tabelle kann der Wert f"ur $\sin(30°)$ entnommen und eingesetzt werden und es ergibt sich

$$a = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$$

. Damit ist die L"ange der Gegenkathete $a = 10$.

Beispiel 2:

Gegeben sei das folgende rechtwinklige Dreieck:

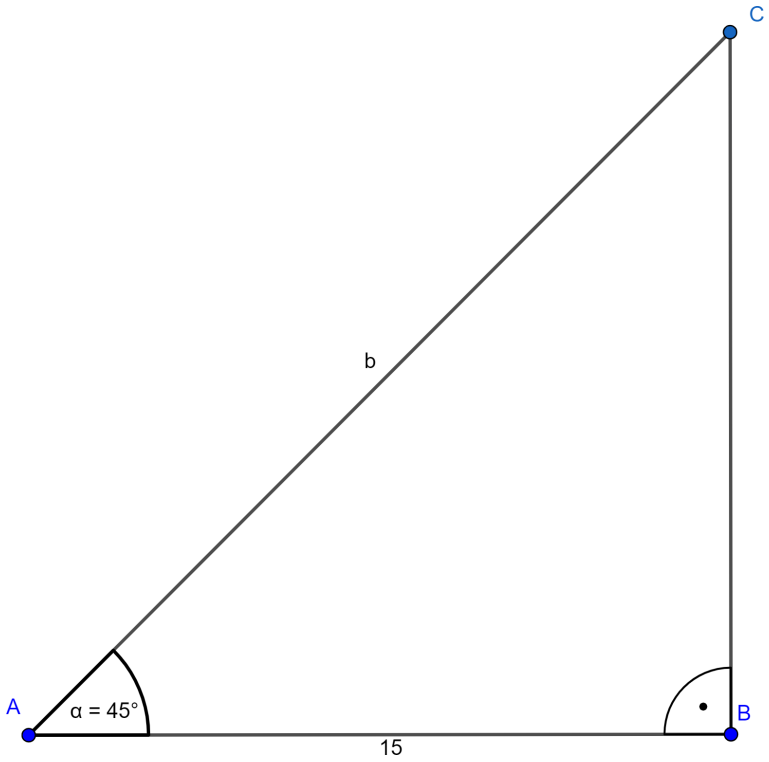


Bild 8

Es soll die L"ange der Hypotenuse b mithilfe der Angaben aus der Skizze bestimmt werden. Aus der Gleichung

$$\cos(45°) = \frac{15}{b}$$

kann durch Umstellen die Gleichung

$$b = \frac{15}{\cos(45°)}$$

gewonnen werden. Aus der Tabelle kann der Wert f"ur $\cos(45°)$ entnommen und eingesetzt werden und es ergibt sich

$$b = \frac{15}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 21,21$$

. Damit ist die L"ange der Hypotenuse $b \approx 21,21$.

Beispiel 3:

Gegeben sei das folgende rechtwinklige Dreieck:

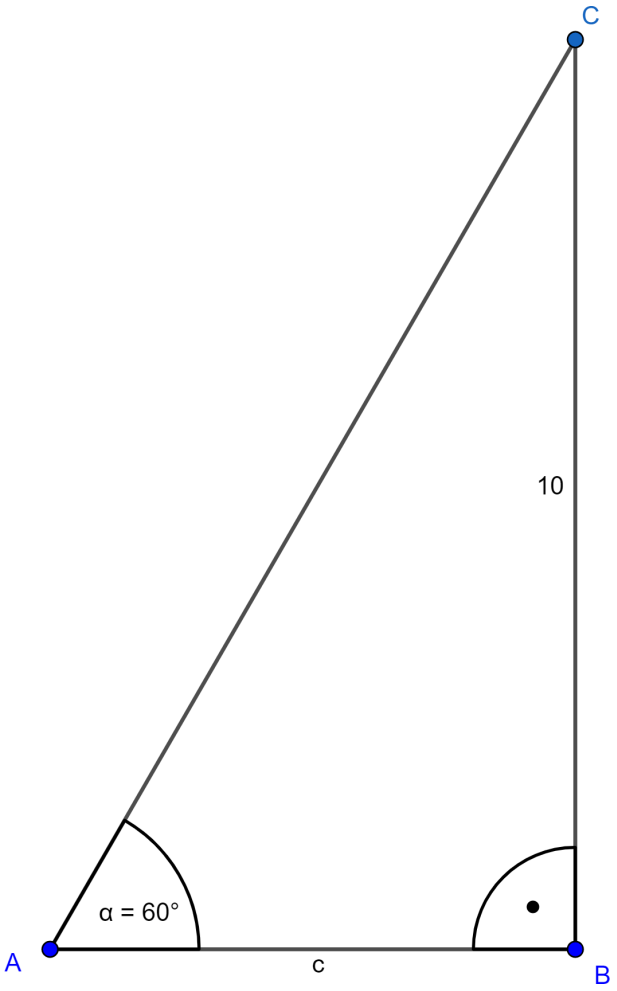


Bild 9

Es soll die L”ange der Ankathete c mithilfe der Angaben aus der Skizze bestimmt werden. Aus der Gleichung

