UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Virtuelles Eingangstutorium
studiVEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn
FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Virtuelles Eingangstutorium
VEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

khdm
kompetenzzentrum
hochschuldidaktik
mathematik

LE 7 - Trigonometrie

7.2 Trigonometrie am Einheitskreis

Im Folgenden finden Sie die Abschnitte:

Übersicht ..... S. 1
Hinführung ..... S. 2
Inhalte mit Erklärungen ..... S. 10
Aufgaben ..... S. 30

Übersicht

- Umrechnung vom Gradma"s ins Bogenma"s
- Sinus, Cosinus und Tangens als Funktionen verstehen
- Eigenschaften der Sinus-, Cosinus- und Tangensfunktion
- Berechnung von Winkeln im rechtwinkligen Dreieck

Hinführung

Im ersten Kapitel zur Lerneinheit Trigonometrie wurden Seitenlängen in rechtwinkligen Dreiecken berechnet. Dazu musste die Länge einer Seite sowie ein Winkel, der nicht der rechte Winkel ist, bekannt sein. Es stellt sich die Frage, ob es auch m"oglich ist, fehlende Winkelgr"o"sen mithilfe von Sinus, Cosinus und Tangens zu bestimmen. Dies ist prinzipiell m"oglich, allerdings nicht mit den Mitteln, die im ersten Kapitel zur Verf"ugung standen.
In diesem Kapitel sollen die erforderlichen Mittel bereit gestellt werden. Dazu werden Sinus, Cosinus und Tangens als Funktionen definiert. Durch diese Definitionen l"asst sich auch der Anwendungsbereich erweitern, da auch Winkel au"serhalb des bisher betrachteten Bereichs zwischen 0° und 90° eingesetzt werden k"onnen.
Auch wird ein Exkurs zur Umrechnung von Grad- in Bogenma"s gegeben, da in den Anwendungen der Physik und den Ingenieurswissenschaften meist das Bogenma"s verwendet wird.
Zun"achst wird ein Beispiel betrachtet, welches die Auffassung von Sinus und Cosinus als Funktionen motiviert.

Die folgende Abbildung zeigt eine Kreisscheibe (Draufsicht und Seitenansicht), auf der am Rand ein Korken befestigt ist ($r = 1$ dm).

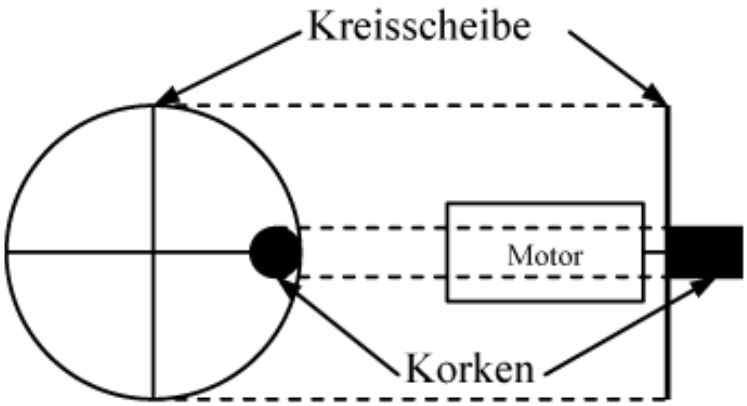


Bild 1 Kreisscheibe mit Korken (Draufsicht und Seitenansicht)

Die Kreisscheibe wird nun, mithilfe des Motors, gleichm"a"sig gegen den Uhrzeigersinn gedreht. Gleichzeitig wird die Bewegung des Korkens mit den Lichtstrahlen zweier Lampen zum einen auf eine senkrecht stehende und zum anderen auf eine waagerecht liegende Wand projiziert.

Diese Projektionen der Schatten werden in zwei Koordinatensystemen aufgezeichnet. Dabei wird auf der x-Achse die Zeit und auf der y-Achse der Abstand d des Korkens von der Mittellage aufgetragen.

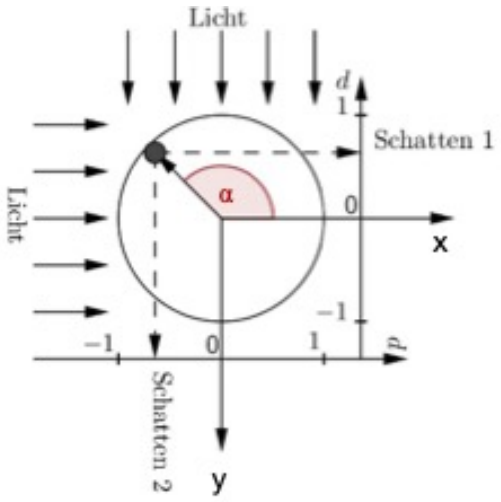


Bild 2 Schematische Darstellung der Korkenbewegung

Wenn man sich den Verlauf des Korkens anschaut, kommt man zu folgender Tabelle:

Position Korken	Winkel	Schatten 1	Schatten 2
Rechts	0°	0	1
Oben	90°	1	0
Links	180°	0	-1
Unten	270°	-1	0

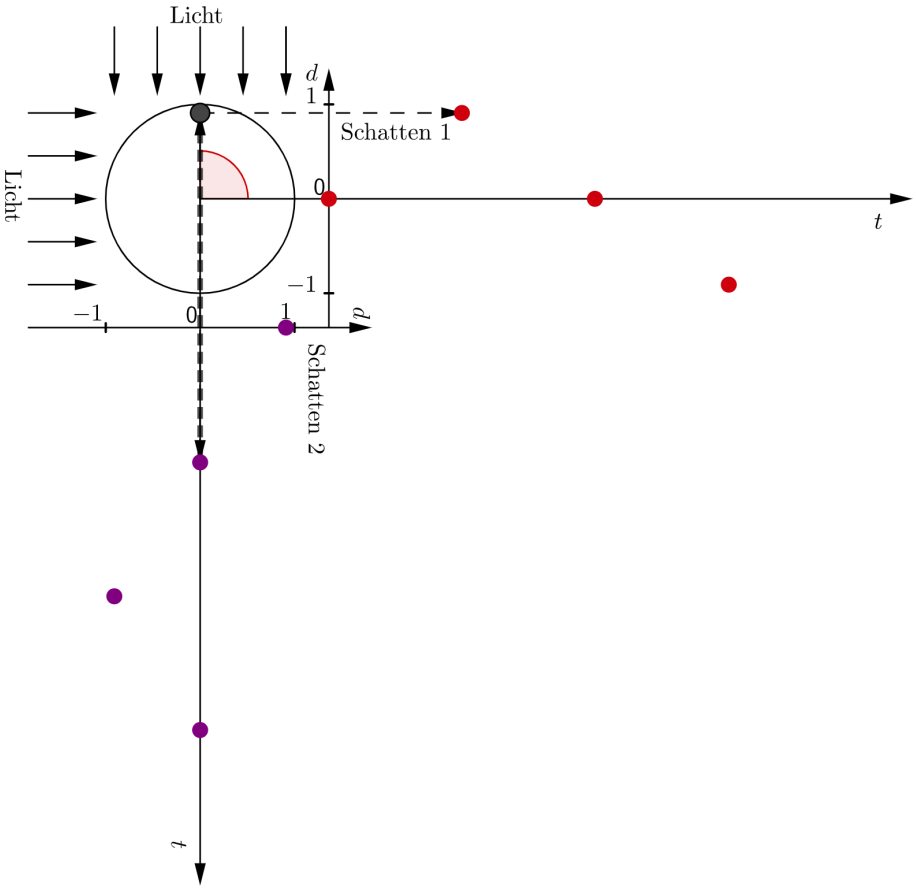


Bild 3

Wie der Verlauf zwischen diesen Höhen ist, lässt sich allerdings nicht so leicht vorstellen. Das folgende Video zeigt diesen Verlauf.

Preview fehlt:
`h5p/Korkenbewegung`

Video 1 *(nur in digitaler Version)*

Die oben beschriebenen Vorg"ange wollen wir nun noch etwas n"aher untersuchen. Wir betrachten hierf"ur den in der folgenden Abbildung dargestellten Einheitskreis.

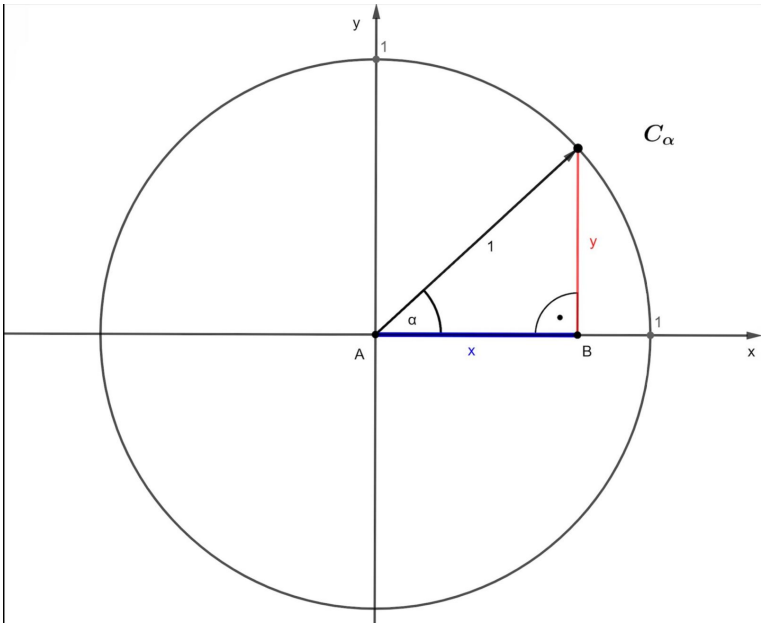


Bild 4 Einheitskreis

F"ur das rechtwinklige Dreieck ABC und einen Winkel α von maximal 90° gilt:

$$\sin(\alpha) = \frac{y}{1} \Rightarrow y = \sin(\alpha) \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \cos(\alpha)$$

Dabei sind x und y die Koordinaten des Punkts C_α gemäß Skizze. Die L"angen der Katheten entsprechen also im Einheitskreis dem Sinus- bzw. Cosinuswert zu einem bestimmten Winkel α. Es ergibt sich also die Situation:

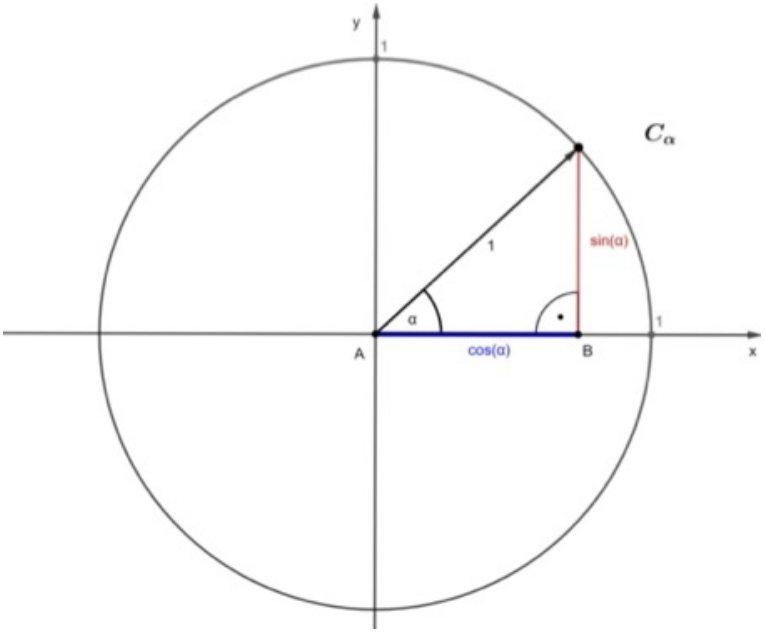


Bild 5 Darstellung von Sinus und Cosinus am Einheitskreis

F"ur $0° \leq \alpha \leq 90°$ gilt: C_α hat die Koordinaten $(\cos(\alpha); \sin(\alpha))$.

