UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

Virtuelles Eingangstutorium
studiVEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn
FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Virtuelles Eingangstutorium
VEMINT
Mathematik
Informatik
Naturwissenschaften
Technik

khdm
kompetenzzentrum
hochschuldidaktik
mathematik

LE 7 - Trigonometrie

7.3 Erg"anzungen zur Trigonometrie

Im Folgenden finden Sie die Abschnitte:

Übersicht ..... S. 1
Hinführung ..... S. 2
Inhalte mit Erklärungen ..... S. 7
Aufgaben ..... S. 20
Anwendung ..... S. 27

Übersicht

- Sinussatz
- Cosinussatz
- Additionstheoreme

Hinführung

In der ersten Lerneinheit zum Thema Trigonometrie wurden ausschließlich rechtwinklige Dreiecke betrachtet und Vorgehensweisen vorgestellt, um fehlende Seitenl"angen mithilfe der Gleichungen von Sinus, Cosinus und Tangens zu bestimmen. Dazu waren immer der rechte Winkel und die Gr"oße eines weiteren Winkels sowie die L"ange einer Seite bekannt.
In der zweiten Lerneinheit wurden die Sinus-, Cosinus- und Tangensfunktionen definiert, die es erm"oglichen, beliebige Winkel zu betrachten. Durch die Einf"uhrung der Umkehrfunktionen wurde zudem eine M"oglichkeit aufgezeigt, fehlende Winkelgr"o"sen in rechtwinkligen Dreiecken zu bestimmen, wenn zwei Seitenl"angen bekannt sind.
Nun werden zwei M"oglichkeiten zur Bestimmung von Seitenl"angen und Winkelgr"oßen in allgemeinen Dreiecken erl"autert und bewiesen. Außerdem werden die Additionstheoreme f"ur Sinus und Cosinus thematisiert und teilweise bewiesen.

Sinussatz:
Gegeben sei ein allgemeines Dreieck ABC:

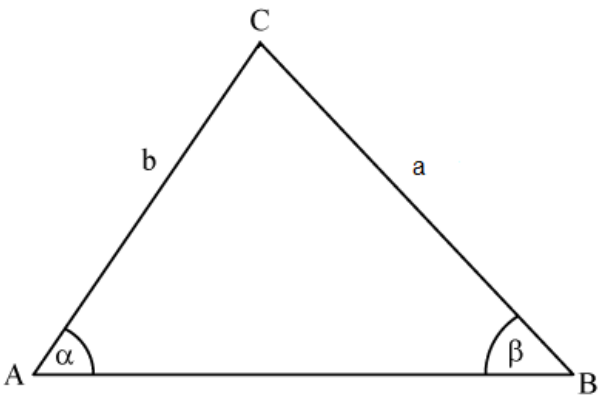


Bild 1 Ausgangsskizze Sinussatz

Wenn man die beiden Winkel α und β gegeben hat und man die L"ange der Seite a festlegt stellt sich die Frage:
Wie kann man nun aus den drei gegebenen Gr"oßen α, β und a direkt die Seitenl"ange von b bestimmen?
Um dieses Problem zu l"osen, bezieht man sich zun"achst auf rechtwinklige Dreiecke zur"uck. Diese k"onnen erzeugt werden, indem in das obige Bild die H"ohe h_c eingezeichnet wird.

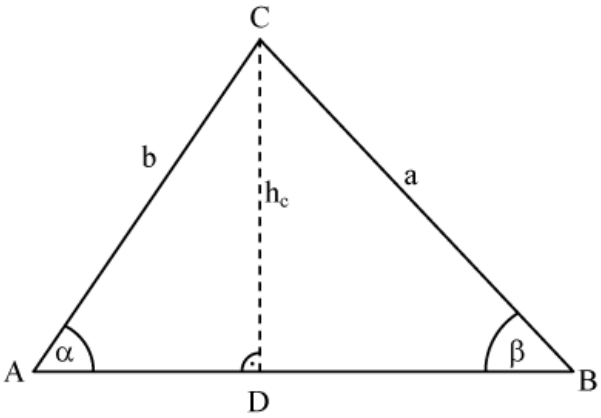


Bild 2 Das Dreieck aus Bild 1 mit eingezeichneter H"ohe h_c.

Wenn das obige Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke aufgeteilt ist kann die H"ohe h_c mithilfe des Sinus einerseits ausgedr"uckt werden durch

$$\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b} \Leftrightarrow h_c = \sin(\alpha) \cdot b$$

und andererseits durch

$$\sin(\beta) = \frac{h_c}{a} \Leftrightarrow h_c = \sin(\beta) \cdot a \ .$$

Setzen wir die Gleichungen aus den jeweils letzten Umformungsschritten gleich, so ergibt sich

$$\sin(\alpha) \cdot b = \sin(\beta) \cdot a \text{ bzw. } \frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \ .$$

Kennen wir drei Gr"oßen aus a, b, α, β in einem allgemeinen Dreieck, so ist es uns m"oglich, durch den so genannten Sinussatz die fehlende Gr"o"se zu bestimmen.

