UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Virtuelles Eingangstutorium
studiVEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn
FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Virtuelles Eingangstutorium
VEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

khdm
kompetenzzentrum
hochschuldidaktik
mathematik

LE 7 - Trigonometrie

7.1 Trigonometrie an rechtwinkligen Dreiecken

Im Folgenden finden Sie die Abschnitte:

Übersicht ..... S. 1
Hinführung ..... S. 2
Inhalte mit Erklärungen ..... S. 4
Aufgaben ..... S. 10
Anwendung ..... S. 20
Ergänzungen ..... S. 21

Übersicht

- Einf"uhrung von Sinus, Cosinus und Tangens am rechtwinkligen Dreieck
- Umstellen trigonometrischer Gleichungen zur Bestimmung von Seitenl"angen

---

Hinführung

In der Geometrie wird der Satz des Pythagoras thematisiert. Dieser ermöglicht die Bestimmung einer unbekannten Seitenlänge in rechtwinkligen Dreiecken, wenn die Längen der beiden anderen Seiten gegeben sind.

Info 1:

Achtung!

Im Folgenden kommen den **kleinen lateinischen Buchstaben** an den Seiten eines Dreiecks **zwei Bedeutungen** zu. Zum einen wird mit einem solchen Buchstabe eine Seite bezeichnet. So heißt die Strecke zwischen A und B hier c. Zum anderen wird mit den kleinen Buchstaben auch die jeweilige Länge der Seite bezeichnet. Demnach ist c auch die Länge der Strecke zwischen den Punkten A und B. Ob die Länge einer Seite oder die Seite an sich gemeint ist, wird aus dem jeweiligen Kontext klar. In Formeln wird ausschließlich die Länge verwendet und auf die Maßeinheiten verzichtet.

Beispiel 1:

Gegeben ist folgendes rechtwinkliges Dreieck:

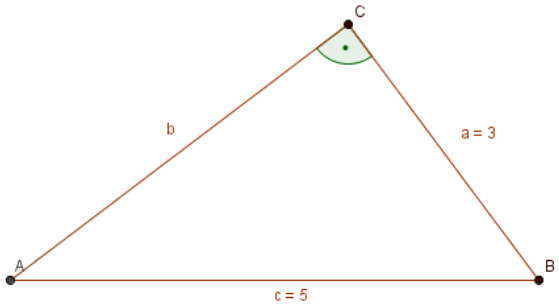


Bild 1 Rechtwinkliges Dreieck mit zwei bekannten Seitenlängen.

Die Längen der Seiten $a = 3$ cm und $c = 5$ cm sind bekannt. Mit dem Satz des Pythagoras lässt sich die Länge der unbekannten Seite b bestimmen:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow b = 4$$

Die Länge der Seite b beträgt 4 cm.

Mit dem Satz des Pythagoras lassen sich also Aufgaben in der Geometrie rund um das Thema Längenbestimmung im rechtwinkligen Dreieck lösen.
Wie sieht es dagegen aus, wenn eine Seitenlänge in einem rechtwinkligen Dreieck bestimmt werden soll, von dem die Länge **einer** anderen Seite und die Größe eines Winkels, der nicht der rechte Winkel ist, bekannt sind? Diese Situation wird in folgendem Bild anschaulich dargestellt:

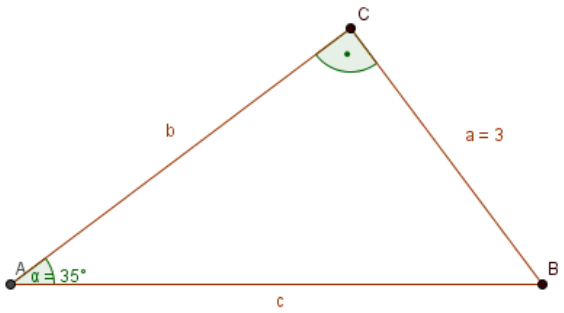


Bild 2 Rechtwinkliges Dreieck mit einer bekannten Seitenl"ange und einer bekannten Winkelgr"o"se.

An dieser Stelle kann der Satz des Pythagoras nicht zur Bestimmung der unbekannten Seitenl"angen verwendet werden, denn in diesem rechtwinkligen Dreieck sind zwei Seitenl"angen unbekannt.
Um dieses Problem dennoch l"osen zu k"onnen, wird der Zusammenhang zwischen Winkelgr"oßen und Verh"altnissen der Seitenl"angen betrachtet. Diese und weitere Problemstellungen fallen in das mathematische Themengebiet der „Trigonometrie“. Der Begriff „Trigonometrie“ stammt aus dem Griechischen und bedeutet „Dreiecksmessung“, womit jedoch weniger Messungen im eigentlichen Sinne, sondern vielmehr Berechnungen unbekannter Winkelgr"oßen und Seitenl"angen aus bekannten Winkelgr"oßen und Seitenl"angen in Dreiecken gemeint ist.

Inhalte mit Erklärungen

Info 2:

In einem rechtwinkligen Dreieck mit gegebenem Winkel α mit $0° < \alpha < 90°$ werden die Seiten wie folgt bezeichnet:

- Die Seite, die dem rechten Winkel gegen"uber liegt, wird als **Hypotenuse** bezeichnet.
- Die Seiten, die an dem rechten Winkel anliegen, werden als **Katheten** bezeichnet. Dabei liegt die **Ankathete** zum Winkel α am Winkel α an und die **Gegenkathete** zum Winkel α liegt dem Winkel α gegen"uber.

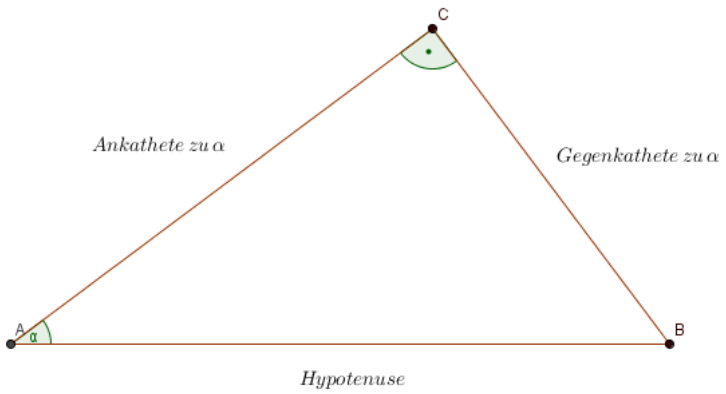


Bild 3 Bezeichnungen der Seiten im rechtwinkligen Dreieck

Wir geben den Verh"altnissen der Seitenl"angen im rechtwinkligen Dreieck Namen.

Definition 1:

In einem rechtwinkligen Dreieck mit gegebenem Winkel α mit $0° < \alpha < 90°$ definiert man die Verh"altnisse der Seiten folgendermaßen:

Sinus: $\sin(\alpha) := \frac{\text{L"ange der Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Länge der Hypotenuse}}$

, Cosinus: $\cos(\alpha) := \frac{\text{L"ange der Ankathete zu } \alpha}{\text{L"ange der Hypotenuse}}$

, Tangens: $\tan(\alpha) := \frac{\text{L"ange der Gegenkathete zu } \alpha}{\text{L"ange der Ankathete zu } \alpha}$

.