Auf diesem Kreis lassen wir nun den Zeiger (Hypotenuse mit der L"ange 1) im mathematisch positiven Drehsinn rotieren. Dabei erhalten wir f"ur $90° < \alpha \leq 180°$ die folgende Situation

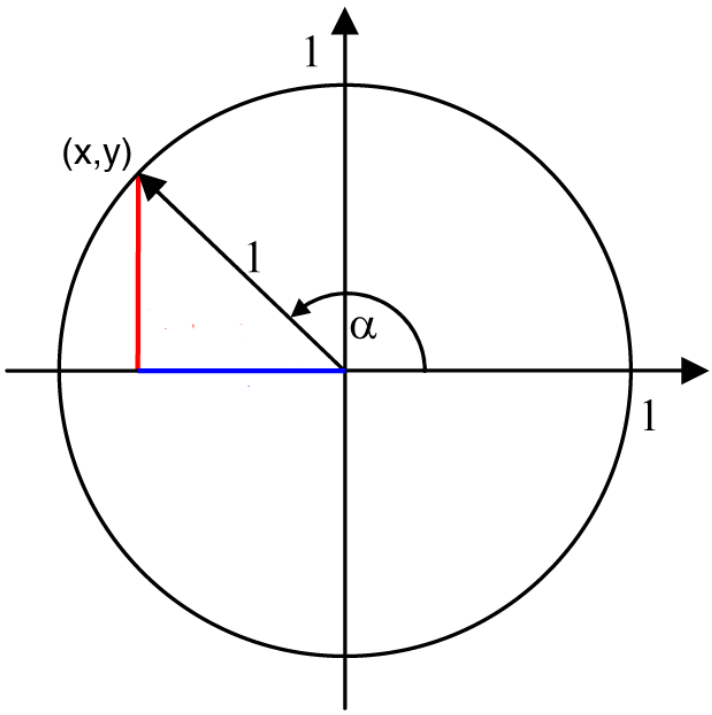


Bild 6 Sinus und Cosinus f"ur $90° < \alpha \leq 180°$

Die Koordinaten des Punktes $(x; y)$ kann man mittels Sinus und Cosinus offenbar durch $(-\cos(180° - \alpha); \sin(180° - \alpha))$ darstellen.

Der Sinus und der Cosinus wurden bisher nur für $0° \leq \alpha \leq 90°$ definiert. Um f"ur den Punkt $(x;y) = (-\cos(180° - \alpha); \sin(180° - \alpha))$ f"ur $90° < \alpha \leq 180°$ eine einfache Beschreibung aufrecht zu erhalten, definiert man f"ur $90° < \alpha \leq 180°$, dass

$$\sin(\alpha) := \sin(180° - \alpha) \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) := -\cos(180° - \alpha) \; .$$

Dies ist eine sinnvolle Definition, denn f"ur $90° < \alpha \leq 180°$ gilt $0° \leq 180° - \alpha < 90°$, also sind die Audr"ucke auf der rechten Seite bereits definiert. F"ur $90° < \alpha \leq 180°$ gilt dann mit der neuen Definition: $C_\alpha =$

$$(x;y) = (-\cos(180° - \alpha); \sin(180° - \alpha)) = (\cos(\alpha); \sin(\alpha)) \; .$$

Analog definiert man f"ur $180° < \alpha \leq 270°$

$$\sin(\alpha) := -\sin(270° - \alpha) \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) := -\cos(270° - \alpha)$$

und f"ur $270° < \alpha \leq 360°$

$$\sin(\alpha) := -\sin(360° - \alpha) \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) := \cos(360° - \alpha) \; .$$

Mit dieser Erweiterung der Definition von $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ auf Werte von α mit $90° < \alpha \leq 360°$ kann man eine einfache Beschreibung geben. Der Punkt C_α zum Winkel α ($0° \leq \alpha \leq 360°$) auf dem Einheitskreis hat immer die Koordinaten

$$C_\alpha = (\cos(\alpha); \sin(\alpha)) \, .$$

Der Cosinus entspricht der x-Koordinate, der Sinus der y-Koordinate des Punktes.

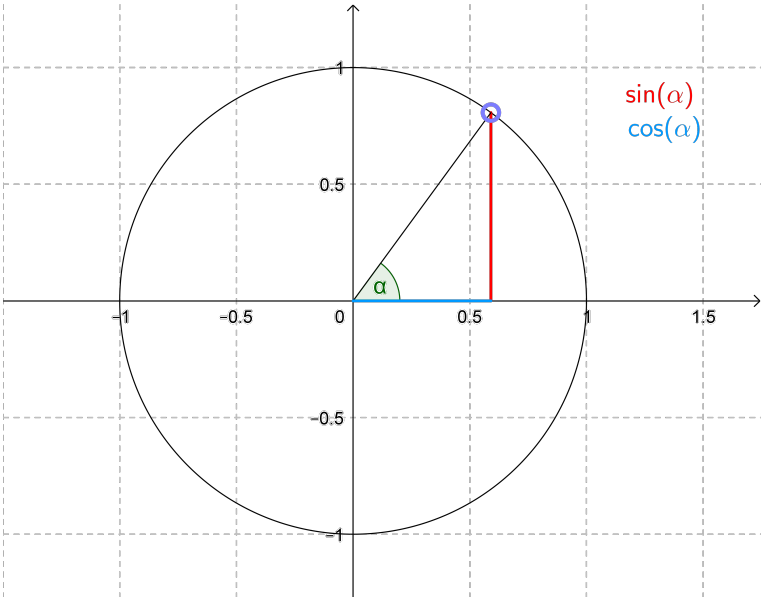
Wir haben Sinus und Cosinus nun f"ur alle Winkel am Einheitskreis $0° \leq \alpha \leq 360°$ definiert.
Einen Punkt C_α auf dem Einheitskreis kann man auch f"ur $\alpha > 360°$ (mehr als eine volle Drehung) oder auch f"ur $\alpha < 0$ (Drehung im Uhrzeigersinn) angeben. F"ur diese Winkel definiert man entsprechend

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &:= \; x\text{-Koordinate von } C_\alpha \\ \text{und} \quad \sin(\alpha) &:= \; y\text{-Koordinate von } C_\alpha. \end{aligned}$$

Somit ist klar, dass der Wert von Sinus und Cosinus periodisch unverändert bleibt, wenn man $360°$ zu einem Winkel addiert. Es gilt somit f"ur alle Winkel α:

$$\sin(\alpha + 360°) = \sin(\alpha) \quad \text{und} \quad \cos(\alpha + 360°) = \cos(\alpha) \; .$$

Sinus und Cosinus am Einheitskreis:



Interaktion 1 *(nur in digitaler Version)*

Insgesamt ergeben sich die in der n"achsten Abbildung dargestellten Funktionsverl"aufe.

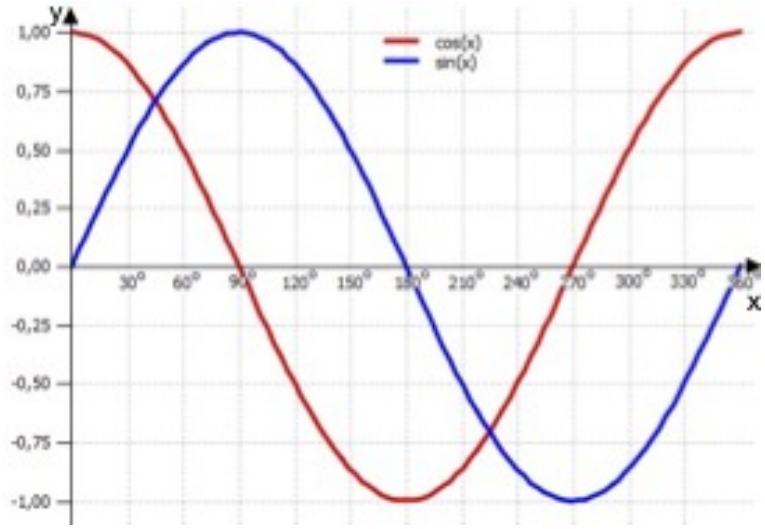


Bild 7 Graphen der Sinus- und Cosinusfunktion

Satz 1: (Bemerkung)

Die Zuordnung von einem beliebigen Winkel α zu den Werten $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ lässt sich auch als Funktion definieren.

Da man alle Winkel durch reelle Zahlen angeben kann, die man als Maß des Winkels auffasst (z. B. steht 30 für 30°), und für die Werte von Sinus und Cosinus alle Zahlen zwischen -1 und 1 einschließlich infrage kommen, ist die Definitionsmenge jeweils $\mathbb{R}$ und die Wertemenge jeweils $[-1;1]$.

Man erhält also die beiden Funktionen

$$\sin : \mathbb{R} \to [-1;1] \quad \text{und} \quad \cos : \mathbb{R} \to [-1;1].$$

Die beiden Kurvenverl"aufe zeigen anschaulich, dass die Funktionen sin und cos Werte aus dem Intervall $[-1;1]$ annehmen, was auch aus der Definition folgt.

Info 1:

Es gilt f"ur beliebige Winkel α und $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \sin(\alpha + k \cdot 360°) \\ \text{und} \quad \cos(\alpha) &= \cos(\alpha + k \cdot 360°). \end{aligned}$$

Die Sinus- und die Cosinusfunktion sind somit beide periodisch mit Periode 360°.

Bisher wurde also festgestellt, dass die Sinus- und die Cosinusfunktion periodisch sind. Im Folgenden wird untersucht, ob es bei diesen Funktionen noch weitere Zusammenh"ange gibt.

Aufgabe 1:

Untersuchen Sie den Verlauf der Sinus - und Cosinusfunktion. Versuchen Sie Ihre Vermutungen allgemein in der folgenden Tabelle oder einer selbst aufgestellten Tabelle festzuhalten und gehen Sie dabei wie folgt vor:

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$			x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
α					$-\alpha$		
$90° + \alpha$					$90° - \alpha$		
$180° + \alpha$					$180° - \alpha$		
$270° + \alpha$					$270° - \alpha$		
$360° + \alpha$					$360° - \alpha$		

1. Zeile der Tabelle: Untersuchung auf Symmetrie.
2. und 4. Zeile der Tabelle: Dr"ucken Sie den Sinus $(90° + \alpha)$ durch den Cosinus und den Cosinus $(90° + \alpha)$ durch den Sinus aus.
3. Zeile der Tabelle: Stellen Sie die Terme $\sin(180° \pm \alpha)$ und $\cos(180° \pm \alpha)$ durch $\sin(\alpha)$ bzw. $\cos(\alpha)$ dar.
5. Zeile der Tabelle: Untersuchung auf Periodizit"at.