Satz 1: (Sinussatz)

Gegeben sei ein Dreieck mit den Seiten a, b und den Seiten jeweils gegenüberliegenden Winkeln α, β mit $0° < \alpha, \beta < 180°$. Dann gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$$

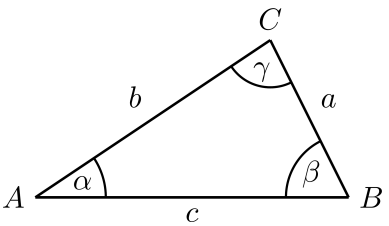


Bild 3

Kommen wir zurück zu unserer Eingangsfrage, wie man b bestimmen kann, falls man a, α und β kennt. Mit dem Sinussatz erhält man

$$b = \frac{a \cdot \sin(\beta)}{\sin(\alpha)} \ .$$

F"ur die Gr"oßen a, c, α, γ bzw. b, c, β, γ kann man entsprechende Formeln herleiten.

Cosinussatz:
Gegeben sind die folgenden Daten des unten dargestellten Dreiecks ABC. Es soll die fehlende Seitenl"ange b berechnet werden. Dabei soll auch eine Formel hergeleitet werden, um die fehlende Seite direkt aus den Angaben bestimmen zu k"onnen.

$$a = 5,2, c = 6,2, \beta = 47°$$

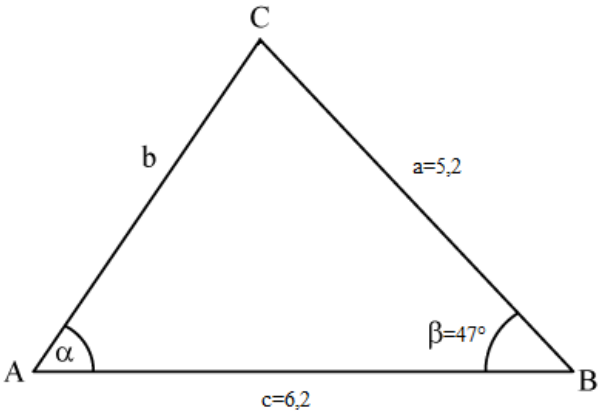


Bild 4 Ausgangsskizze Cosinussatz

Diese Aufgabe ist mit dem Sinussatz nicht zu l"osen, da f"ur die Berechnung der L"ange der fehlenden Seite b mit dem Sinussatz eine Winkelangabe fehlt. Auch an dieser Stelle sollen zur Berechnung wiederum rechtwinklige Dreiecke betrachtet werden, da "uber diese bereits einige Aussagen getroffen wurden.
Wie beim Sinussatz kann das allgemeine Dreieck aus der Skizze oben durch Einzeichnen der H"ohe h_c in zwei rechtwinklige Dreiecke "uberf"uhrt werden. Dabei teilt die H"ohe h_c die Seite c in zwei Abschnitte q und p.

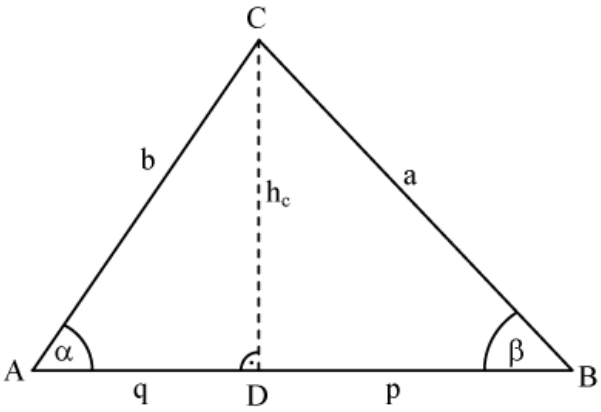


Bild 5 Skizze mit eingezeichneter H"ohe h_c.

Zur Bestimmung der Seitenl"ange b aus den gegebenen Gr"o"sen a, c und β wird folgender Plan aufgestellt:

1. Die L"ange b der Seite $\overline{AC}$ kann mithilfe des Satzes des Pythagoras aus den Seitenl"angen h_c und q berechnet werden.

2. Die Seitenl"angen h_c und q sind aber unbekannt.

3. $q = c - p$; c ist bekannt.

4. p berechnen im Dreieck BCD aus a und β (unter Verwendung von $\cos(\beta) = \frac{p}{a}$).
5. h_c berechnen im Dreieck BCD mit dem Satz des Pythagoras aus a und p.
6. Berechnung von b mit dem Satz des Pythagoras aus q und h_c.