Eine zentrale Erkenntnis besteht darin, dass die Verh"altnisse nur vom Winkel α, nicht aber von den Abmessungen des Dreiecks abh"angig sind.

Verweis *(Aufklapptext)*

Falls Sie weitere Informationen zu den Strahlens"atzen ben"otigen, schauen Sie bitte zun"achst in die Lerneinheit Strahlens"atze im Wissensgebiet Geometrie: https://moodle.math.uni-paderborn.de/course/view.php?id=34

Mathematische Begr"undung
Betrachtet wird die folgende Abbildung:

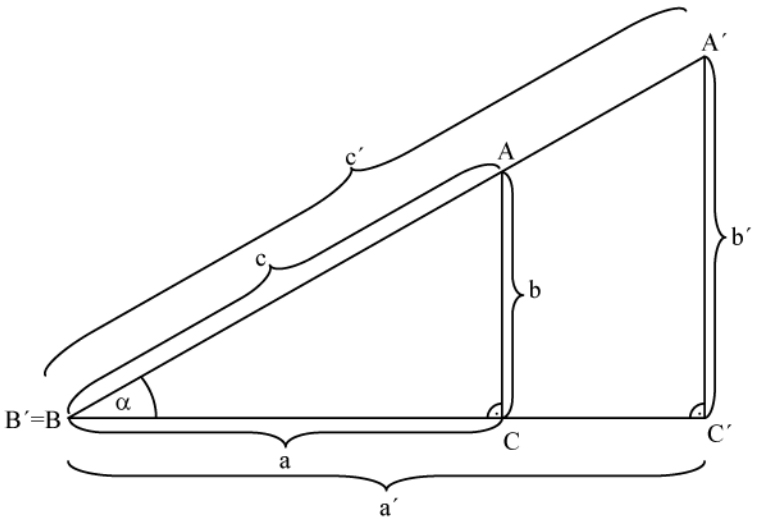


Bild 4 Anordnung von zwei rechtwinkligen Dreiecken zu einer Strahlensatzfigur

Mithilfe der Strahlens"atze lassen sich folgende Beobachtungen machen:

1. Mit dem zweiten Strahlensatz gilt
$$\frac{c}{b} = \frac{c'}{b'} \text{ und } \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} .$$
Es l"asst sich feststellen, dass in beiden rechtwinkligen Dreiecken die L"angenverh"altnisse aus den Seiten c, b und c', b' bzw. a, b und a', b' "ubereinstimmen.
Wegen $\sin(\alpha) = \frac{b}{c}$ und $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$ gilt auch $\sin(\alpha) = \frac{b'}{c'}$. Der Wert des Sinus ist nur von der Gr"o"se des Winkels α und nicht von den Seitenl"angen abh"angig.
Au"serdem gilt $\tan(\alpha) = \frac{b}{a}$ und $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$. Demnach also auch $\tan(\alpha) = \frac{b'}{a'}$. Damit ist der Wert des Tangens ebenfalls nur von der Gr"o"se des Winkels α abh"angig.

2. Mit dem ersten Strahlensatz gilt
$$\frac{a}{a'} = \frac{c}{c'} .$$
Multiplikation beider Seiten mit a' liefert
$$a = \frac{c \cdot a'}{c'} .$$
Division beider Seiten durch c ergibt schließlich
$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} .$$
Auch hier stimmt in beiden rechtwinkligen Dreiecken das L"angenverh"altnis der Seiten a, c und a', c' "uberein.
Wegen $\cos(\alpha) = \frac{a}{c}$ und $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$ gilt ebenfalls $\cos(\alpha) = \frac{a'}{c'}$. Der Wert des Cosinus h"angt also nur von der Gr"o"se des Winkels α ab.

Bemerkungen

In den Erg"anzungen weiter unten werden eine Beziehung zwischen Sinus und Cosinus sowie eine Beziehung zwischen Sinus, Cosinus und Tangens angef"uhrt und bewiesen.

Mithilfe dieser Gleichungen ist es nun m"oglich in einem rechtwinkligen Dreieck die unbekannten Seitenl"angen zu bestimmen, wenn eine Seitenl"ange und eine weitere Winkelgr"oße, au"ser dem rechten Winkel, gegeben ist.

In den Erg"anzungen finden Sie eine M"oglichkeit, wie bestimmte Sinus- und Cosinuswerte mithilfe von speziellen Dreiecken auch ohne Taschenrechner bestimmt werden k"onnen.

Es werden einige Beispiele angef"uhrt, um die unbekannten Seitenl"angen in einem rechtwinkligen Dreieck bestimmen zu k"onnen, wenn eine Seitenl"ange und die Gr"oße eines Winkels, der nicht der rechte Winkel ist, gegeben sind.

Beispiel 2:

Modellierung *(Aufklapptext)*

Frau Meier muss an ihrem Haus einen Teil der Dachrinne ausbessern. Um die Dachrinne zu erreichen, verwendet sie eine ausfahrbare Leiter, die in einem Winkel von 80° an das Haus gelehnt wird. Das Haus ist bis zur Dachrinne gemessen 4, 40 m hoch. Wie weit muss die Leiter ausgefahren werden, damit Frau Meier die Dachrinne ausbessern kann?
Zur mathematischen Modellierung dieser Situation wird ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet (nicht ma"sstabsgetreu):

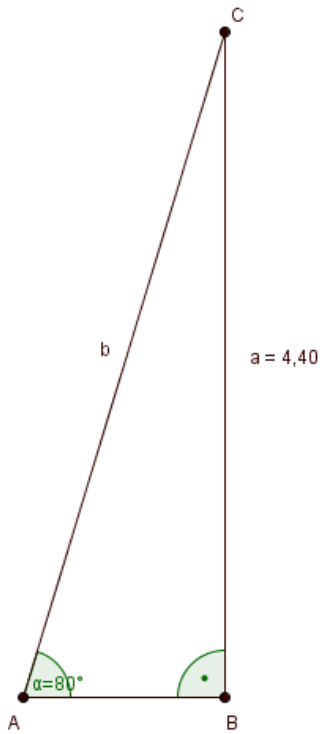


Bild 5 L"angenangaben in m.

Gesucht wird die L"ange der Hypotenuse b. Gegeben sind die Gr"oße des Winkels $\alpha = 80°$ und die Seitenl"ange der Gegenkathete zu α, welche hier $a = 4,40$ (Meter) entspricht.
Zur Berechnung kann der Sinus verwendet werden

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{L"ange der Gegenkathete zu } \alpha}{\text{L"ange der Hypotenuse}} = \frac{a}{b}$$

. In unserem Beispiel erhalten wir also

$$\sin(80°) = \frac{4,40}{b} \ .$$

Umstellen dieser Gleichung nach b ergibt:

$$b = \frac{4,40}{\sin(80°)}$$

. Mit einem Taschenrechner kann der Wert $\sin(80°) \approx 0,98$ berechnet werden. Dieser ist ungef"ahr $0,98$ und kann in die Gleichung eingef"ugt werden. Damit kann die L"ange der Hypotenuse bestimmt werden:

$$b \approx \frac{4,40}{0,98} \approx 4,49 \ .$$

L"osung der Anwendungsaufgabe *(Aufklapptext)*

Die Leiter muss auf eine L"ange von ungef"ahr $4,49$ m ausgefahren werden.