Lösung:

Untersucht man die Geraden von Sinus und Cosinus, so kann man feststellen, dass die Sinusfunktion punktsymmetrisch zum Ursprung und die Cosinusfunktion achsensymmetrisch zur y-Achse sind. Au"serdem sind die Sinus - und die Cosinusfunktion um $90°$ zueinander verschoben und beide Funktionen sind periodisch. Die Tabelle l"asst sich wie folgt ausf"ullen:

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$			x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$			$-\alpha$	$-\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$
$90° + \alpha$	$\cos(\alpha)$	$-\sin(\alpha)$			$90° - \alpha$	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$
$180° + \alpha$	$-\sin(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$			$180° - \alpha$	$\sin(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$
$270° + \alpha$	$-\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$			$270° - \alpha$	$-\cos(\alpha)$	$-\sin(\alpha)$
$360° + \alpha$	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$			$360° - \alpha$	$-\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$

Inhalte mit Erklärungen

Sinus, Cosinus und Tangens sollen jetzt f"ur beliebige Winkel definiert werden. Bisher wurden diese nur im Zusammenhang mit rechtwinkligen Dreiecken und Winkeln zwischen 0° und 90° betrachtet. Zun"achst soll nochmal an die urspr"ungliche Definition erinnert und diese St"uck f"ur St"uck erweitert werden.

Wie bereits im ersten Kapitel angesprochen existieren spezielle Bezeichnungen für die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks:
Im rechtwinkligen Dreieck wird die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber liegt, als Hypotenuse bezeichnet. Die Seiten, die am rechten Winkel anliegen, heißen Katheten. Dabei liegt die Ankathete am Winkel α an und die Gegenkathete liegt dem Winkel α gegenüber.

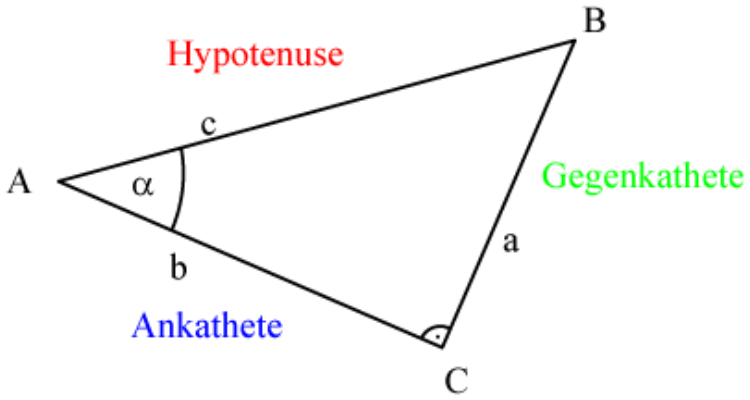


Bild 8

Sinus, Cosinus und Tangens werden mit diesen Bezeichnungen wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \\ \cos(\alpha) &= \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \\ \tan(\alpha) &= \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}. \end{aligned}$$

Wie schon im ersten Kapitel gezeigt wurde, h"angen die Werte von sin, cos und tan nur von der Gr"o"se des Winkels α und nicht von der Größe des Dreiecks ab.

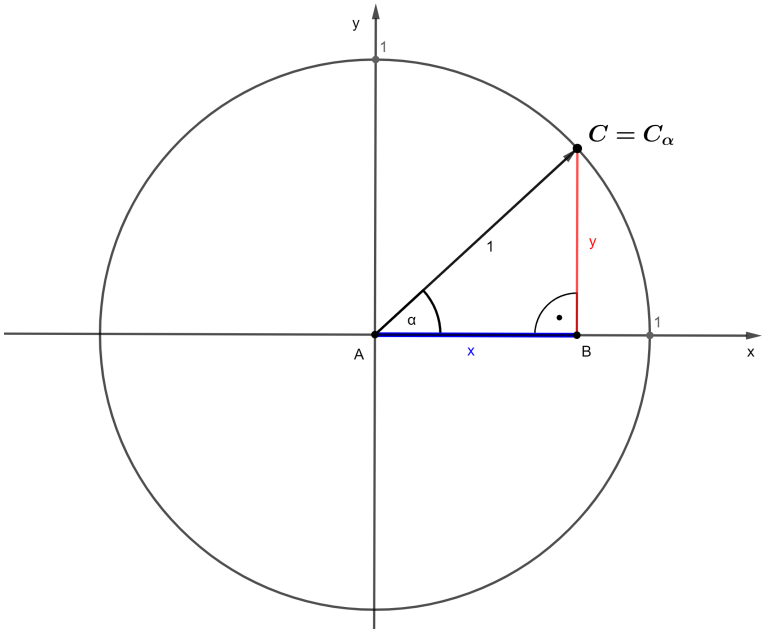


Bild 9 Cosinus und Sinus am Einheitskreis

Zunächst werden nur Winkel α zwischen 0° und 90° betrachtet. Auf die Einheitskreislinie wird der Punkt C gelegt, dessen Verbindungsstrecke zum Koordinatenursprung mit der x-Achse den Winkel α einschließt Der Punkt C ades Dreiecks ABC hat die Koordinaten $C = (x; y)$. In dem abgebildeten rechtwinkligen Dreieck entspricht die Hypotenuse dem Radius des Einheitskreises und hat damit die Länge $r = 1$. Die Länge der Gegenkathete entspricht der y-Koordinate des Punktes C; analog entspricht die Länge der Ankathete der x-Koordinate. Daher gilt:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{y}{1} = y$$

und

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{x}{1} = x \ .$$

Da die Koordinaten des Punktes C mithilfe von α ausgedrückt werden kann, wird C auch mit C_α bezeichnet.

Es gilt also, dass die Koordinaten von C_α gegeben sind durch

$$C_\alpha = \big(\cos(\alpha); \sin(\alpha)\big).$$

Bisher wurden nur Winkel $0° < \alpha < 90°$ betrachtet. Man kann den Punkt C_α f"ur beliebige Winkel im Kreis ($0° \leq \alpha \leq 360°$) definieren. Er ist auch f"ur negative und beliebig gro"se Winkel definiert. Negative Winkel entstehen, wenn in mathematisch negativer Richtung am Kreis entlang gegangen wird (mit dem Uhrzeigersinn). Winkel, die gr"o"ser als 360° sind, k"onnen durch Addition eines Winkels zwischen $< 0°$ und $< 360°$ und Vielfachen des Vollwinkels 360° dargestellt werden. Dies wird in den beiden folgenden Bildern noch einmal visualisiert.

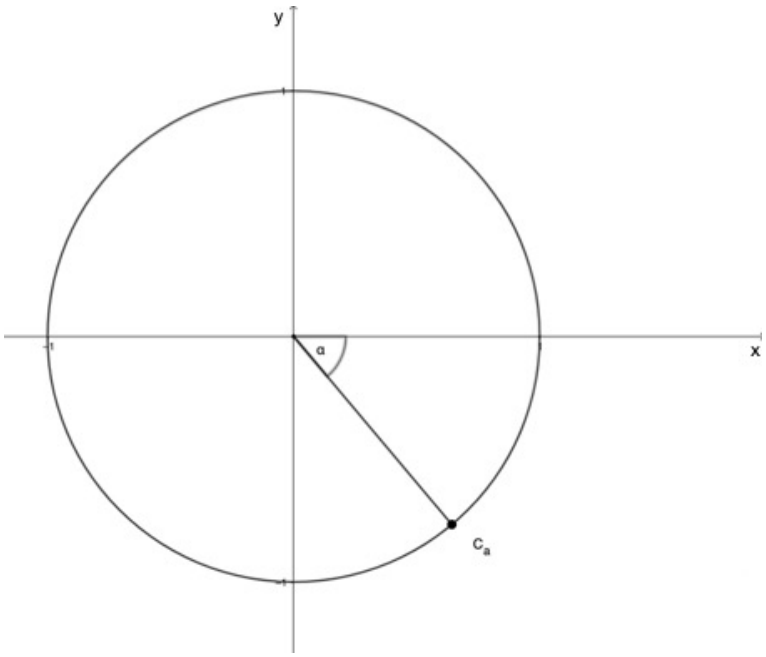


Bild 10 Darstellung von C_α für einen Winkel $-90° \leq \alpha \leq 0°$.

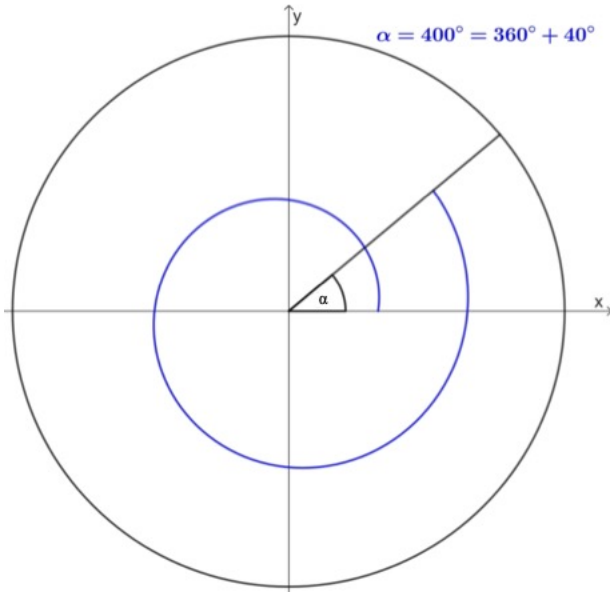


Bild 11 Darstellung des Punktes C_α zu einem Winkel der Gr"o"se $400° = 40° + 360°$.

Man definiert nun den Sinus und Cosinus für beliebige Winkel α:

Definition 1:
Für beliebige Winkel α versteht man unter $\sin(\alpha)$ den Wert der y-Koordinate des Punktes C_α am Einheitskreis und unter $\cos(\alpha)$ den Wert der x-Koordinate des Punktes C_α am Einheitskreis.

Definition 2:

Die Zuordnungen von einem beliebigen Winkel α im Gradmaß, der einer reellen Zahl entspricht, zu den Werten $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ lassen sich als Funktionen auffassen. Ihre Definitionsmengen sind jeweils ganz $\mathbb{R}$, wobei man eine reelle Zahl dabei als den Wert des Winkels auffasst. Da Sinus und Cosinus nur Werte zwischen -1 und 1 einschließlich annehmen können, sind die Wertemengen $[-1;1]$. Man erhält also die beiden Funktionen

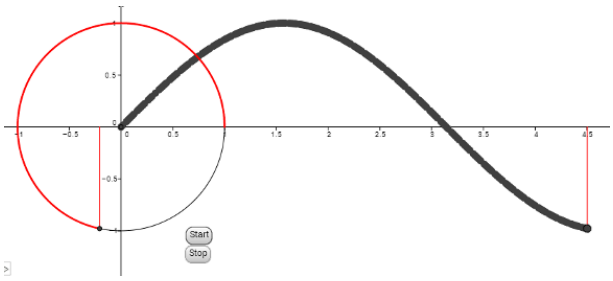
$$\sin : \mathbb{R} \to [-1;1]$$

und

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1;1],$$

die jedem $\alpha \in \mathbb{R}$ die Werte $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ zuordnen.

Oft schreibt man im Argument von sin und cos das Gradzeichen $^\circ$ aber explizit hin (z. B. $\sin(30^\circ)$), nämlich insbesondere wenn man verdeutlichen möchte, dass die Winkel in Grad angegeben sind. In diesem Kapitel lernen Sie nämlich auch noch die Angabe von Winkeln im sogenannten Bogenmaß kennen, welches neben dem Gradmaß, das hier bisher verwendet wurde, eine weitere Möglichkeit ist, Werte von Winkeln auszudrücken. Man muss also berücksichtigen, ob man die Argumente von Sinus und Cosinus im Gradmaß oder im Bogenmaß verwendet. Mehr zu trigonometrischen Funktionen finden Sie auch in Kapitel 8.4.