Dieser Plan wird nun durchgef"uhrt:

1. Die L"ange der Seite b ergibt sich mithilfe des Satzes des Pythagoras aus den Seitenl"angen h_c und q:
$$b^2 = h_c^2 + q^2 \Rightarrow b = \sqrt{h_c^2 + q^2}$$
2. h_c und q sind unbekannt und m"ussen zun"achst bestimmt werden.
3. Mithilfe der Seitenl"angen p und c l"asst sich nun der Abschnitt q berechnen:
$$q = c - p$$
4. Im rechtwinkligen Dreieck BCD gilt:
$$\cos(\beta) = \frac{p}{a} \Leftrightarrow p = \cos(\beta) \cdot a = \cos(47°) \cdot 5,2 \approx 3,55$$
Also gilt:
$$q = c - p = 6,2 - 3,55 = 2,65$$
5. Mit der Seitenl"ange p k"onnen wir nun nach Pythagoras die Seitenl"ange h_c wie folgt bestimmen:
$$a^2 = h_c^2 + p^2 \Rightarrow h_c = \sqrt{a^2 - p^2} = \sqrt{(5,2)^2 - (3,55)^2} \approx 3,8$$
6. Im Dreieck ADC ergibt sich nun, ebenfalls nach Pythagoras, f"ur die Seitenl"ange b:
$$b^2 = h_c^2 + q^2 \Rightarrow b = \sqrt{h_c^2 + q^2} = \sqrt{(3,8)^2 + (2,65)^2} \approx 4,63$$

Dieses Vorgehen wird verallgemeinert. Der Plan bleibt allerdings wie oben bestehen.

1. Die L"ange der Seite b ergibt sich mithilfe des Satzes des Pythagoras aus den Seitenl"angen h_c und q:
$$b^2 = h_c^2 + q^2 \Rightarrow b = \sqrt{h_c^2 + q^2}$$
2. h_c und q sind unbekannt und m"ussen zun"achst bestimmt werden.
3. Mithilfe der Seitenl"angen p und c l"asst sich nun der Abschnitt q berechnen:
$$q = c - p$$
4. Im rechtwinkligen Dreieck BCD gilt:
$$\cos(\beta) = \frac{p}{a} \Leftrightarrow p = \cos(\beta) \cdot a$$
5. Mit der Seitenl"ange p k"onnen wir nun nach Pythagoras die Seitenl"ange h_c wie folgt bestimmen:
$$a^2 = h_c^2 + p^2 \Rightarrow h_c^2 = a^2 - p^2$$

6. Im Dreieck ADC ergibt sich nun, ebenfalls nach Pythagoras, f"ur die Seitenl"ange b:

$$\begin{aligned} b^2 &= h_c^2 + q^2 \\ &= a^2 - p^2 + (c-p)^2 \\ &= a^2 - p^2 + c^2 - 2cp + p^2 \\ &= a^2 + c^2 - 2cp \\ &= a^2 + c^2 - 2c \cdot \cos(\beta) \cdot a \\ &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta) \\ \Rightarrow b &= \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)} \end{aligned}$$

Mithilfe dieser Formel ist es nun m"oglich, die Seite b mit den angegebenen Daten direkt zu bestimmen. Betrachten wir nun noch einmal die obige Aufgabe und l"osen diese mit der gefundenen Gleichung, so ergibt sich:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)}$$

$$b = \sqrt{(5,2)^2 + (6 - 2^2 - 2 \cdot 5,2 \cdot 6,2 \cdot \cos(47°)} \approx 4,64$$

Inhalte mit Erklärungen

Wir wollen nun eine Herleitung zum Sinus- und Cosinussatz anbringen und die Additionstheoreme f"ur Sinus und Cosinus angeben und eines herleiten.
Zun"achst wird der Sinussatz angegeben und hergeleitet. In der Hinf"uhrung haben sie bereits eine anschauliche Hinf"uhrung kennengelernt.

Satz 2: (Sinussatz)
Gegeben sei ein Dreieck mit den Seiten a, b, c und den Seiten jeweils gegenüberliegenden Winkeln α, β, γ mit $0° < \alpha, \beta, \gamma < 180°$. Dann gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$$
$$\frac{b}{c} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)}$$
$$\frac{c}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)}$$

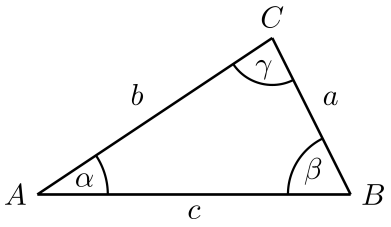


Bild 6

Bemerkung
In jedem Dreieck ist das Verh"altnis der L"angen zweier Dreiecksseiten gleich dem Verh"altnis der Sinuswerte der den Seiten gegen"uberliegenden Winkel.

Beweis *(Aufklapptext)*

Wir unterscheiden bei der Herleitung des Sinussatzes drei F"alle.
1. **Fall:**
Das spitzwinklige Dreieck mit $0° < \alpha < 90°$ und $0° < \beta < 90°$.