$$\tan(60°) = \frac{10}{c}$$

kann durch Umstellen die Gleichung

$$c = \frac{10}{\tan(60°)}$$

gewonnen werden. Aus der Tabelle kann der Wert f”ur $\tan(60°)$ entnommen und eingesetzt werden und es ergibt sich

$$c = \frac{10}{\sqrt{3}} \approx 5,77$$

. Damit ist die L”ange der Hypotenuse $c \approx 5,77$.

Intro Trigonometrie

Winkelberechnung im rechtwinkligen Dreieck

Es wurde bereits thematisiert, wie die L"ange einer Seite im rechtwinkligen Dreieck mithilfe von Sinus, Cosinus und Tangens bestimmt werden kann. Nun wollen wir uns die Bestimmung fehlender Winkel im rechtwinkligen Dreieck anschauen. Dazu werden drei Beispiele betrachtet und das Vorgehen anschließend verallgemeinert. Dabei wird weniger auf die Theorie als auf Berechnung mit dem Taschenrechner eingegangen. Die Theorie wird in der Langversion zu diesem Wissensbereich beschrieben.

Beispiel 4:

Es sei folgendes Dreieck gegeben:

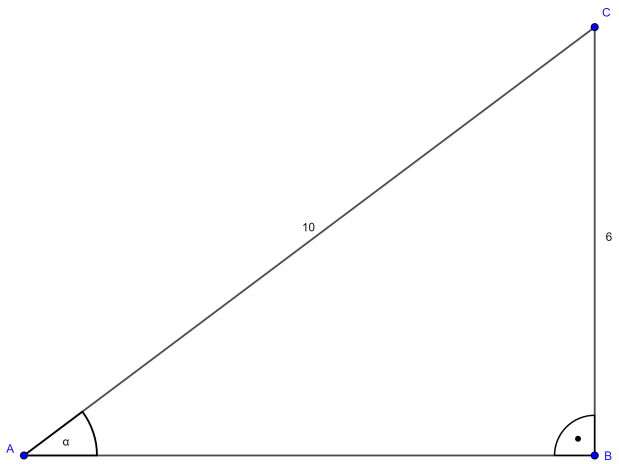


Bild 10

Es soll der Winkel α bestimmt werden. Es sind die L"angen von zwei Seiten und ein Winkel bekannt. Die beiden gegebenen Seiten sind die Hypotenuse und die Gegenkathete des Winkels α. Daher wird zur Bestimmung des Winkels die Gleichung des Sinus verwendet:

$$\sin(\alpha) = \frac{6}{10} = 0,6$$

Nun ist bekannt, welchen Wert $\sin(\alpha)$ annimmt. Wie erh"alt man daraus den Wert f"ur α? Auf dem Taschenrechner haben Sie eine Taste mit dem Symbol „$\sin^{-1}$“. Die Verwendung dieser Taste auf dem Taschenrechner l"asst sich in der obigen Gleichung folgendermaßen interpretieren:

$$\alpha = \sin^{-1}(0,6) \approx 36,87°$$

.

Wenn eine Gleichung mit Sinus nach dem Winkel aufgel"ost werden soll, wird die Taste „$\sin^{-1}$“ auf dem Taschenrechner verwendet. Es gilt

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \Leftrightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}\right).$$

Bemerkung

Der Sinus eines Winkels $0° < \alpha < 90°$ liegt zwischen 0 und 1, da die Hypotenuse immer

l"anger als beide der Katheten ist. Daher liegt der Wert von $\sin^{-1}\left(\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}\right)$ zwischen 0° und 90°.

Beispiel 5:

Es sei folgendes Dreieck gegeben:

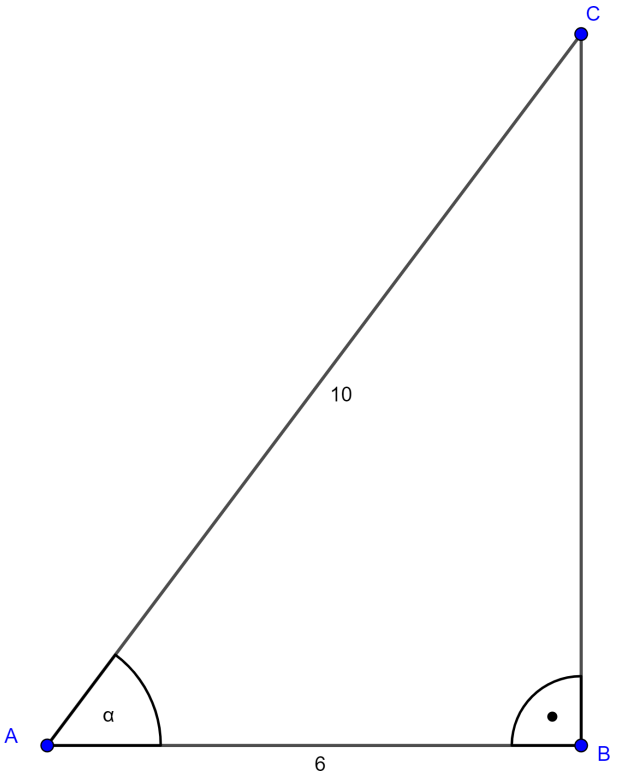


Bild 11

Es soll der Winkel α bestimmt werden. Es sind die L"angen von zwei Seiten und ein Winkel bekannt. Die beiden gegebenen Seiten sind die Hypotenuse und die Ankathete des Winkels α. Es gilt

$$\cos(\alpha) = \frac{6}{10} = 0,6$$

Nun ist bekannt, welchen Wert $\cos(\alpha)$ annimmt. Wie erh"alt man daraus den Wert f"ur α? Auf dem Taschenrechner haben Sie eine Taste mit dem Symbol „$\cos^{-1}$“. Die Verwendung dieser Taste auf dem Taschenrechner l"asst sich in der obigen Gleichung folgendermaßen interpretieren

$$\alpha = \cos^{-1}(0,6) = 53,13°$$

F"ur den Winkel α ergibt sich eine Gr"oße von $53,13°$.

Wenn eine Gleichung mit Cosinus nach dem Winkel aufgel"ost werden soll, wird die Taste „$\cos^{-1}$“ auf dem Taschenrechner verwendet. Es gilt

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}\right).$$

Bemerkung

Der Cosinus eines Winkels $0° < \alpha < 90°$ liegt zwischen 0 und 1, da die Hypotenuse immer l"anger ist als beide der Katheten. Daher liegt der Wert von $\cos^{-1}\left(\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}\right)$ zwischen 0° und 90°.

Beispiel 6:

Es sei folgendes Dreieck gegeben:

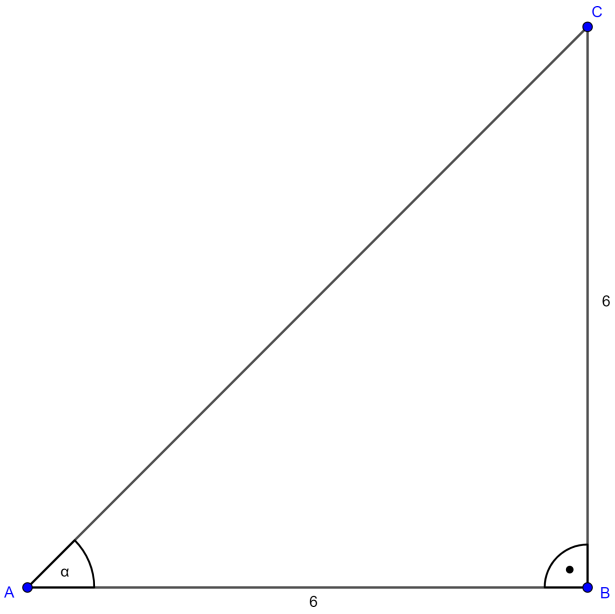


Bild 12

Es soll der Winkel α bestimmt werden. Es sind die L"angen von zwei Seiten und ein Winkel bekannt. Es gilt

$$\tan(\alpha) = \frac{6}{6} = 1$$

Nun ist bekannt, welchen Wert $\tan(\alpha)$ annimmt. Wie erh"alt man daraus den Wert f"ur α? Auf dem Taschenrechner haben Sie eine Taste mit dem Symbol „$\tan^{-1}$“. Die Verwendung dieser Taste auf dem Taschenrechner l"asst sich in der obigen Gleichung folgendermaßen interpretieren:

$$\alpha = \tan^{-1}(1) = 45°$$

. F"ur den Winkel α ergibt sich eine Gr"oße von 45°.

Wenn eine Verh"altnisgleichung des Tangens nach dem Winkel aufgel"ost werden soll, wird die Taste „$\tan^{-1}$“ auf dem Taschenrechner verwendet. Es gilt

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}\right).$$

Intro Trigonometrie

Ausblick

Folgende Themen werden in der Langversion dieses Kurses ausführlicher behandelt:

- Trigonometrie an rechtwinkligen Dreiecken,
- Trigonometrie am Einheitskreis und
- Erg"anzungen zur Trigonometrie.