Interaktion 2 *(nur in digitaler Version)*

Alle Werte von $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ können auf die Werte im Intervall $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ zurückgeführt werden. Aufgrund geometrischer "Uberlegungen gilt:

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$
$90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$	$\sin(180^\circ - \alpha)$	$-\cos(180^\circ - \alpha)$
$180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$	$-\sin(-180^\circ + \alpha)$	$-\cos(-180^\circ + \alpha)$
$270^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$	$-\sin(360^\circ - \alpha)$	$\cos(360^\circ - \alpha)$
$-90^\circ \leq \alpha \leq 0^\circ$	$-\sin(-\alpha)$	$\cos(-\alpha)$
$-180^\circ \leq \alpha \leq -90^\circ$	$-\sin(180^\circ + \alpha)$	$-\cos(180^\circ + \alpha)$
$-270^\circ \leq \alpha \leq -180^\circ$	$\sin(-180^\circ - \alpha)$	$-\cos(-180^\circ - \alpha)$
$-360^\circ \leq \alpha \leq -270^\circ$	$\sin(360^\circ + \alpha)$	$\cos(360^\circ + \alpha)$

Es gilt allgemein:

Satz 2:

Die Sinus- und Cosinusfunktion sind beide periodisch mit Periode 360°. Es gilt f"ur beliebige Winkel α und $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \sin(\alpha + k \cdot 360°), \\ \cos(\alpha) &= \cos(\alpha + k \cdot 360°). \end{aligned}$$

Dies folgt unmittelbar aus der geometrischen Definition.

Klicken Sie hier für eine weitere Veranschaulichung. *(Aufklapptext)*

Die Sinus- und Cosinuswerte sind am Einheitskreis als Koordinaten eines Punktes C_α in Abh"angigkeit des Winkels α definiert. Wird der Winkel α, zu dem der Sinus- und Cosinuswert bestimmt werden soll, um 360° verändert, so ver"andert der Punkt C_α seine Lage auf dem Einheitskreis nicht. Dies gilt auch bei der Drehung des Winkels α um ganzzahlige Vielfache von 360°. Wird der Punkt um 360° in mathematisch negativer Richtung gedreht, so ver"andert sich der Sinus- und Cosinuswert ebenfalls nicht!

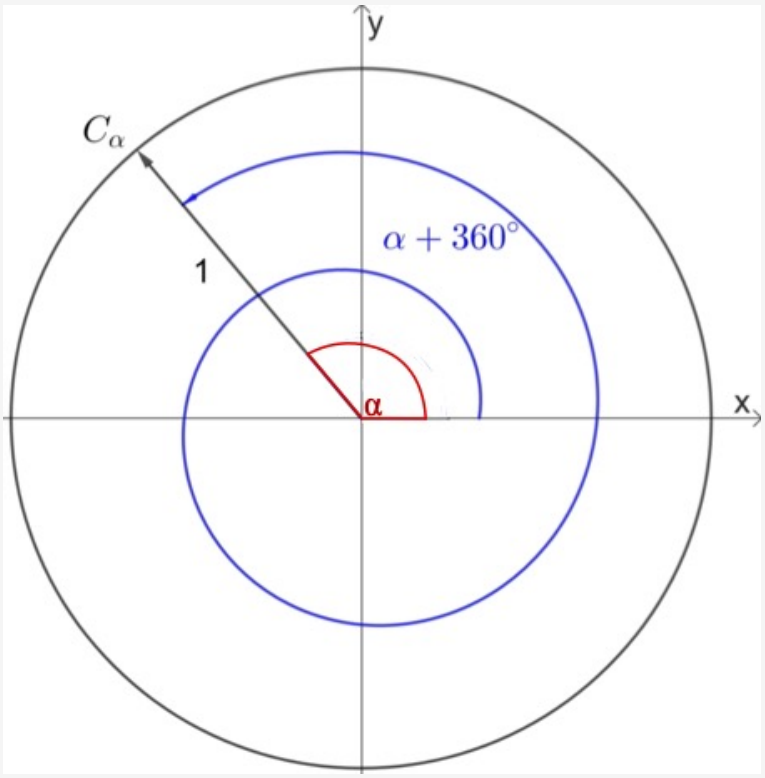


Bild 12 Periodizit"at der Sinus- und Cosinusfunktion

Es gilt somit f"ur $k \in \mathbb{Z}$ und α:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) &= \sin(\alpha + 360°)\\ &= \sin(\alpha + 2 \cdot 360°)\\ &= \sin(\alpha + 3 \cdot 360°)\\ &= \dots\\ &= \sin(\alpha + k \cdot 360°)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \cos(\alpha + 360°)\\ &= \cos(\alpha + 2 \cdot 360°)\\ &= \cos(\alpha + 3 \cdot 360°)\\ &= \dots\\ &= \cos(\alpha + k \cdot 360°).\end{aligned}$$

Eine weitere Eigenschaft l"asst sich am Einheitskreis mithilfe des Satzes des Pythagoras zeigen. Diese wird trigonometrischer Pythagoras genannt.

Satz 3: (Trigonometrischer Pythagoras)
Für beliebige Winkel α gilt:

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1.$$

Beweis *(Aufklapptext)*

In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit rechtem Winkel im Punkt C und den Seitenlängen a,b und c gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

. Für einen Winkel α wird der Punkt C_α auf dem Einheitskreis dargestellt durch $C_\alpha = (\cos(\alpha); \sin(\alpha))$. Diese Koordinaten stellen die L"angen der Katheten in einem rechtwinkligen Dreieck mit Eckpunkt C_α dar. Da die L"ange der Hypotenuse 1 ist, ergibt sich mit dem Satz des Pythagoras:

$$(\cos(\alpha))^2 + (\sin(\alpha))^2 = 1^2$$

oder anders ausgedr"uckt:

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

Bemerkung: $\cos^2(\alpha)$ und $\sin^2(\alpha)$ sind hier andere Schreibweisen für $(\cos(\alpha))^2$ bzw. $(\sin(\alpha))^2$.

Exkurs zur Umrechnung von Grad- und Bogenma"s

F"ur die Angabe der Gr"o"se eines Winkels gibt es verschiedene Winkelma"se. Das gebr"auchlichste Ma"s ist das Gradma"s, welches wir zuvor verwendet haben. Dieses beruht auf der Einteilung des

vollen Kreises in 360 gleichgro"se Teile. Diese Einteilung hat einen historischen Hintergrund und ist in der Praxis nicht immer vorteilhaft. Zur Veranschaulichung wird nun die positive x-Achse und ein vom Ursprung des Koordinatensystems ausgehender Strahl wie in der folgenden Abbildung dargestellt:

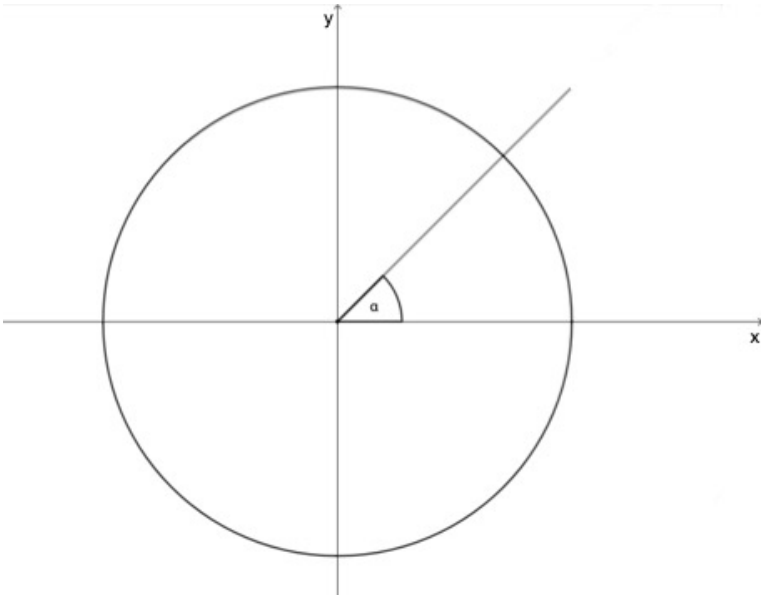


Bild 13 Einheitskreis mit vom Ursprung ausgehenden Strahl

Die x-Achse schlie"st mit diesem Strahl dann einen Winkel α ein.
Ein weiteres System zur Angabe einer Winkelgr"o"se ist das so genannte Bogenma"s. Beim Bogenma"s wird die Gr"o"se eines Winkels α durch die L"ange b des entsprechenden Bogens am Einheitskreis gemessen, wie in der nächsten Abbildung zu sehen ist.

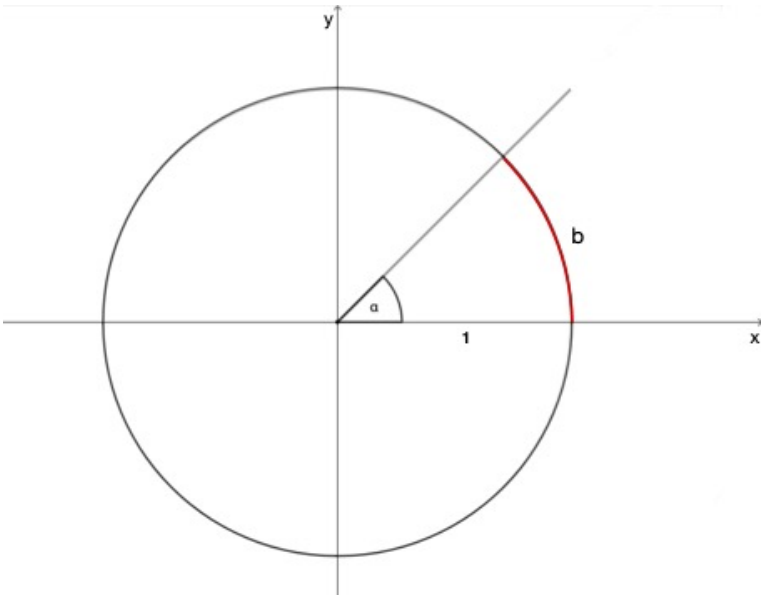


Bild 14 Einheitskreis mit vom Ursprung ausgehenden Strahl

Es wird also anstatt den Winkel α in Grad anzugeben, die L"ange b des Bogens als Ma"s f"ur die Gr"o"se des Winkels verwendet.

Definition 3:
Unter dem Bogenma"s b eines Winkels α (im Gradma"s) wird die L"ange desjenigen Bogens verstanden, der dem Winkel α im Einheitskreis gegen"uber liegt.

Bemerkung: Beim Bogenmaß spielt das Vorzeichen des Winkels eine Rolle: Positive Winkel werden gegen den Uhrzeigersinn, negative im Uhrzeigersinn gemessen. Außerdem sind Mehrfachumrundungen möglich, sodass sich Winkel um Vielfache von 360° bzw. 2π unterscheiden können.

Der Vollwinkel im Bogenma"s ist somit durch den Umfang des Einheitskreises ($U = 2 \cdot \pi$) gegeben. Hat nun ein vom Ursprung ausgehender Strahl nicht den Vollwinkel "uberstrichen, sondern nur einen Teil davon, so hat der auf dem Einheitskreis durchlaufene Bogen nur eine anteilige L"ange von 2π.