Beispiel 3:

Modellierung *(Aufklapptext)*

Die Zugbr"ucke einer alten Burg ist 6 m lang. Die Kette, die die Zugbr"ucke h"alt, und die Zugbr"ucke schließen einen Winkel von 40° ein. Wie lang muss die Kette, die die Zugbr"ucke h"alt, sein?
Zur mathematischen Modellierung dieser Situation wird ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet:

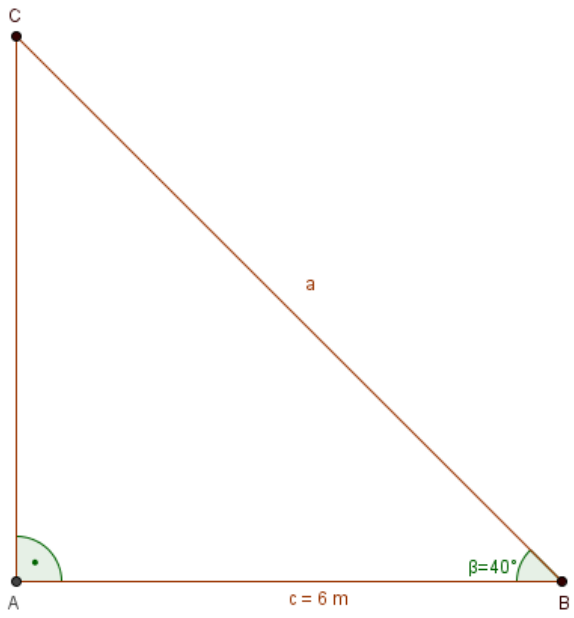


Bild 6 L"angenangaben in m.

Gesucht wird die L"ange der Hypotenuse a. Gegeben sind die Gr"oße des Winkels $\beta = 40°$ und die Seitenl"ange der Ankathete zu β, welche hier $c = 6$ Meter entspricht.
Es gilt

$$\cos(\beta) = \frac{\text{L"ange der Ankathete zu } \beta}{\text{L"ange der Hypotenuse}} = \frac{c}{a} .$$

Wenn nun die Angaben aus der Aufgabe eingesetzt werden, ergibt sich

$$\cos(40°) = \frac{6}{a} .$$

Umstellen dieser Gleichung nach a ergibt

$$a = \frac{6}{\cos(40°)} .$$

Mit einem Taschenrechner kann der Wert $\cos(40°)$ berechnet werden. Dieser ist ungef"ahr $0,77$. Damit kann die L"ange der Hypotenuse bestimmt werden.

$$a \approx \frac{6}{0,77} \approx 7,79.$$

L"osung der Anwendungsaufgabe *(Aufklapptext)*

Die Kette, die die Zugbr"ucke h"alt, muss ungef"ahr $7,79$ m lang sein.

Beispiel 4:

Modellierung *(Aufklapptext)*

Ein Heißluftballon schwebt in einer H"ohe von 125 m "uber dem Erdboden. Der Ballonfahrer sieht eine Ruine mithilfe eines Winkelmessers unter einem Winkel von 17° zur Horizontalen. Wie weit ist der Ballon horizontal gesehen von der Ruine entfernt?
Zur mathematischen Modellierung dieser Situation wird ein rechtwinkliges Dreieck angefertigt:

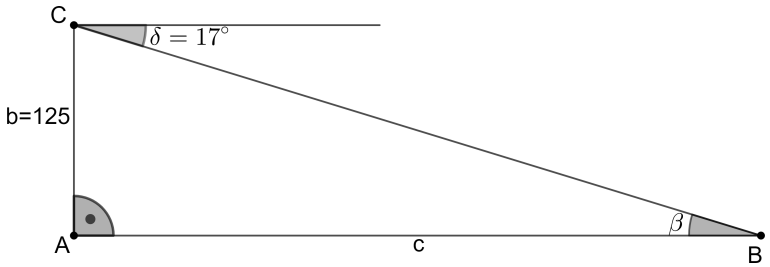


Bild 7 L"angenangaben in m.

Gesucht wird die L"ange der Ankathete c zum Winkel β. Der Winkel β ist der Wechselwinkel an Parallelen zu δ, also 17°. Gegeben ist außerdem die Seitenlänge $b = 125$ (in m) der Gegenkathete zu β. Es gilt

$$\tan(\beta) = \frac{\text{L"ange der Gegenkathete zu } \beta}{\text{L"ange der Ankathete zu } \beta} = \frac{b}{c}.$$

Durch Einsetzen ergibt sich

$$\tan(17°) = \frac{125}{c} \ .$$

Umstellen dieser Gleichung nach c ergibt

$$c = \frac{125}{\tan(17°)} \ .$$

Mit einem Taschenrechner kann der Wert $\tan(17°)$ berechnet werden. Dieser ist ungef"ahr $0,31$ und kann in die Gleichung eingef"ugt werden. Damit kann die L"ange der Hypotenuse bestimmt werden:

$$c = \frac{125}{0,31} \approx 403,2$$

L"osung der Anwendungsaufgabe *(Aufklapptext)*

Der Ballon ist horizontal gesehen ungef"ahr $403,23$ m von der Ruine entfernt.

Aufgaben

Aufgabe 1:
Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC sind folgende Angaben bekannt:

- $a = 4$ (in cm),
- $\beta = 90°$,
- $\alpha = 25°$.

Bestimmen Sie die L"ange der Seite b auf zwei Nachkommastellen genau.
Die L"ange der Seite b betr"agt ? cm.

Lösung:

Da bei Punkt B der rechte Winkel vorliegt, ist die gesuchte Seite b die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreieckes. In folgender Skizze sind alle gegebenen und gesuchten Angaben eingebunden:

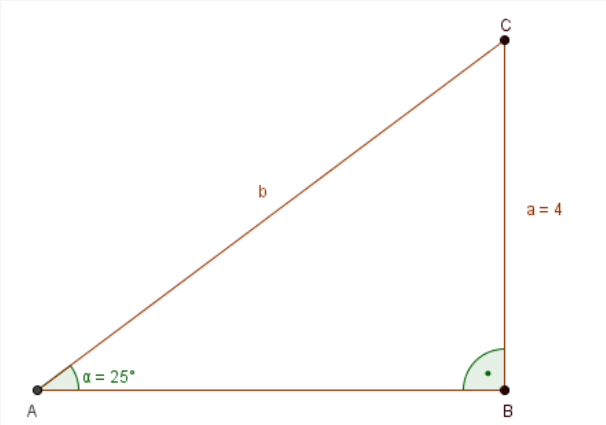


Bild 8 L"angenangaben in cm.