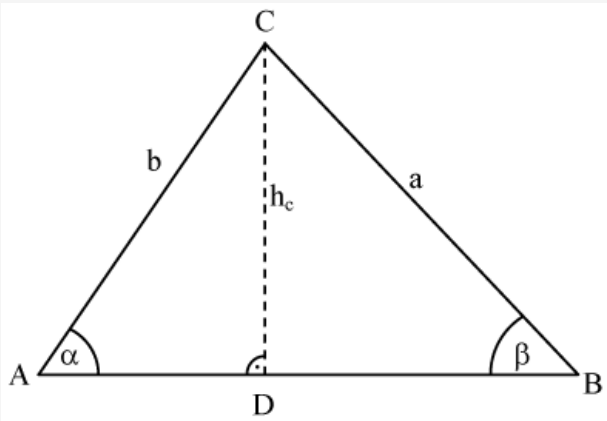


Bild 7 Spitzwinkliges Dreieck

Wie in der Abbildung zu erkennen ist, kann das Dreieck ABC durch Einzeichnen der H"ohe h_c in zwei rechtwinklige Dreiecke ADC und BCD zerlegt werden.

Im Dreieck ADC gilt: $\sin(\alpha) = \frac{h_c}{b} \Leftrightarrow h_c = \sin(\alpha) \cdot b$
Im Dreieck BCD gilt: $\sin(\beta) = \frac{h_c}{a} \Leftrightarrow h_c = \sin(\beta) \cdot a$
Hieraus folgt:

$$\sin(\alpha) \cdot b = \sin(\beta) \cdot a \Leftrightarrow \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{a}{b}$$

2. Fall:
Das stumpfwinklige Dreieck mit $90° < \alpha < 180°$.

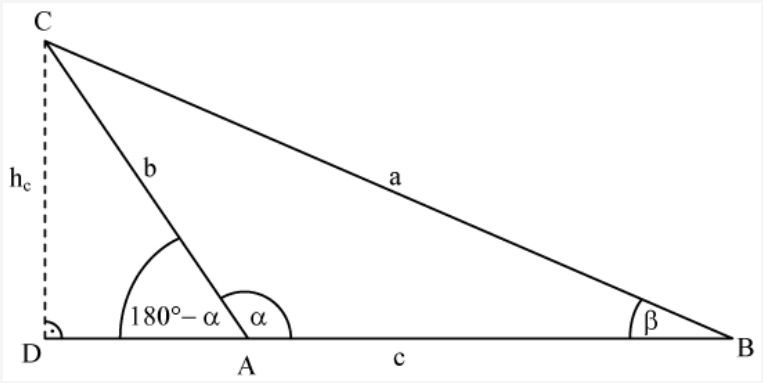


Bild 8 Stumpfwinkliges Dreieck

Auch in diesem Dreieck entstehen durch Einzeichnen der H"ohe h_c zwei rechtwinklige Dreiecke ADC und DBC.
Im Dreieck ADC gilt: $\sin(180° - \alpha) = \frac{h_c}{b} \Leftrightarrow h_c = \sin(180° - \alpha) \cdot b$
Im Dreieck BCD gilt: $\sin(\beta) = \frac{h_c}{a} \Leftrightarrow h_c = \sin(\beta) \cdot a$
Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} & \sin(180° - \alpha) \cdot b = \sin(\beta) \cdot a \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\sin(180° - \alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{a}{b} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet, dass $\sin(180° - \alpha) = \sin(\alpha)$ ist.

3. Fall: $\alpha = 90°$ **oder** $\beta = 90°$**:**
In diesen Fällen stimmt der Sinussatz mit der Definition des Sinus zusammen, denn $\sin(90°) = 1$. Die Seite h_c fällt dabei entweder mit der Seite b zusammen (falls $\alpha = 90°$) oder mit der Seite a (falls $\beta = 90°$).

Bemerkung:
Man müsste auch noch den Fall betrachten, dass β ein stumpfer Winkel ist. Dies funktioniert aber genauso wie in Fall 2.
Die beiden anderen Gleichungen im Sinussatz lassen sich auf dieselbe Art beweisen.

Der Sinussatz wird verwendet:

- Wenn von einem Dreieck zwei Winkelgr"oßen und eine einem der Winkel gegen"uber liegende

Seitenl"ange bekannt sind und die fehlende Seitenl"ange bestimmt werden soll.

- Wenn von einem Dreieck zwei Seitenl"angen und ein einer Seite gegen"uber liegender Winkel bekannt sind und der zweite Winkel bestimmt werden soll.

Dazu wird jeweils ein Beispiel betrachtet.