Satz 4:
Sei α ein Winkel im Gradmaß und b der zugehörige Winkel im Bogenma"s. Dann gilt:

$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{b}{2\pi}.$$

Aus dieser Gleichung l"asst sich erkennen, dass man das Gradma"s in das Bogenm"a"s umrechnen kann und umgekehrt:

$$b = \frac{\alpha \cdot \pi}{180°}\ , \quad \alpha = \frac{b \cdot 180°}{\pi}\ .$$

Beim Bogenma"s wurde durch den Einheitskreis ein Spezialfall betrachtet. Was ergibt sich aber f"ur die Bogenl"ange bei einem Kreis, f"ur den $r \neq 1$ gilt?
Es l"asst sich feststellen, dass das Verh"altnis $\frac{b_r}{r} = \frac{\text{Kreisbogen}}{\text{Kreisradius}}$ stets konstant ist und es gilt:

$$\frac{b_r}{r} = \frac{\alpha \cdot \pi}{180°} \Rightarrow b_r = \frac{\alpha \cdot \pi}{180°} \cdot r\ .$$

Hinweis: Sowohl f"ur das Grad- als auch das Bogenma"s werden f"ur den umlaufenden Strahle beliebig viele Uml"aufe des Einheitskreises zugelassen, d. h. es ist

$$b = \frac{\alpha \cdot \pi}{180°}$$

f"ur beliebige Winkel α definiert.
In physikalischen und ingenieurwissenschaftlichen Anwendungen wird meist statt dem Gradma"s das Bogenma"s verwendet. Daher wird in diesem Kapitel ab jetzt das Bogenma"s verwendet.

Typische Winkel im Grad- und Bogenma"s

Die nachfolgende Tabelle stellt einige Winkel im Grad- und Bogenma"s gegen"uber.

Gradma"s	$-90°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$	$720°$
Bogenma"s	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2} \cdot \pi$	$2 \cdot \pi$	$4 \cdot \pi$

Sinus- und Cosinusfunktionen im Bogenma"s

Man definiert den Sinus und den Cosinus im Bogenmaß, indem man die bekannten Funktionen sin und cos benutzt und das Bogenmaß zuvor in das Gradmaß umrechnet. Um das mathematisch korrekt zu machen, gibt man den neuen Funktionen für das Bogenmaß zunächst einen anderen Namen. Hier werden nun Großbuchstaben am Anfang genutzt:

Definition 4:
Für Winkel $x \in \mathbb{R}$ im Bogenmaß wird definiert:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sin}(x) &:= \sin\left(\frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ\right), \\ \mathrm{Cos}(x) &:= \cos\left(\frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ\right) . \end{aligned}$$

Der Ausdruck $\frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ$ entspricht dabei dem Winkel im Gradmaß, wenn x den Winkel im Bogenmaß darstellt.

Bemerkung

- Die Funktionen Sin und Cosin unterscheiden sich von sin und cos, denn die Variablen haben andere Bedeutungen. Da aber normalerweise klar ist, ob man das Gradmaß oder das Bogenmaß verwendet, werden im Folgenden auch Sinus und Cosinus mit Kleinbuchstaben geschrieben. Es muss daher aus dem Kontext klar sein oder dazu gesagt werden, ob Winkel und damit die Argumente der Sinus- und Cosinusfunktion im Gradmaß oder Bogenmaß gemeint sind. Oft werden kleine griechische Buchstaben für Winkel in Gradmaß und kleine lateinische Buchstaben für Winkel im Bogenmaß verwendet.

Satz 5: (Periodizit"at von Sinus- und Cosinusfunktionen im Bogenma"s)
Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sin(x + k \cdot 2\pi) \\ \text{und} \quad \cos(x) &= \cos(x + k \cdot 2\pi) . \end{aligned}$$

Die Periodenlänge beträgt 2π.

Bemerkung:
Diese Aussage entspricht dem weiter oben angegebenen Satz zur Periodizität von Sinus und Cosinus im Gradmaß, da 2π genau 360° entsprechen.

Satz 6:
Die trigonometrischen Funktionen sin und cos besitzen die folgenden Nullstellen.

$$\begin{aligned} &\text{Sinusfunktion:} && x = k \cdot \pi, \\ &\text{Cosinusfunktion:} && x = \tfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi \\ & && \text{für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Im Gradmaß sind das die folgenden Nullstellen:

Sinusfunktion:	$x = k \cdot 180°$,
Cosinusfunktion:	$x = 90° + k \cdot 180°$.
	für alle $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$.

Begr"undung *(Aufklapptext)*

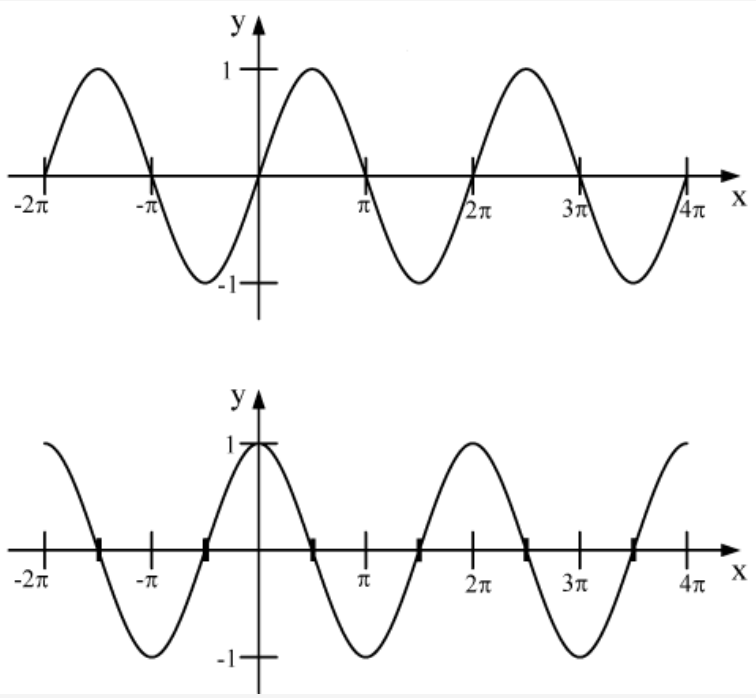


Bild 15 Nullstellen der Sinusfunktion (oben) und der Cosinusfunktion (unten)

Aus der geometrischen Definition der Funktionen am Einheitskreis ergibt sich, dass der Sinus im halboffenen Intervall $[0; 2\pi)$ an den Stellen 0 und π Nullstellen hat. Hierbei wurde im Bogenmaß gearbeitet. Durch die 2π-Periodizität gibt es dann auch Nullstellen bei 2π und 3π und weiter bei 4π und 5π und so weiter. Weitere Nullstellen bekommt man, indem man jeweils um 2π nach links geht. All diese Nullstellen lassen sich zusammenfassend schreiben als

$$x = k \cdot \pi \text{ für } k \in \mathbb{Z}.$$

Das Bogenmaß von π entspricht im Gradmaß 180°, also sind die Nullstellen von sin im Gradmaß:

$$\alpha = k \cdot 180°.$$

Ebenso ergibt sich aus der geometrischen Definition der Funktionen am Einheitskreis, dass der Cosinus im halboffenen Intervall $[0; 2\pi)$ an den Stellen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ Nullstellen hat. Durch

die 2π-Periodizität gibt es dann auch Nullstellen bei $\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2} + 2\pi = \frac{7\pi}{2}$ und weiter bei $\frac{\pi}{2} + 4\pi = \frac{9\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2} + 4\pi = \frac{11\pi}{2}$ und so weiter. Weitere Nullstellen bekommt man, indem man jeweils um 2π nach links geht. Das lässt sich so zusammenfassen:

$$\text{Nullstellen Cosinus: } x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \text{ für } k \in \mathbb{Z}.$$

Im Gradmaß sind die Nullstellen der Cosinusfunktion:

$$\alpha = 90° + k \cdot 180°.$$

Satz 7:

Die Sinusfunktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung, d.h. es gilt:

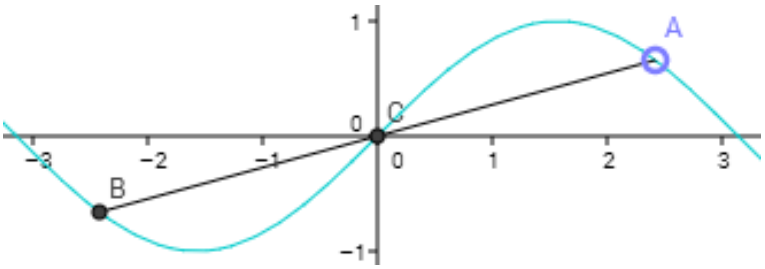
$$\sin(-x) \quad = \quad -\sin(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Die Cosinusfunktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse, d.h. es gilt:

$$\cos(-x) \quad = \quad \cos(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

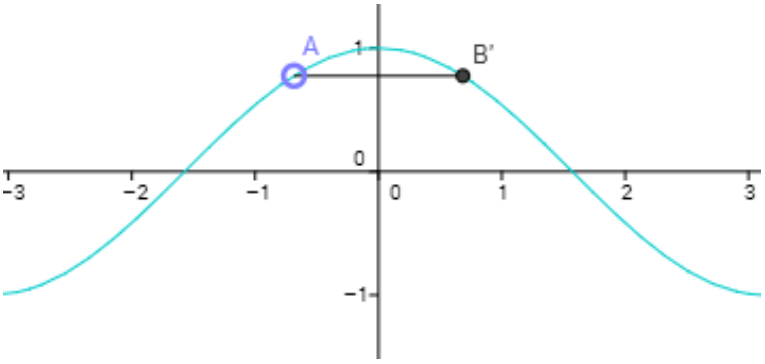
Anschauliche Begr”undungen:

Punktsymmetrie der Sinusfunktion:



Interaktion 3 *(nur in digitaler Version)*

Achsensymmetrie der Cosinusfunktion:



Interaktion 4 *(nur in digitaler Version)*

Die folgenden Abbildungen stellen diesen Zusammenhang noch einmal grafisch dar. Der Graph der Sinusfunktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung $O = (0; 0)$.