Die L"ange der Hypotenuse b kann mithilfe des Sinus bestimmt werden:

$$\sin(25°) = \frac{4}{b} \Leftrightarrow b = \frac{4}{\sin(25°)}$$

. Mit einem Taschenrechner l"asst sich der Wert $\sin(25°)$ bestimmen. Der Wert ist ungef"ahr $0,42$. Eingesetzt in die rechte obere Gleichung ergibt sich

$$b \approx \frac{4}{0,42} = 9,52$$

Falls Sie die Lösung direkt mit dem Taschenrechner ermitteln, erhalten Sie

$$b = \frac{4}{\sin(25°)} \approx 9,46$$

.

Aufgabe 2:
Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC sind folgende Angaben bekannt:

- $c = 6$ (in cm),
- $\gamma = 90°$,
- $\beta = 35°$.

Bestimmen Sie die L"ange der Seite a auf zwei Nachkommastellen genau.
Die L"ange der Seite a betr"agt $\boxed{?}$ cm.

Lösung:
Da bei Punkt C der rechte Winkel vorliegt, ist die gesuchte Seite a die Ankathete zum Winkel β. In folgender Skizze sind alle gegebenen und gesuchten Angaben eingebunden:

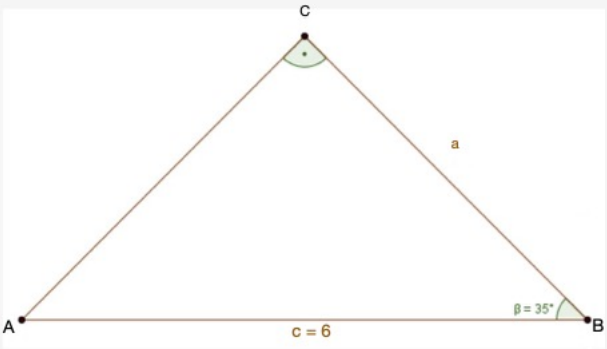


Bild 9 L"angenangaben in *cm*.

Die L"ange der Ankathete a zum Winkel β kann mithilfe des Cosinus bestimmt werden:

$$\cos(35°) = \frac{a}{6} \Leftrightarrow a = \cos(35°) \cdot 6 \ .$$

Falls Sie direkt die Lösung mit dem Taschenrechner ermitteln, erhalten Sie

$$a = \cos(35°) \cdot 6 \approx 4,91 \ .$$

Aufgabe 3:
Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC sind folgende Angaben bekannt:

- $b = 5$ (in cm),
- $\alpha = 90°$,
- $\gamma = 20°$.

Bestimmen Sie die L"ange der Seite c auf zwei Nachkommastellen genau.
Die L"ange der Seite c betr"agt $\boxed{?}$ cm.

Lösung:

Da bei Punkt A der rechte Winkel vorliegt, ist die gesuchte Seite c die Gegenkathete zum Winkel γ. In folgender Skizze sind alle gegebenen und gesuchten Angaben eingebunden:

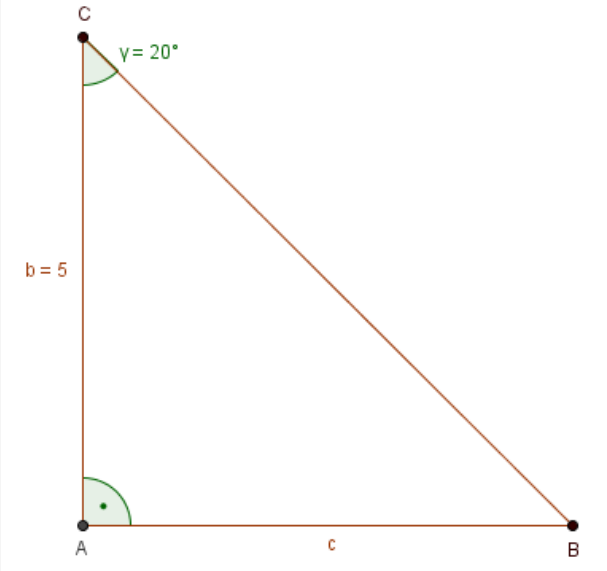


Bild 10 L"angenangaben in *cm*.

Die L"ange der Gegenkathete zum Winkel γ kann mithilfe des Tangens bestimmt werden:

$$\tan(20°) = \frac{c}{5} \Leftrightarrow c = \tan(20°) \cdot 5 \ .$$

Mit einem Taschenrechner l"asst sich der Wert $\tan(20°) \approx 0,36$ bestimmen. Dann ergibt sich:

$$c \approx 0,36 \cdot 5 = 1,80$$

Falls Sie die Lösung direkt mit dem Taschenrechner ermitteln, erhalten Sie

$$c = \tan(20°) \cdot 5 \approx 1,82 \ .$$

Aufgabe 4:

Gegeben ist ein Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei C und den Seitenl"angen a, b, c. Berechnen Sie die fehlenden Größen. Runden Sie alle Ergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma.

a) $a =$? , $c = 68\,\text{cm}$, $\alpha = 10°$

b) $b = 5\,\text{cm}$, $c = 11\,\text{cm}$, $\beta =$?

c) $a = 10\,\text{cm}$, $b = 20\,\text{cm}$, $\alpha =$? , $\beta =$?

d) $a = 4\,\text{cm}$, $b =$? , $\beta = 65°$

e) $b = 5\,\text{cm}$, $c =$? , $\alpha = 11,21°$

Lösung:

Das Dreieck hat den rechten Winkel bei γ, also sind a und b die Katheten und c die Hypotenuse des Dreiecks.

a) Die Seitenlänge a kann mit Hilfe des Sinus berechnet werden:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{a}{c} \\ a &= \sin(\alpha) \cdot c \\ a &= \sin(10^\circ) \cdot 68\,\text{cm} \quad \approx 11,81\,\text{cm} \end{aligned}$$

b) Für $\sin(\beta)$-Werte mit $0 < \sin(\beta) < 1$ wird der zugehörige Winkel β zwischen 0° und 90° durch arcsin geliefert:

$$\begin{aligned} \sin(\beta) &= \frac{b}{c} \\ \Rightarrow \quad \beta &= \arcsin\left(\frac{b}{c}\right) \\ \Leftrightarrow \quad \beta &= \arcsin\left(\frac{5\,\text{cm}}{11\,\text{cm}}\right) \quad \approx 20,04^\circ \end{aligned}$$

c) Die Winkel können beide mithilfe des Arkustangens berechnet werden. Für alpha erhalten wir

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{a}{b} \\ \Rightarrow \quad \alpha &= \arctan\left(\frac{a}{b}\right) \\ \Leftrightarrow \quad \alpha &= \arctan\left(\frac{10\,\text{cm}}{20\,\text{cm}}\right) \quad \approx 26,67^\circ \end{aligned}$$

Für beta erhalten wir

$$\begin{aligned} \tan(\beta) &= \frac{b}{a} \\ \Rightarrow \quad \beta &= \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \\ \Leftrightarrow \quad \beta &= \arctan\left(\frac{20\,\text{cm}}{10\,\text{cm}}\right) \quad \approx 63,43^\circ \end{aligned}$$

d) Um die Seitenlänge b zu bestimmen, nutzen wir den Tangens:

$$\begin{aligned} \tan(\beta) &= \frac{b}{a} \\ \Leftrightarrow \quad b &= \tan(\beta) \cdot a \\ \Leftrightarrow \quad b &= \tan(65^\circ) \cdot 4\,\text{cm} \quad \approx 8,58\,\text{cm}. \end{aligned}$$

e) Mit Hilfe des Cosinus erhalten wir die Seitenlänge c:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{b}{c} \\ \Leftrightarrow \quad c &= \frac{b}{\cos(\alpha)} \\ \Leftrightarrow \quad c &= \frac{5\,\text{cm}}{\cos(11,21^\circ)} \quad \approx 5,10\,\text{cm}. \end{aligned}$$

Aufgabe 5:
Gegeben ist das Dreieck ABC mit:

- $\alpha = 90°$,
- $\beta = 38°$,
- $c = 9$ (in cm).