Beispiel 1:

1. Betrachtet wird das folgende Dreieck ABC:

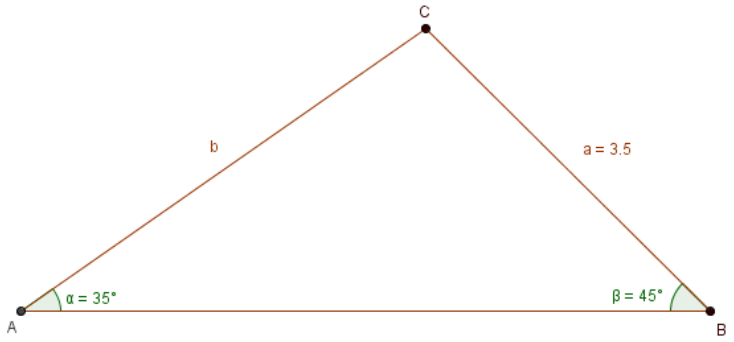


Bild 9 Skizze zum ersten Beispiel.

Gegeben sind die Winkelgr"oßen $\alpha = 35°$ und $\beta = 45°$ sowie die Seitenl"ange $a = 3,5$ cm. Gesucht ist die L"ange der Seite b. Mit dem Sinussatz l"asst sich die Seitenl"ange mithilfe der gegebenen Seitenl"ange und Winkelgr"oßen bestimmen:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \Leftrightarrow b = \frac{a \cdot \sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = \frac{3,5 \cdot \sin(45°)}{\sin(35°)} \approx 4,31 \ .$$

Die L"ange der Seite b betr"agt somit ca. $4,31$ cm.

2. Betrachtet wird das folgende Dreieck ABC:

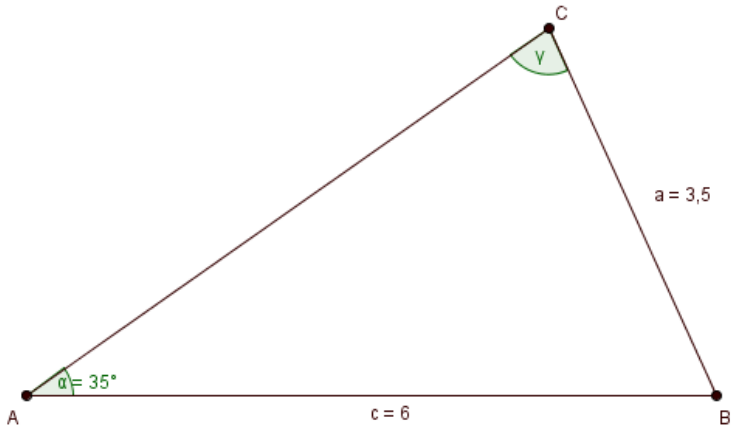


Bild 10 Skizze zum zweiten Beispiel.

Gegeben sind die Seitenl"angen $a = 3,5$ cm und $c = 6$ cm sowie die Winkelgr"oße $\alpha = 35°$. Gesucht ist die Gr"oße des Winkels γ. Mit dem Sinussatz kann zun"achst der Sinus des Winkels

γ bestimmt werden:

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} \Leftrightarrow \sin(\gamma) = \frac{c \cdot \sin(\alpha)}{a} = \frac{6 \cdot \sin(35°)}{3,5} \approx 0,98 \ .$$

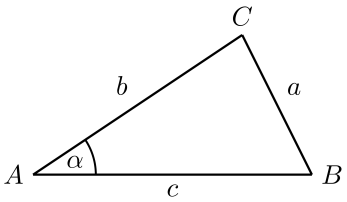
Da nun der Sinus des Winkels γ bekannt ist, kann mithilfe der Umkehrfunktion des Sinus die Gr"oße des Winkels γ bestimmt werden:

$$\sin(\gamma) = 0,98 \Leftrightarrow \gamma = \sin^{-1}(0,98) \approx 78,52° \ .$$

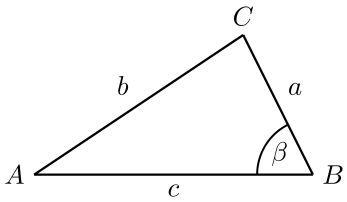
Die Gr"oße des Winkels γ betr"agt ca. $78,52°$.

Satz 3: (Cosinussatz)

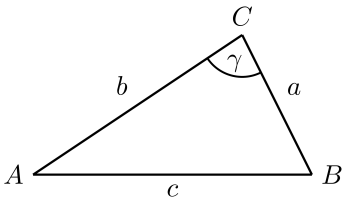
Gegeben sei ein Dreieck mit den Seiten a, b, c und den Seiten jeweils gegenüberliegenden Winkeln α, β, γ mit $0° < \alpha, \beta, \gamma < 180°$. Dann gilt:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$$



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta)$$



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

Bemerkung

Das Quadrat einer Seitenl"ange eines Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seitenl"angen vermindert um das Doppelte des Produkts aus diesen Seitenl"angen und dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels.