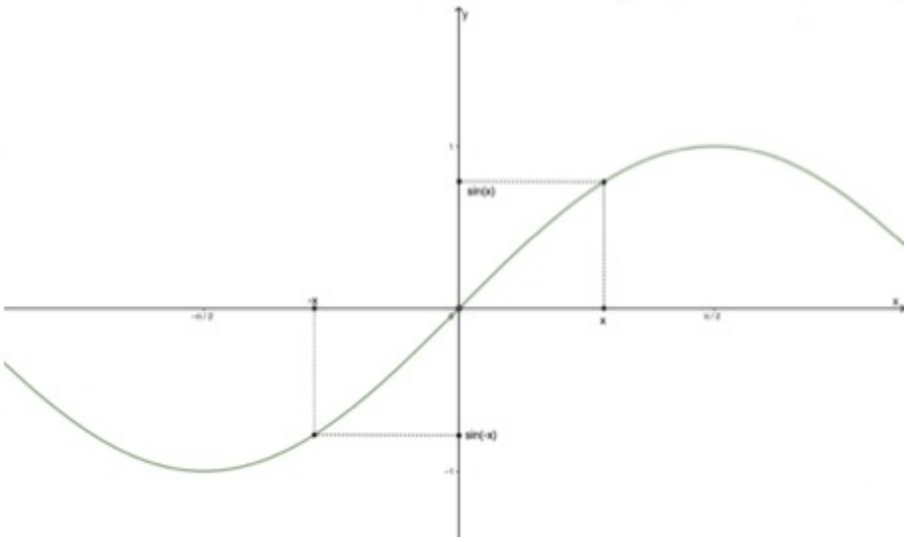


Bild 16 Symmetrie der Sinusfunktion

Es gilt also

$$\sin(x) = -\sin(-x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Der Graph der Cosinusfunktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

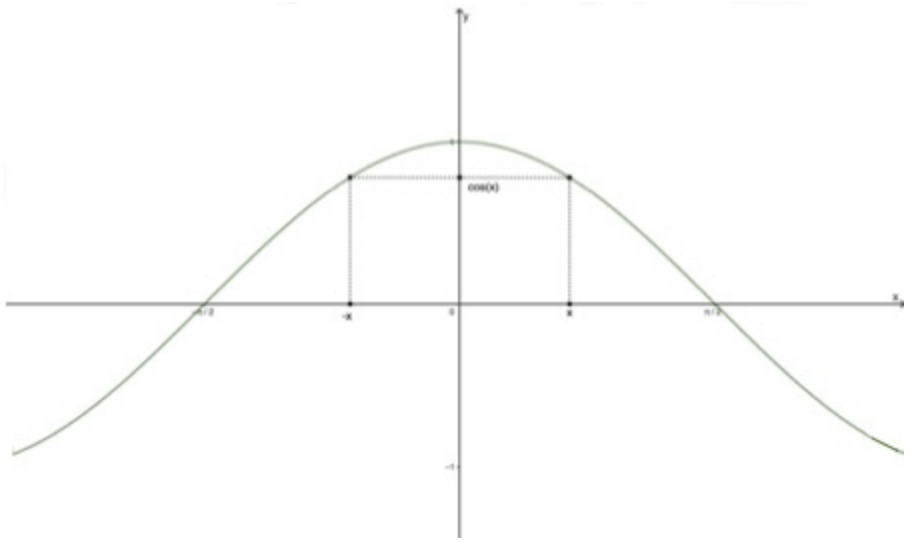


Bild 17 Symmetrie der Cosinusfunktion

Es gilt also:

$$\cos(x) = \cos(-x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Info 2:
Es bestehen folgende Zusammenh"ange zwischen Sinus und Cosinus:

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$			x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\frac{\pi}{2}+x$	$\cos(\alpha)$	$-\sin(\alpha)$			$\frac{\pi}{2}-x$	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$
$\pi+x$	$-\sin(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$			$\pi-x$	$\sin(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$
$\frac{3}{2}\pi+x$	$-\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$			$\frac{3}{2}\pi-x$	$-\cos(\alpha)$	$-\sin(\alpha)$
$2\pi+x$	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$			$2\pi-x$	$-\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$

Die Tangensfunktion

Der Tangens wird an rechtwinkligen Dreiecken als Quotient aus Gegenkathete und Ankathete definiert, denen α gegenüberliegt:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}.$$

Man kann diesen Bruch erweitern und erhält dabei den Quotienten aus Sinus und Cosinus:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}}{\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

Es liegt daher nahe, ganz allgemein die Tangensfunktion als Quotient aus der Sinus- und der Cosinusfunktion zu definieren. Beachten muss man dabei, dass der Nenner nie den Wert Null annehmen darf, so dass die Nullstellen der Cosinusfunktion aus der Definitionsmenge der Tangensfunktion ausgeschlossen werden müssen:

Definition 5:
Für beliebige Winkel α mit $\cos(\alpha) \neq 0$ ist der Tangens definiert als

$$\tan(\alpha) := \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\ .$$

Bemerkung

- Die Definitionsmenge der Tangensfunktion ist $\mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Die Wertemenge ist $\mathbb{R}$. Man schreibt also tan: $\mathbb{R} \setminus \left\{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$.

Da Sinus- und Cosinusfunktion 2π-periodisch sind, ist die Tangensfunktion auch 2π-periodisch. Tatsächlich ist die Periode der Tangensfunktion aber noch kleiner, nämlich π. Das lässt sich an folgender Rechnung sehen, für die Sie die Werte aus der Tabelle in Info 2 nutzen können. Für Winkel x im Bogenmaß gilt

$$\begin{aligned}\tan(x+\pi) &= \tfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} \\ &= \tfrac{-\sin(x)}{-\cos(x)} \\ &= \tfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ &= \tan(x).\end{aligned}$$

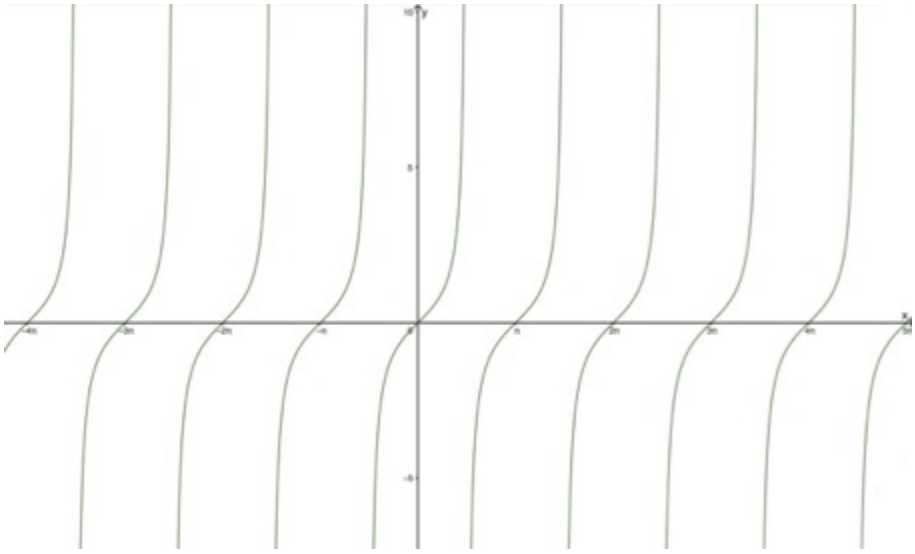


Bild 18 Der Graph der Tangensfunktion

Bestimmung von Winkelgr”o”sen im rechtwinkligen Dreieck

Nun sollen Winkelgr”o”sen in rechtwinkligen Dreiecken bestimmt werden, wenn zwei Seitenl”angen bekannt sind. Daf”ur werden die Umkehrfunktionen von Sinus, Cosinus und Tangens ben”otigt. Diese werden nun definiert und die Anwendung an Beispielen demonstriert.

Verweis *(Aufklapptext)*

> Falls Sie weiterf”uhrende Informationen zu Umkehrfunktionen suchen, schauen Sie bitte in das Kapitel „Umgang mit Funktionen “in der Lerneinheit 8 „H”ohere Funktionen “.

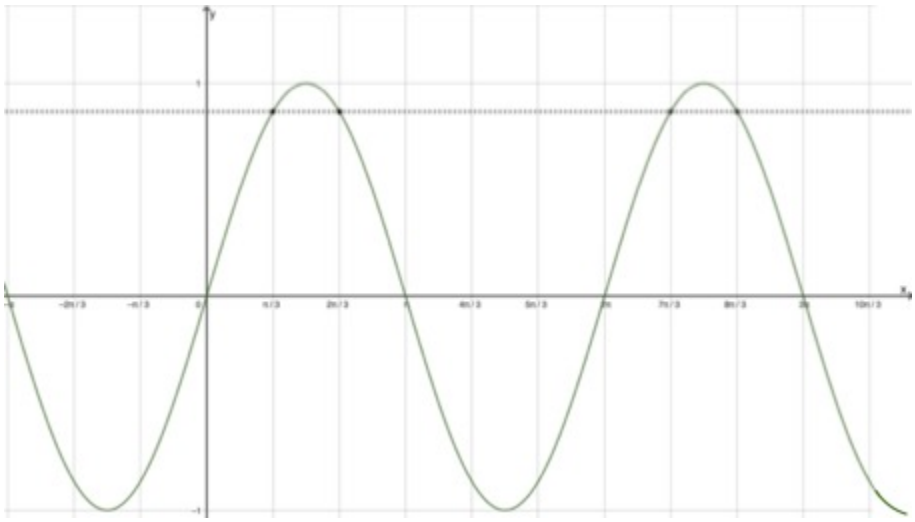


Bild 19

Am Graphen der Sinusfunktion kann man sehen, dass es zu einem gegebenen Funktionswert mehrere Winkel gibt, die diesen Wert haben, z.B. ist $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sowohl für $x = \frac{\pi}{3}$ als auch für $x = \frac{7\pi}{3}$ –

und dank der Periodizität auch noch für unendlich viele andere x-Werte. Für eine Umkehrfunktion muss man aber sicherstellen, dass jeder Sinus-Wert nur von genau einem x-Wert getroffen wird. Das kann man hier erreichen, indem man die Definitionsmenge der Sinusfunktion einschränkt. Es gibt mehrere Möglichkeiten, das zu tun. Da wir an Winkeln in rechtwinkligen Dreiecken interessiert sind (d.h. Winkel zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ im Bogenmaß), bietet es sich an, den Sinus auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ zu betrachten. Der Graph der Sinusfunktion auf $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ davon sieht so aus:

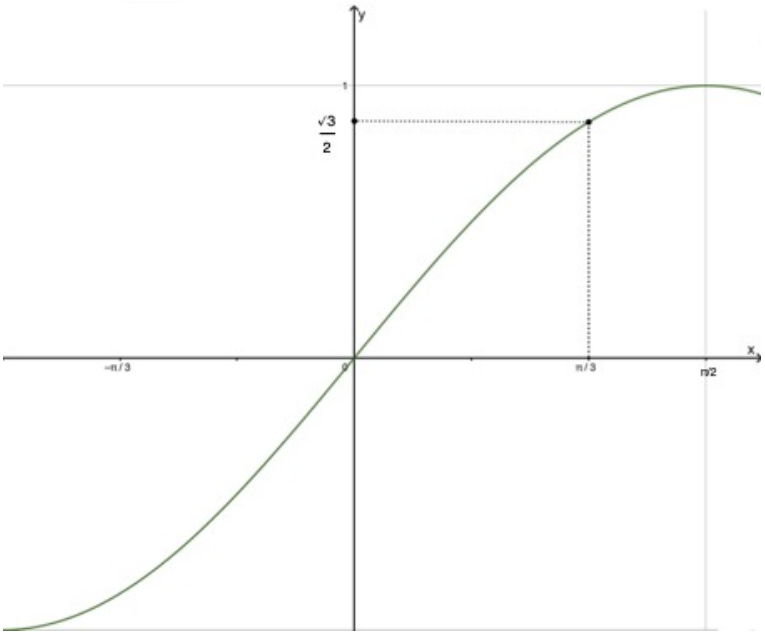


Bild 20

Hier ist jetzt anschaulich klar, dass es zu jedem y in $[-1;1]$ genau ein x gibt mit $y = \sin(x)$. Diesen x-Wert zu einem gegebenen y nennen wir $x = \arcsin(y)$. Damit können wir nun eine Umkehrfunktion definieren.