Berechnen Sie die L"angen der fehlenden Seiten. Runden Sie Ihr Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.
Die L"ange der Seite $a =$ beträgt $\boxed{?}$ cm
Die L"ange der Seite $b =$ beträgt $\boxed{?}$ cm

Lösung:

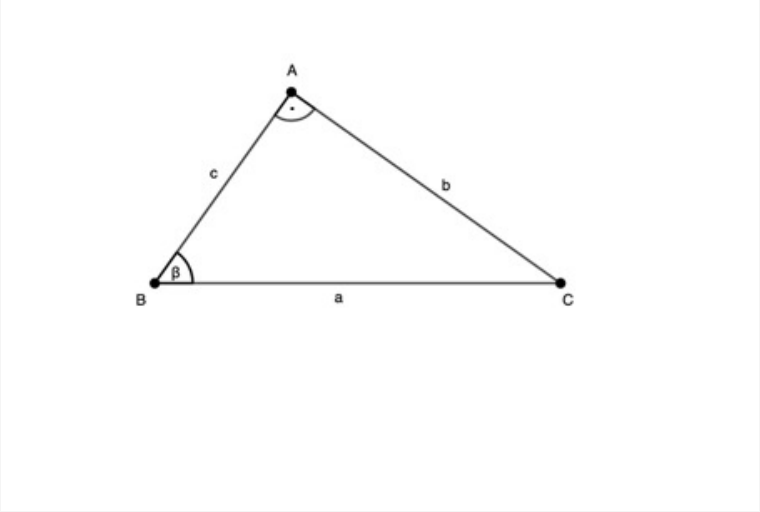


Bild 11 L"osungsskizze

Gegeben sind die L"ange der Ankathete c zum Winkel β und der Winkel β im rechtwinkligen Dreieck. Daher kann zur Bestimmung der L"ange der Hypotenuse a der Cosinus verwendet werden:
$\cos(38°) = \frac{9}{a} \Leftrightarrow a = \frac{9}{\cos(38°)} \approx 11,34$.
Die L"ange der Gegenkathete zum Winkel $\beta\, b$ kann mithilfe des Tangens bestimmt werden:
$\tan(38°) = \frac{b}{9} \Leftrightarrow b = \tan(38°) \cdot 9 \approx 7,03$.
Die L"ange a der Hypotenuse betr"agt $11,42$ cm und die L"ange b der zweiten Kathete betr"agt $7,03$ cm.

Hinweis:
Falls Sie zuerst die gerundeten Werte von $\cos(38°)$ bzw. $\tan(38°)$ bestimmen, erhalten Sie

$$\begin{aligned} a &= \frac{9}{\cos(38°)} \approx \frac{9}{0,79} \approx 11,39 \\ und b &= \tan(38°) \cdot 9 \approx 0,78 \cdot 9 = 7,02. \end{aligned}$$

Aufgabe 6:
Gegeben ist ein Rechteck mit den Seiten a und b. Berechnen Sie den Winkel η (gesprochen „Eta“)

und die Länge der Diagonalen e. Runden Sie die Zwischenergebnisse auf eine Stelle nach dem Komma.

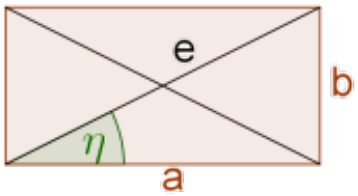


Bild 12

$a = 19\,\text{cm}, \quad b = 8\,\text{cm}, \quad \eta = \boxed{\ ?\ }\ , \quad e = \boxed{\ ?\ }$

Lösung:

Der Winkel kann mit dem Arkustangens berechnet werden:

$$\begin{aligned} \tan(\eta) &= \frac{b}{a} \\ \Rightarrow \quad \eta &= \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \\ \Leftrightarrow \quad \eta &= \arctan\left(\frac{8\,\text{cm}}{19\,\text{cm}}\right) \\ \Leftrightarrow \quad \eta &\approx 22,8^\circ \end{aligned}$$

Die Länge der Diagonalen e entspricht der Länge der Hypotenuse des innen liegenden Dreiecks und kann mit Sinus oder Cosinus berechnet werden.

$$\begin{aligned} \cos(\eta) &= \frac{a}{e} \\ \Leftrightarrow \quad e &= \frac{a}{\cos(\eta)} \\ \Leftrightarrow \quad e &= \frac{19\,\text{cm}}{\cos(22,8^\circ)} \\ \Leftrightarrow \quad e &\approx 20,6\,\text{cm} \end{aligned}$$

Alternativ gilt:

$$\begin{aligned} \sin(\eta) &= \frac{b}{e} \\ \Leftrightarrow \quad e &= \frac{b}{\sin(\eta)} \\ \Leftrightarrow \quad e &= \frac{8\,\text{cm}}{\sin(22,8^\circ)} \\ \Leftrightarrow \quad e &\approx 20,6\,\text{cm}. \end{aligned}$$

Aufgabe 7:

Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius $r = 3\,\text{cm}$ und dem Winkel $\alpha = 66^\circ$. Berechnen Sie die Länge der Sehne. Runden Sie das Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.

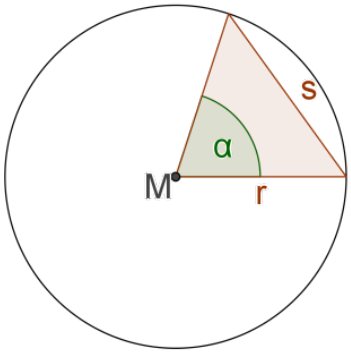


Bild 13

$s =$?

Lösung:

Das Dreieck kann in zwei kongruente und rechtwinklige Dreiecke unterteilt werden.