Beweis *(Aufklapptext)*

Es wird nur der Beweis f"ur den Cosinussatz bez"uglich a angef"uhrt.
Auch bei der Herleitung des Cosinussatzes m"ussen wie beim Beweis des Sinussatzes zwei F"alle unterschieden werden.

1. **Fall:**

Das spitzwinklige Dreieck mit $0° < \alpha < 90°$ und $0° < \beta < 90°$.

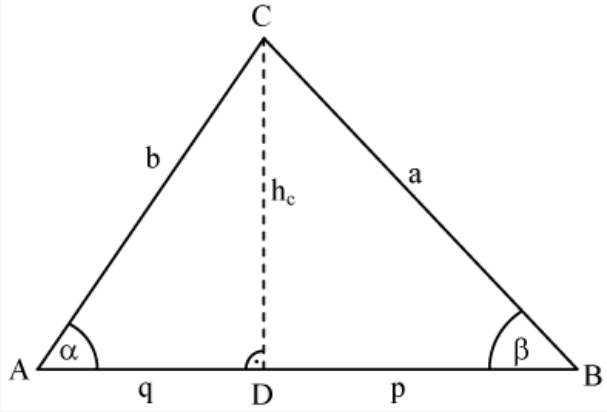


Bild 12 Spitzwinkliges Dreieck

Bekannt sind die Seitenl"angen b und c sowie die Winkelgr"o"se α.
Es wird zun"achst ein Plan aufgestellt, der dann Schritt f"ur Schritt abgearbeitet wird:
1. Das Quadrat der Seitenl"ange a kann mithilfe des Satzes des Pythagoras aus den Quadraten der Seitenl"angen h_c und p berechnet werden.
2. Die Seitenl"angen h_c und p sind aber unbekannt.
3. $p = c - q$; c ist bekannt.
4. q berechnen im Dreieck ADC aus b und α (unter Verwendung von $\cos(\alpha) = \frac{q}{b}$).
5. h_c berechnen im Dreieck ADC mit dem Satz des Pythagoras aus b und q.
6. Berechnung von a mit dem Satz des Pythagoras aus p und h_c.

Dieser Plan wird nun durchgef"uhrt:
1. Das Quadrat der Seitenl"ange a ergibt sich mithilfe des Satzes des Pythagoras:

$$a^2 = h_c^2 + p^2$$

2. h_c und p sind unbekannt und m"ussen zun"achst bestimmt werden.
3. Mithilfe der Seitenl"angen q und c l"asst sich nun der Abschnitt q berechnen:

$$p = c - q$$

4. Im rechtwinkligen Dreieck ADC gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{q}{b} \Leftrightarrow q = \cos(\alpha) \cdot b$$

5. Mit der Seitenl"ange q k"onnen wir nun nach Pythagoras die Seitenl"ange h_c wie folgt bestimmen:

$$b^2 = h_c^2 + p^2 \Leftrightarrow h_c^2 = b^2 - p^2$$

6. Im Dreieck BCD ergibt sich nun, ebenfalls nach Pythagoras, f"ur die Seitenl"ange a:

$$\begin{aligned} a^2 &= h_c^2 + p^2 \\ &= b^2 - q^2 + (c-q)^2 \\ &= b^2 - q^2 + c^2 - 2cq + q^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2cq \\ &= b^2 + c^2 - 2c \cdot \cos(\alpha) \cdot b \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) \end{aligned}$$

2. Fall:
Das stumpfwinklige Dreieck mit $90° < \alpha < 180°$.

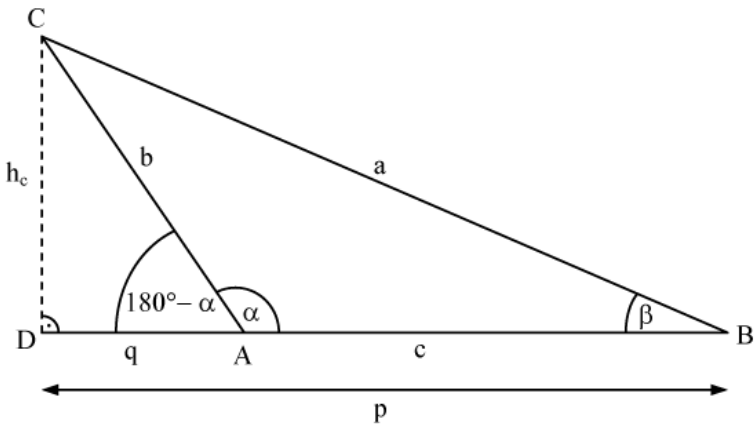


Bild 13 Stumpfwinkliges Dreieck

Bekannt sind die Seitenl"angen b und c sowie die Winkelgr"o"se α.
Auch in diesem Fall wird zun"achst ein Plan aufgestellt und dann Schritt f"ur Schritt abgearbeitet:
1. Das Quadrat der Seitenl"ange a kann mithilfe des Satzes des Pythagoras aus den Quadraten der Seitenl"angen h_c und p berechnet werden.
2. Die Seitenl"angen h_c und p sind aber unbekannt.
3. $p = c + q$; c ist bekannt.
4. q berechnen im Dreieck ADC aus b und $180° - \alpha$ (unter Verwendung von $\cos(180° - \alpha) = \frac{q}{b}$).
5. h_c berechnen im Dreieck ADC mit dem Satz des Pythagoras aus b und q.
6. Berechnung von a mit dem Satz des Pythagoras aus p und h_c.