Definition 6: (Umkehrfunktion von Sinus)
Die Umkehrfunktion von $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$. Sinus wird **Arkussinus** genannt und mit $\arcsin : [-1;1] \to \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ bezeichnet

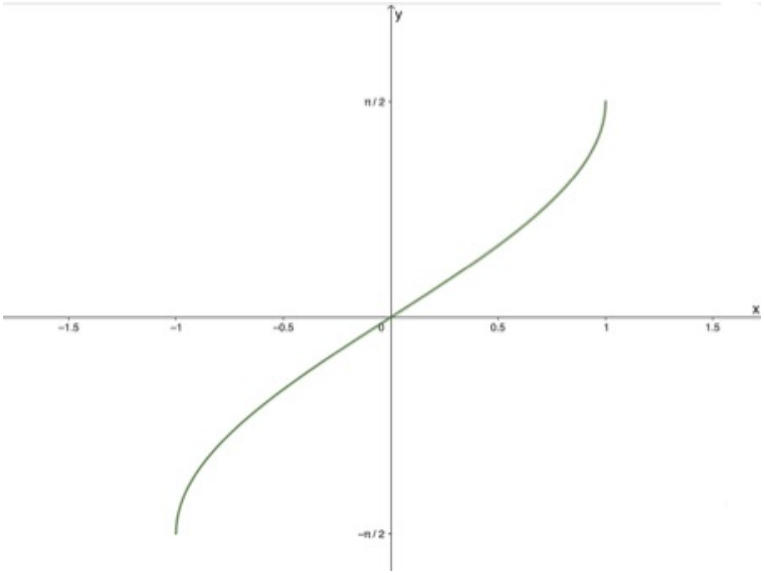


Bild 21 Der Graph der Arkussinusfunktion.

Bemerkungen

- Hierbei wurde die unabhängige Variable nun in x umbenannt, da das die übliche Bezeichnung der Variablen in der Arkussinusfunktion ist.
- F"ur $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ und $x \in [-1, 1]$ gilt:

$$y = \arcsin(x) \Leftrightarrow x = \sin(y) \ .$$

Wenn die Definitionsmenge der Cosinusfunktion auf das Intervall $[0; \pi]$ eingeschr"ankt wird, ist es ebenfalls m"oglich, ihre Umkehrfunktion zu definieren:

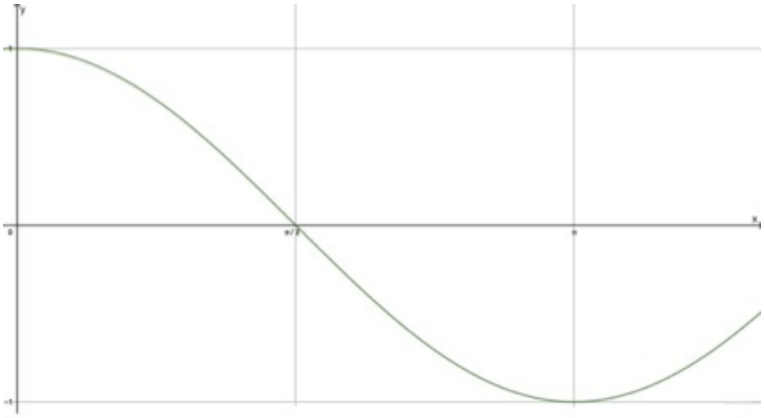


Bild 22

Definition 7: (Umkehrfunktion von Cosinus)
Die Umkehrfunktion des von $\cos : [0; \pi] \to \mathbb{R}$ wird **Arkuscosinus** genannt und mit $\arccos : [-1; 1] \to [0; \pi]$ mit $x \mapsto \arccos(x)$ bezeichnet

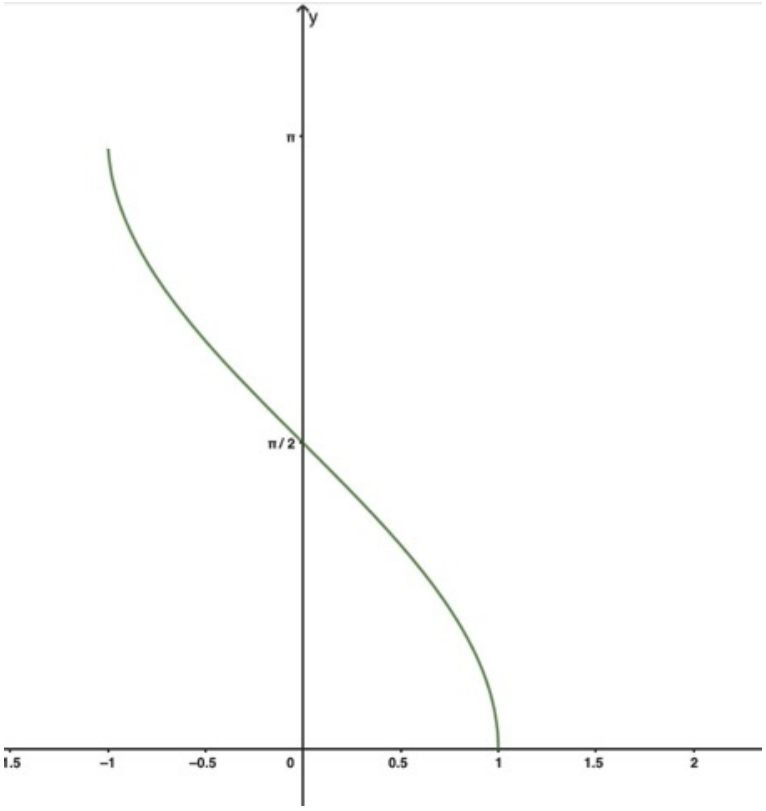


Bild 23 Der Graph der Arkuscosinusfunktion.

Bemerkung
F"ur $y \in [0;\pi]$ und $x \in [-1,1]$ gilt:

$$y = \arccos(x) \Leftrightarrow x = \cos(y) \ .$$

Wenn die Definitionsmenge der Tangensfunktion auf das Intervall $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ eingeschr"ankt wird, ist es genauso m"oglich, ihre Umkehrfunktion zu definieren. Da die Tangensfunktion auf $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ die Wertemenge $\mathbb{R}$ hat, hat die Umkehrfunktion Definitionsmenge $\mathbb{R}$ und Wertemenge $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Definition 8: (Umkehrfunktion des Tangens)
Die Umkehrfunktion des Tangens wird **Arkustangens** genannt:

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$$

.

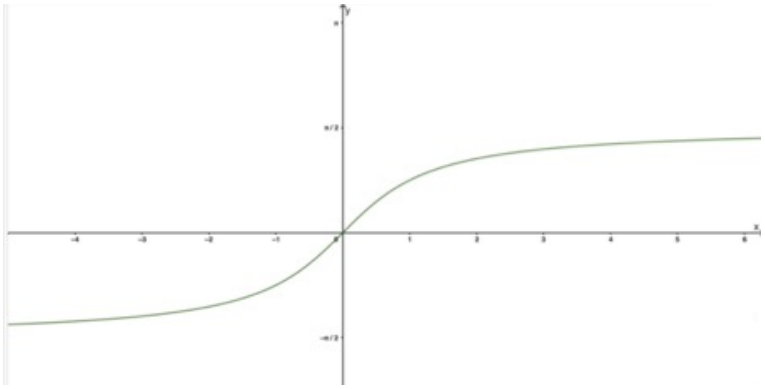


Bild 24 Der Graph der Arkustangensfunktion.

Bemerkung
F"ur $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$y = \arctan(x) \Leftrightarrow x = \tan(y) \ .$$

Durch die Definition dieser Umkehrfunktionen k"onnen Winkelgr"o"sen im rechtwinkligen Dreieck bestimmt werden. Dazu werden nun drei Beispiele betrachtet.

Beispiel 1:

Gegeben ist folgendes rechtwinkliges Dreieck:

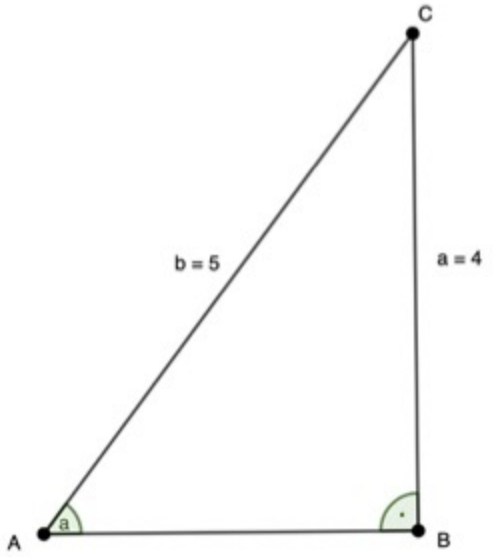


Bild 25

Bestimmt werden soll die Gr"o"se des Winkels α in Grad. Dazu wird zun"achst die Definition des Sinus verwendet, um eine Gleichung aufzustellen, die nach α umgestellt werden kann:

$$\sin(\alpha) = \frac{4}{5} = 0,8 \ .$$

Diese Gleichung wird durch Anwendung des Arkussinus nach α aufgel"ost:

$$\alpha = \arcsin(\sin(\alpha)) = \arcsin(0,8) \Rightarrow \alpha = \arcsin(0,8) \approx 53,13^\circ \ .$$

Der Winkel α hat somit eine Gr"o"se von ungef"ahr $53,13^\circ$.
Man berechnet $\arcsin(0,8)$ mit dem Taschenrechner. Dort wird der Arkussinus oft mit $\sin^{-1}$ bezeichnet. Bei der Berechnung müssen Sie darauf achten, dass der Rechner auf das Gradmaß eingestellt ist oder von Bogen- in das Gradmaß umrechnen.

Beispiel 2:

Gegeben ist folgendes rechtwinkliges Dreieck:

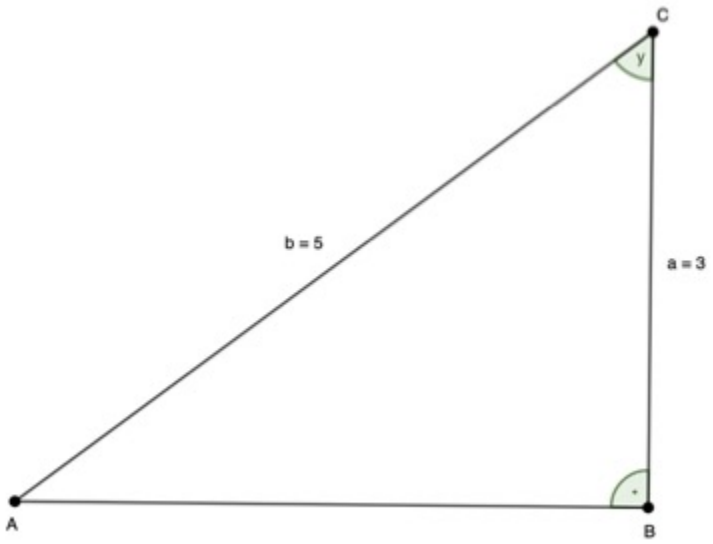


Bild 26

Bestimmt werden soll die Gr"o"se des Winkels γ in Grad. Dazu wird zun"achst die Definition des Cosinus verwendet, um eine Gleichung aufzustellen, die nach γ umgestellt werden kann:

$$\cos(\gamma) = \frac{3}{5} = 0,6 \ .$$

Diese Gleichung wird durch Anwendung des Arkuscosinus nach γ aufgel"ost:

$$\gamma = \arccos(\cos(\gamma)) = \arccos(0,6) \approx 53,13^\circ \ .$$

Der Winkel γ hat somit eine Gr"o"se von ungef"ahr $53,13^\circ$.
Dass derselbe Winkel herauskommt wie in Beispiel 1 ist nicht überraschend, denn es sind im Prinzip dieselben Dreiecke. Rechnen Sie jeweils mit dem Satz des Pythagoras die dritte Seite aus, um sich davon zu überzeugen.