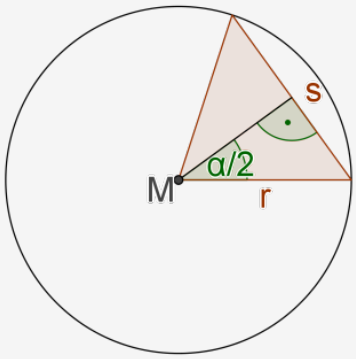


Bild 14

Es gilt also

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{\frac{s}{2}}{r} \\ \Leftrightarrow \quad s &= 2 \cdot r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \quad s &= 2 \cdot 3\,\text{cm} \cdot \sin\left(\frac{66^\circ}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \quad s &\approx 3,27\,\text{cm}. \end{aligned}$$

Aufgabe 8:

a) Ein Mensch mit einer Größe von $h = 1,76\,\text{m}$ wirft einen Schatten von $s = 2,1\,\text{m}$. Ein Turm wirft zur selben Zeit neben dem Menschen einen Schatten von $s_T = 11,9\,\text{m}$. Berechnen Sie den Winkel der Sonneneinstrahlung auf dem Boden und die ungefähre Höhe des Turms. Runden Sie die Ergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma.

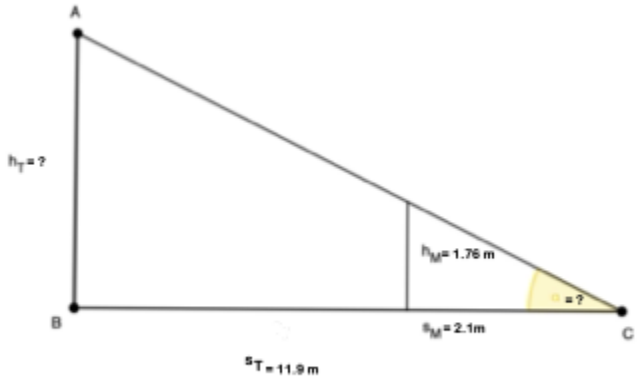


Bild 15

Der Winkel der Sonneneinstrahlung auf den Boden beträgt $\alpha =$?
. Die Höhe des Turm entspricht dann ungefähr $h_T =$?
.

b) Bei einer Sonneneinstrahlung in einem Winkel von $\alpha = 20°$ wirft der Kölner Dom einen Schatten. Wie lang ist der Schatten s_D bei einer Domhöhe von $h_D = 157,38\,\text{m}$? Runden Sie das Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma.
Der Schatten des Kölner Doms ist $s_D =$?
lang.

Lösung:

a) Die Höhe des Menschen entspricht der Gegenkathete und die Länge des Schattens entspricht der Ankathete. Der Winkel kann mit dem Arkustangens berechnet werden:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{h}{s} \\ \Rightarrow \quad \alpha &= \arctan\left(\frac{h}{s}\right) \\ \Leftrightarrow \quad \alpha &= \arctan\left(\frac{1,76\,\text{m}}{2\,\text{m}}\right) \\ \Leftrightarrow \quad \alpha &\approx 39,97°. \end{aligned}$$

Die Höhe des Turms kann mit dem Tangens berechnet werden:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{h_T}{s_T} \\ \Leftrightarrow \quad h_T &= \tan(\alpha) \cdot s_T \\ \Leftrightarrow \quad h_T &= \tan(39,97°) \cdot 11,9 \\ \Leftrightarrow \quad h_T &\approx 9,97\,\text{m}. \end{aligned}$$

b) Die Länge des Schattens des Kölner Doms kann mit dem Tangens berechnet werden:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{h_D}{s_D} \\ \Leftrightarrow \quad s_D &= \frac{h_D}{\tan(\alpha)} \\ \Leftrightarrow \quad s_D &= \frac{157,38\,\text{m}}{\tan(20°)} \\ \Leftrightarrow \quad s_D &\approx 432,40\,\text{m}. \end{aligned}$$

Aufgabe 9:

Frank und Annika haben sich von ihrem Taschengeld einen neuen Sportlenkdrachen gekauft, den sie nach Schulschluss auf dem nahe liegenden Sportplatz sofort steigen lassen. Als der Drachen in die L"ufte steigt fragt sich Frank, wie hoch der Drachen wohl fliegt. Annika greift in ihre Schultasche, holt ihr Geodreieck und misst den Winkel zwischen der 50 m langen Schnur und einer gedachten Linie zum Sportplatz mit ca. 48°. Berechnen Sie die H"ohe des Drachens unter den Annahmen, dass das eine Ende der Schnur des Drachen in einer H"ohe von 1,50 m "uber dem Boden gehalten wird und die Schnur des Drachen straff gespannt ist.

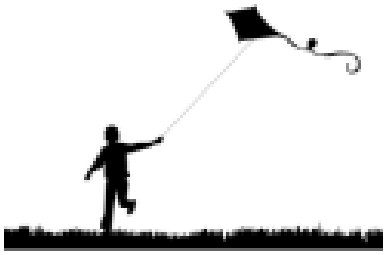


Bild 16

Der Drache fliegt in einer H"ohe von ? Metern.

Lösung:

In folgender Skizze ist die Situation anschaulich dargestellt.

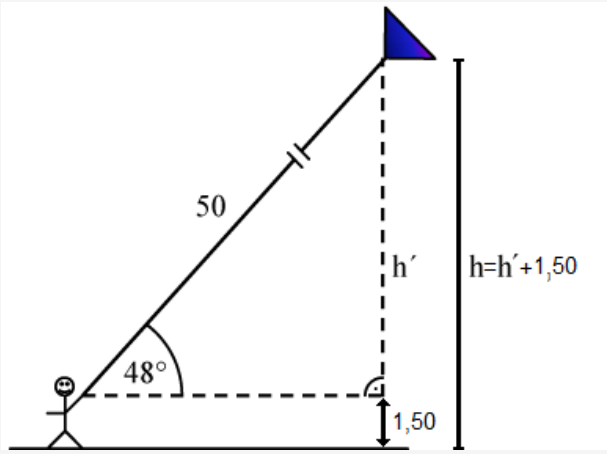


Bild 17 Skizze zur Drachenaufgabe, L"angenangaben in m.

Mithilfe des Sinus kann die H"ohe h' wie folgt bestimmt werden:

$$\sin(48^\circ) = \frac{h'}{50} \Leftrightarrow h' = \sin(48^\circ) \cdot 50 \approx 0,74 \cdot 50 = 37$$

. Zu diesem Ergebnis muss nun noch die H"ohe addiert werden, in der der Drachen gehalten wird. F"ur die Flugh"ohe des Drachen ergibt sich somit eine Gesamth"ohe von ca. $38,50$ m.

Hinweis:
Falls Sie die Lösung direkt mit dem Taschenrechner ermitteln, erhalten Sie

$$h' = \sin(48^\circ) \cdot 50 \approx 37,16$$

und dementsprechend als Flughöhe $38,66$ m.

Anwendung

Praktische Anwendung finden sin, cos und tan z. B. bei der Bestimmung von H"ohen oder Breiten (Turmh"ohe, Flussbreite), die nicht direkt gemessen werden k"onnen. Ein solches Problem kann dadurch gel"ost werden, dass man die gesuchte L"ange einer Strecke als Seite eines rechtwinkligen Dreiecks definiert, dessen andere Seiten oder dessen Winkel man misst und dann die Formeln f"ur sin, cos und tan anwendet.