1. Das Quadrat der Seitenl"ange a ergibt sich mithilfe des Satzes des Pythagoras:

$$a^2 = h_c^2 + p^2$$

2. h_c und p sind unbekannt und m"ussen zun"achst bestimmt werden.
3. Mithilfe der Seitenl"angen q und c l"asst sich nun der Abschnitt q berechnen:

$$p = c + q$$

4. Im rechtwinkligen Dreieck ADC gilt:

$$\cos(180° - \alpha) = \frac{q}{b} \Leftrightarrow q = \cos(180° - \alpha) \cdot b$$

5. Mit der Seitenl"ange q k"onnen wir nun nach Pythagoras die Seitenl"ange h_c wie folgt bestimmen:

$$b^2 = h_c^2 + p^2 \Leftrightarrow h_c^2 = b^2 - p^2$$

6. Im Dreieck BCD ergibt sich nun, ebenfalls nach Pythagoras, f"ur die Seitenl"ange a:

$$\begin{aligned} a^2 &= h_c^2 + p^2 \\ &= b^2 - q^2 + (c+q)^2 \\ &= b^2 - q^2 + c^2 + 2cq + q^2 \\ &= b^2 + c^2 + 2cq \\ &= b^2 + c^2 + 2c \cdot \cos(180° - \alpha) \cdot b \\ &= b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos(180° - \alpha) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet, dass $\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$ ist.
Es ergibt sich also f"ur beide Dreiecksformen dieselbe Gleichung.

Bemerkung
Betrachtet man den Cosinussatz der Form

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

f"ur den Spezialfall $\gamma = 90°$, so folgt hieraus direkt der Satz des Pythagoras, denn $\cos(90°) = 0$ und somit $c^2 = a^2 + b^2$.

Der Cosinussatz wird verwendet, wenn von einem Dreieck entweder zwei Seitenl"angen und die Gr"oße des eingeschlossenen Winkels der beiden Seiten bekannt sind und die L"ange der fehlende Seite ermittelt werden soll oder wenn die drei Seitenl"angen bekannt sind und die Gr"oße eines Winkels bzw. die Gr"oßen mehrerer Winkel bestimmt werden sollen. Dazu wird jeweils ein Beispiel betrachtet.

Beispiel 2:

1. Betrachtet wird das folgende Dreieck ABC:

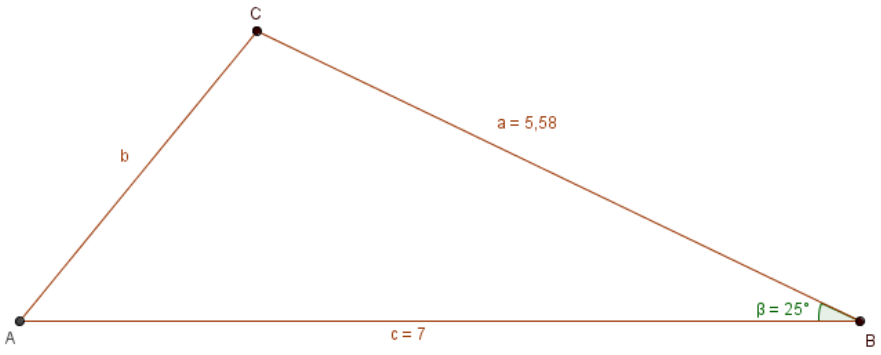


Bild 14 Skizze zum ersten Beispiel

Gegeben sind die Seitenl"angen $a = 5,58$ cm und $c = 7$ cm und die Gr"oße des Winkels $\beta = 25°$, der von den Seiten a und c eingeschlossen ist. Gesucht ist die L"ange der Seite b. Mithilfe des Cosinussatzes kann das Quadrat der Seite b bestimmt werden:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta) \ .$$

Einsetzen der gegebenen Werte in die Gleichung ergibt:

$$b^2 = 5,58^2 + 7^2 - 2 \cdot 5,58 \cdot 7 \cdot \cos(25°)$$

$$b^2 = 31,14^2 + 49 - 78,12 \cdot \cos(25°) \approx 9,34$$

Nun da b^2 bekannt ist, kann auch b bestimmt werden:

$$b = \sqrt{9,34} \approx 3,06 \ .$$

Die L"ange der Seite b betr"agt ungef"ahr $3,06$ cm.