Beispiel 3:

Gegeben ist folgendes rechtwinkliges Dreieck:

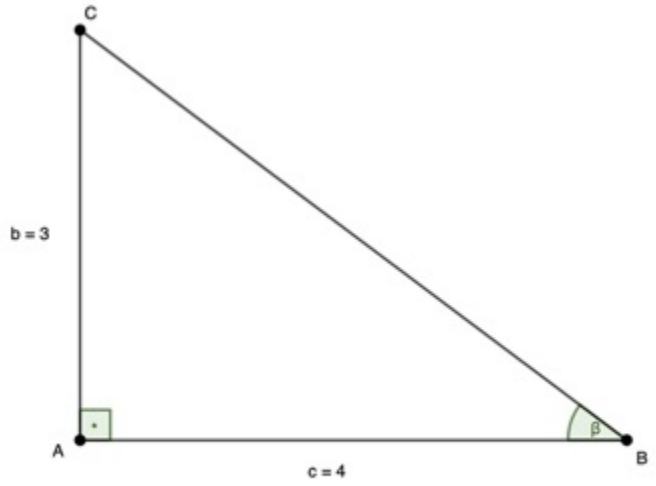


Bild 27

Bestimmt werden soll die Gr"o"se des Winkels β in Grad. Dazu wird zun"achst die Definition des Tangens verwendet, um eine Gleichung aufzustellen, die nach β umgestellt werden kann:

$$\tan(\beta) = \frac{3}{4} = 0,75 \ .$$

Diese Gleichung wird durch Anwendung des Arkustangens nach β aufgel"ost:

$$\beta = \arctan(\tan(\beta)) = \arctan(0,6) \approx 36,87° \ .$$

Der Winkel β hat somit eine Gr"o"se von ungef"ahr $36,87°$.

Durch die Einf"uhrung der Sinus- und Cosinusfunktion am Einheitskreis hat sich auch das Einsatzgebiet in der Dreiecksgeometrie vergr"o"sert. Es k"onnen nun auch allgemeine Dreiecke betrachtet werden. Dazu z"ahlen auch stumpfwinklige Dreiecke in denen ein Winkel gr"o"ser ist als $90°$. Die Berechnung von Seitenl"angen und Winkelgr"o"sen in allgemeinen Dreiecken wird in der Lerneinheit „Erg"anzungen zur Trigonometrie “ thematisiert.

Aufgaben

Aufgabe 2:
a) Wandeln Sie folgende Gradma”se ins Bogenma”s um:
$45° =$? , $90° =$? , $135° =$?
b) Wandeln Sie folgende Bogenma”se ins Gradma”s um:
$\pi =$? , $\frac{3\pi}{2} =$? , $2\pi =$?

Lösung:
a) $45° = \frac{\pi}{4}$, $90° = \frac{\pi}{2}$, $135° = \frac{3}{4}\pi$
b) $\pi = 180°$, $\frac{3\pi}{2} = 270°$, $2\pi = 360°$

Aufgabe 3:
Gegeben ist $\cos(\alpha) = 0,8$. Wie gro”s ist $\sin(\alpha)$?
$\sin(\alpha) =$? oder $\sin(\alpha) =$?

Lösung:
Mit dem trigonometrischen Pythagoras ($sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$) ergibt sich

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) &= \pm\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}\\ &= \pm\sqrt{1-0,8^2}\\ &= \pm\sqrt{1-0,64}\\ &= \pm\sqrt{0,36}\\ &= \pm 0,6\end{aligned}$$

Aufgabe 4:
Gegeben ist ein Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei B und den Seitenl”angen $a = 3,5$ und $c = 4,5$. Wie gro”s sind die beiden anderen Winkel? Runden Sie alle Zwischenergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma.
a) $\alpha =$? °
b) $\gamma =$? °

Lösung:
Das Dreieck hat den rechten Winkel bei β, also sind a und c die Katheten des Dreiecks. Um die Winkel α und γ zu bestimmen wird demnach die Gleichung des Tangens zusammen mit der Umkehrfunktion des Tangens verwendet.
a) Es gilt

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{3,5}{4,5} \approx 0,78$$

Durch Anwendung des Arkustangens auf beiden Seiten der Gleichung ergibt sich:

$$\alpha = \arctan(0,78) \approx 37,95^\circ \ .$$

Falls Sie ohne gerundetes Zwischenergebnis rechnen, erhalten Sie

$$\alpha = \arctan\left(\frac{3,5}{4,5}\right) \approx 37,87^\circ \ .$$

b) Es gilt

$$\tan(\gamma) = \frac{c}{a} = \frac{4,5}{3,5} \approx 1,29$$

Durch Anwendung des Arkustangens auf beiden Seiten der Gleichung ergibt sich:

$$\gamma = \arctan(1,29) \approx 52,21^\circ \ .$$

Falls Sie ohne gerundetes Zwischenergebnis rechnen, erhalten Sie

$$\gamma = \arctan\left(\frac{4,5}{3,5}\right) \approx 52,13^\circ \ .$$

Aufgabe 5:
Berechnen Sie den Wert des Terms mithilfe des trigonometrischen Pythagoras. Runden Sie die Ergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma.

a) $\dfrac{\cos(45^\circ)}{\cos^2(28^\circ) + \sin^2(152^\circ)} = \boxed{\ ?\ }$

b) $\dfrac{\sin^2(168^\circ) - \sin^2(102^\circ)}{\sin(30^\circ)} = \boxed{\ ?\ }$

c) $-\sin^2(344^\circ) + \sin^2(140^\circ) - \sin^2(286^\circ) + \sin^2(130^\circ) = \boxed{\ ?\ }$

Lösung:

a) Wegen $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$ für alle Winkel α im Gradmaß und dem trigonometrischen Pythagoras gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{\cos(45^\circ)}{\cos(28^\circ)^2 + \sin(152^\circ)^2} \\ = \ & \frac{\cos(45^\circ)}{\cos(28^\circ)^2 + \sin(180^\circ - 28^\circ)^2} \\ = \ & \frac{\cos(45^\circ)}{\cos(28^\circ)^2 + \sin(28^\circ)^2} \\ = \ & \frac{\cos(45^\circ)}{1} \\ \approx \ & 0,71. \end{aligned}$$

b) Wegen $\sin(270^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$ für alle Winkel α im Gradmaß und dem trigonometrischen

Pythagoras gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(168°)^2 - \sin(102°)^2}{\sin(30°)} \\ = & \frac{\sin(168°)^2 - \sin(270° - 168°)^2}{\sin(30°)} \\ = & \frac{\sin(168°)^2 + \cos(168°)^2}{\sin(30°)} \\ = & \frac{1}{\sin(30°)} \\ = & 2. \end{aligned}$$

c) Mit

$$\begin{aligned} \sin(270° + \alpha) &= -\cos(\alpha) \\ \sin(180° - \alpha) &= \sin(\alpha) \\ \sin(90° + \alpha) &= \cos(\alpha) \\ \sin(360° - \alpha) &= -\sin(\alpha) \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} & -\sin(344°)^2 + \sin(140°)^2 - \sin(286°)^2 + \sin(130°)^2 \\ = & -\sin(360° - 16°)^2 + \sin(90° + 50°)^2 - \sin(270° + 16°)^2 + \sin(180° - 50°)^2 \\ = & -(-\sin(16°))^2 + \cos(50°)^2 - (-\cos(16°))^2 + \sin(50°)^2 \\ = & \cos^2(50°) + \sin^2(50°) - \left(\cos^2(16°) + \sin^2(16°)\right) \\ = & 1 - 1 \\ = & 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 6:
Ein Lichtstrahl, der von Luft in Wasser übergeht, wird zum Lot hin gebrochen. Optisch entsteht hier ein Knick. Nach dem Brechungsgesetz haben Einfalls- (α) und Brechungswinkel (β) bei diesem Übergang folgendes Verhältnis:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = 1,33 \ .$$

Runden Sie die Ergebnisse auf eine Stelle nach dem Komma.

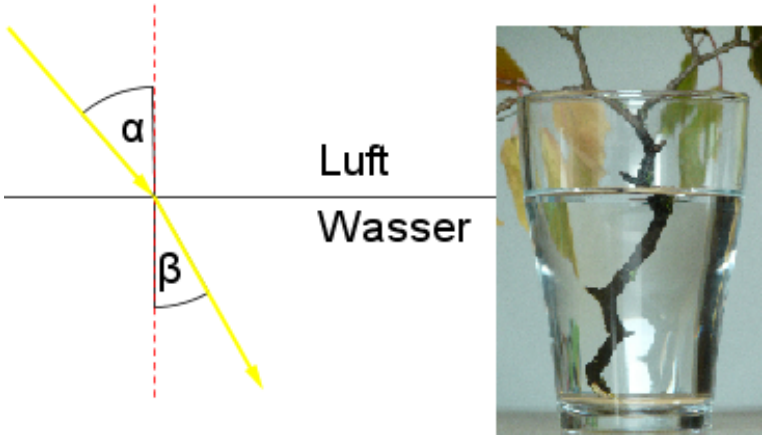


Bild 28

a) Berechnen Sie den Brechungswinkel β bei einem Einfallswinkel von $\alpha = 40°$.
$\beta =$?
b) Berechnen Sie den Einfallswinkel α bei einem Brechungswinkel von $\beta = 23°$.
$\alpha =$?
c) Berechnen Sie den Einfallswinkel α bei dem sich Einfallswinkel und Brechungswinkel zu einem rechten Winkel ergänzen.
$\alpha =$?

Lösung:

a) Es gilt

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = 1,33 \\ \Leftrightarrow \quad & \sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha)}{1,33} \\ \Leftrightarrow \quad & \beta = \arcsin\left(\frac{\sin(\alpha)}{1,33}\right) \\ \Leftrightarrow \quad & \beta = \arcsin\left(\frac{\sin(40°)}{1,33}\right) \\ \text{d.h.} \quad & \beta \approx 28,9°. \end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = 1,33 \\ \Leftrightarrow \quad & \sin(\alpha) = 1,33 \cdot \sin(\beta) \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha = \arcsin(1,33 \cdot \sin(\beta)) \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha = \arcsin(1,33 \cdot \sin(23°)) \\ \text{d.h.} \quad & \alpha \approx 31,3°. \end{aligned}$$

c) Wenn α und β zusammen $90°$ ergeben, gilt $\beta = 90° - \alpha$. Dies kann in das Brechungsgesetz eingesetzt werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = 1,33 \\ . \Leftrightarrow \quad & \frac{\sin(\alpha)}{\sin(90° - \alpha)} = 1,33 \end{aligned}$$

Mit $\cos(\alpha) = \sin(90° - \alpha)$ kann der Term vereinfacht werden zu

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = 1,33$$

Wegen

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

folgt

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} && = && 1,33 \\ \Leftrightarrow \quad & \tan(\alpha) && = && 1,33 \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha && = && \arctan(1,33) \\ \text{, d.h.} \quad & \alpha && \approx && 53,1°. \end{aligned}$$