Beispiel 5:

Bestimmung der Breite eines Flusses

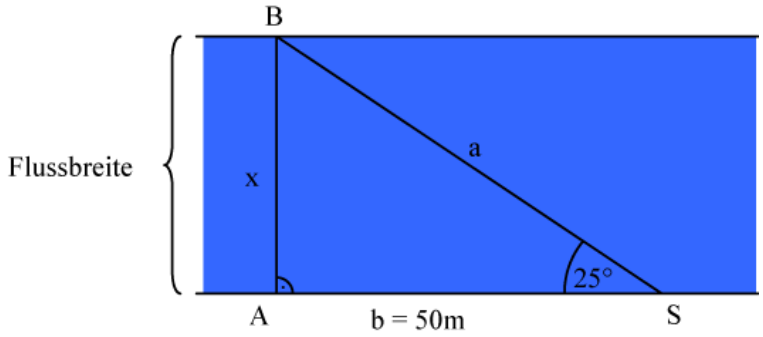


Bild 18 Skizze zur Flussbreitenbestimmung

Zu Beginn w"ahlt man einen markanten Punkt B (z. B. einen Baum), auf der nicht erreichbaren Uferseite, der direkt am Ufer liegt. Gegen"uber von Punkt B markiert man einen Punkt A (z. B. mit einem Holzstab). Nun steckt man von Punkt A ausgehend eine Strecke (z.B. 50 m) parallel zum Ufer ab und markiert deren Endpunkt S. Nun peilt man vom Punkt S aus mit einer Winkelscheibe, die auf einem Stativ angebracht ist, den Punkt A mit der Markierung $0°$ an. Anschließend dreht man die Winkelscheibe in Richtung Punkt B und peilt diesen an. Nun braucht man nur noch den gemessenen Winkel auf der Winkelscheibe ablesen und kann die Flussbreite mithilfe der Verh"altnisgleichung des Tangens bestimmen, da die L"ange der Ankathete zum gemessenen Winkel bekannt ist und die Breite des Flusses die L"ange der Gegenkathete zum gemessenen Winkel darstellt:

$$\tan(25°) = \frac{x}{b}$$

. Umstellen der Gleichung nach x ergibt:

$$x = \tan(25°) \cdot b = \tan(25°) \cdot 50 \approx 0,47 \cdot 50 = 23,50$$

. Damit hat der Fluss eine Breite von ca. $23,50$ m.

Ergänzungen

Beziehungen zwischen Sinus und Cosinus

Satz 1:
In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit rechtem Winkel γ gilt f"ur den Winkel $0° < \alpha < 90°$:

$$\sin(90° - \alpha) = \cos(\alpha) \text{ und } \cos(90° - \alpha) = \sin(\alpha).$$

Beweis *(Aufklapptext)*

Betrachtet wird folgendes rechtwinkliges Dreieck:

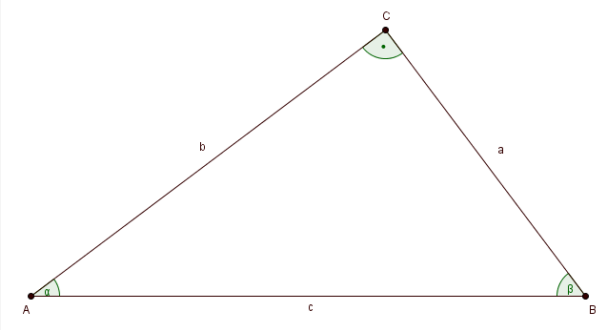


Bild 19

Es gilt $\beta = 90° - \alpha$.
Aus Definition 1 ist bekannt, dass

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} und \cos(\beta) = \frac{a}{c} .$$

Also

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \cos(\beta) = \cos(90° - \alpha) .$$

Ebenfalls aus Definition 1 ist bekannt, dass

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} und \sin(\beta) = \frac{b}{c} .$$

Also erhalten wir auch hier

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \sin(\beta) = \sin(90° - \alpha) .$$

Zusammenhang zwischen Sinus, Cosinus und Tangens

Satz 2:
Der Wert des Tangens des Winkels α $0° < \alpha < 90°$ kann mithilfe der entsprechenden Werte des Sinus des Winkels α und des Cosinus des Winkels α ausgedr"uckt werden:

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

Beweis *(Aufklapptext)*

Die Definition des Tangens lautet:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{L"ange der Gegenkathete zu } \alpha}{\text{L"ange der Ankathete zu } \alpha}$$

. Durch Erweiterung des Bruches auf der rechten Seite mit dem Faktor „L"ange der Hypotenuse“ und anschließender Umwandlung in einen Doppelbruch ergibt sich:

$$\frac{\text{L"ange der Gegenkathete zu } \alpha \cdot \text{L"ange der Hypotenuse}}{\text{L"ange der Ankathete zu } \alpha \cdot \text{L"ange der Hypotenuse}}$$
$$= \frac{\frac{\text{L"ange der Gegenkathete zu } \alpha}{\text{L"ange der Hypotenuse}}}{\frac{\text{L"ange der Ankathete zu } \alpha}{\text{L"ange der Hypotenuse}}}.$$

Nach der Umwandlung zu einem Doppelbruch findet sich im Z"ahler die Definition des Sinus und im Nenner die Definition des Cosinus wieder:

$$\frac{\frac{\text{L"ange der Gegenkathete zu } \alpha}{\text{L"ange der Hypotenuse}}}{\frac{\text{L"ange der Ankathete zu } \alpha}{\text{L"ange der Hypotenuse}}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

. Insgesamt ergibt sich also

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

.

Berechnung von Sinus- und Cosinuswerten ohne Taschenrechner

Hier finden Sie eine M"oglichkeit, bestimmte Sinus- und Cosinuswerte mithilfe spezieller Dreiecke ohne Taschenrechner bestimmen zu k"onnen.

Um eine ungef"ahre Vorstellung zu erhalten, wo die Werte liegen, werden nun die Funktionsgraphen von Sinus, Cosinus und Tangens abgebildet.

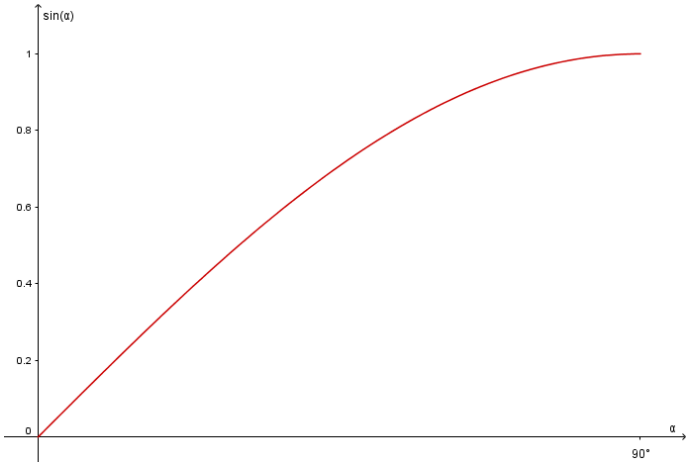


Bild 20 Der Graph der Sinusfunktion im Intervall von 0° bis 90°.

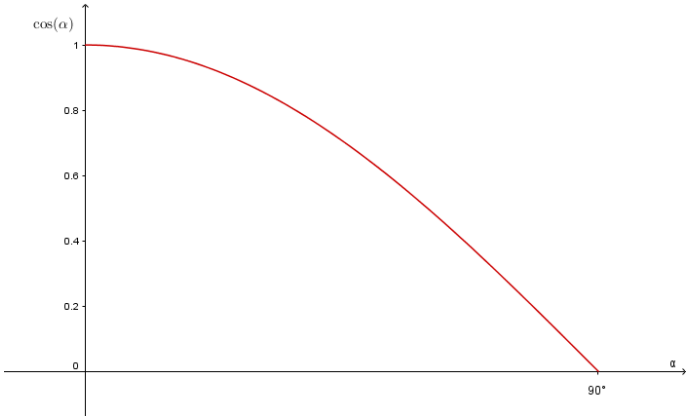


Bild 21 Der Graph der Cosinusfunktion im Intervall von 0° bis 90°.

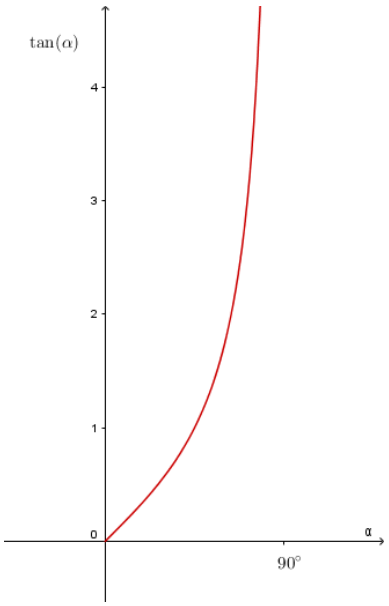


Bild 22 Der Graph der Tangensfunktion im Intervall von 0° bis 90°.

Gleichseitige Dreiecke

In einem gleichseitigen Dreieck sind die L”angen aller Seiten und die Gr”oßen aller Winkel

gleich groß. Da die Winkelsumme im Dreieck 180° betr"agt und alle Winkel gleich gro"s sind, besitzen alle Winkel eine Gr"oße von 60°. Es werden die Sinus- und Cosinuswerte zum Winkel $\alpha = 60°$ bestimmt. Um die Definitionen der Verh"altnisse nutzen zu k"onnen, muss ein rechtwinkliges Dreieck vorliegen. Dies kann durch einzeichnen der H"ohe erzeugt werden. Die L"angen der Seiten spielen keine Rolle, wie bereits in der Begr"undung klar gemacht wurde. Daher sind die L"angen der Seiten zur Vereinfachung der Rechnungen auf 1 festgelegt.

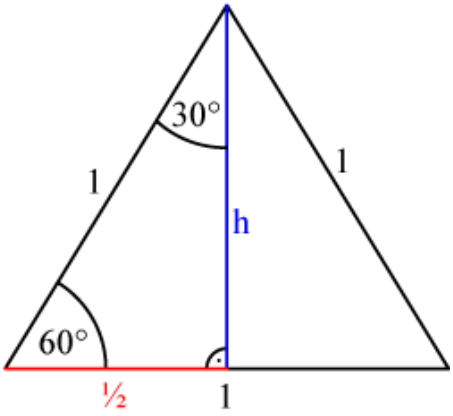


Bild 23 Gleichseitiges Dreieck mit H"ohe h.

F"ur die Bestimmung der Sinus- und Cosinuswerte schauen wir uns die linke H"alfte des gleichseitigen Dreiecks an. Durch einzeichnen der H"ohe sind zwei rechtwinklige Dreiecke entstanden. Zur Bestimmung des Sinus zum Winkel 60° wird die L"ange der Gegenkathete h ben"otigt, die L"ange der Hypotenuse ist 1. Um die L"ange der H"ohe h zu bestimmen, wird der Satz des Pythagoras verwendet. Es gilt

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + h^2 = \frac{1}{4} + h^2 = 1^2 \Leftrightarrow h^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mit dieser Angabe l"asst sich jetzt der Sinus des Winkels 60° bestimmen:

$$\sin(60°) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Da die L"angen aller Seiten in diesem Dreieck bekannt sind, kann auch $\cos(60°)$ mithilfe der Definition bestimmt werden:

$$\cos(60°) = \frac{1}{2}.$$

Im Bild ist zu erkennen, dass in dem linken rechtwinkligen Dreieck auch ein Winkel der Gr"oße 30° entstanden ist. Wenn die H"ohe h des Dreiecks als Ankathete zu diesem Winkel und die halbe Seitenl"ange unten als Gegenkathete zu diesem Winkel betrachtet wird, k"onnen so auch die Werte f"ur Sinus und Cosinus zu dieser Winkelgr"oße bestimmt werden:

$$\sin(30°) = \frac{1}{2}\,,\ \cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Gleichschenkliges und rechtwinkliges Dreieck

In einem gleichschenkligen Dreieck stimmen die L"angen von zwei Seiten und damit auch die Gr"oßen von zwei Winkeln "uberein. Mithilfe eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks k"onnen $\sin(45°)$ und $\cos(45°)$ bestimmt werden. Durch die Festlegung des rechten Winkels ergibt

sich f"ur die anderen beiden Winkel nur die M"oglichkeit, dass sie jeweils 45° groß sind.
6cm

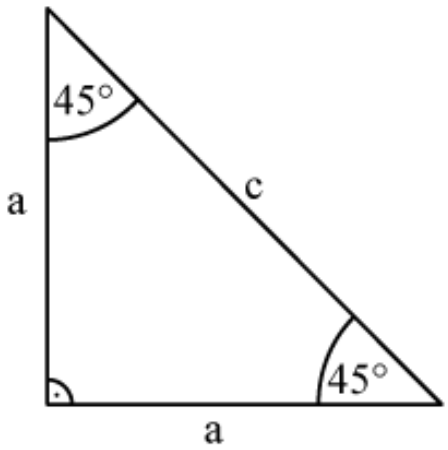


Bild 24 Gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck

Um den gesuchten Sinus- und Cosinuswert zu bestimmen, wird wiederum der Satz des Pythagoras verwendet, um zun"achst die L"ange der Hypotenuse zu ermitteln:

$$a^2 + a^2 = 2a^2 = c^2 \Rightarrow \sqrt{(2 \cdot a^2)} = c \Leftrightarrow a \cdot \sqrt{2} = c.$$

Da die L"ange der Gegenkathete gleich der L"ange der Ankathete ist, gilt $\sin(45°) = \cos(45°)$. Es ergibt sich:

$$\sin(45°) = \cos(45°) = \frac{a}{a \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}.$$

Bisher wurden nur Sinus- und Cosinuswerte bestimmt. Zu den bereits gefundenen Werten k"onnen auch die Tangenswerte angegeben werden, da bekanntermaßen gilt, dass $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$. Die Werte von Sinus, Cosinus und Tangens zu den Winkeln 30°, 45° und 60° werden in folgender Tabelle festgehalten.

α	30°	45°	60°
$\sin(\alpha)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan(\alpha)$	$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$