2. Betrachtet wird das folgende Dreieck ABC:

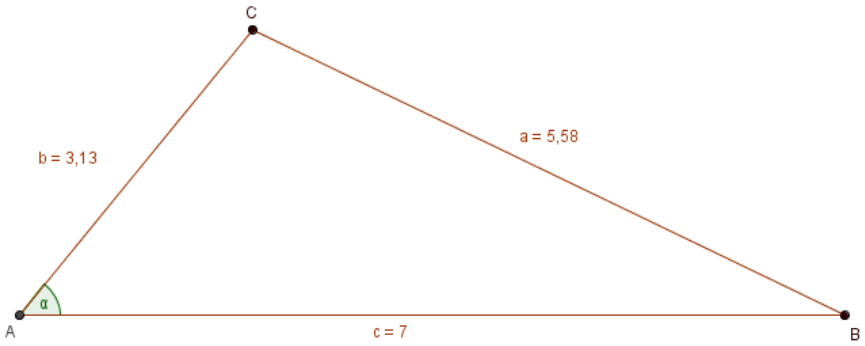


Bild 15 Skizze zum zweiten Beispiel

Gegeben sind die L"angen der drei Seiten des Dreiecks $a = 5,58$ cm, $b = 3,13$ cm und $c = 7$ cm. Gesucht wird die Gr"o"se des Winkels α. Zun"achst kann mithilfe des Cosinussatzes der Cosinus des Winkels α bestimmt werden:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) \ .$$

Umstellen nach $\cos(\alpha)$ ergibt:

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \ .$$

Einsetzen der gegebenen Seitenl"angen ergibt:

$$\cos(\alpha) = \frac{3,13^2 + 7^2 - 5,58^2}{2 \cdot 3,13 \cdot 7} \approx 0,63 \ .$$

Mithilfe der Umkehrfunktion des Cosinus kann die Gr"oße des Winkels α bestimmt werden:

$$\cos(\alpha) = 0,63 \Leftrightarrow \alpha = \arccos(0,63) \approx 50,95° \ .$$

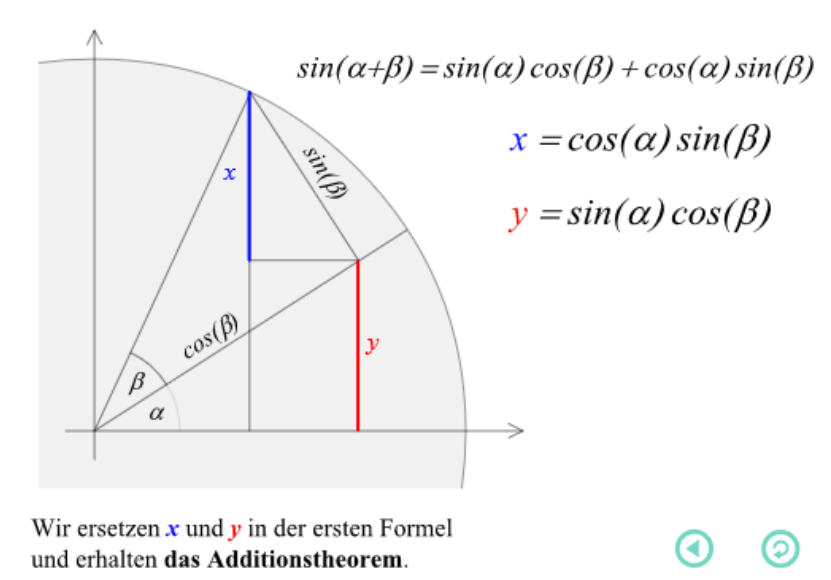
Die Gr"oße des Winkels α betr"agt somit ungef"ahr $50,95°$.

Die Additionstheoreme, die nun angesprochen und teilweise bewiesen werden, gelten im Gegensatz zum Sinus- und Cosinussatz f"ur beliebige Winkelgr"o"sen. Sie dienten historisch gesehen der Berechnung von Sinus- und Cosinuswerten, die nicht einfach durch messen bestimmt werden konnten. Heutzutage finden die Additionstheoreme vor allem Anwendung in der Physik und den Ingenieurswissenschaften.

Satz 4: (Additionstheoreme f"ur Sinus und Cosinus)
Für beliebige Winkel α und β gelten die Additionstheoreme:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)\\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\beta)\cos(\alpha)\\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)\\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)
\end{aligned}$$

Beweis *(Aufklapptext)*



Interaktion 1 *(nur in digitaler Version)*

Beweis
Es wird nur der Beweis des Additionstheorems $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\sin(\beta)\cdot\cos(\alpha)$ angegeben. Außerdem wird der Beweis nur für α, β zwischen $0°$ und $90°$ mit $\alpha+\beta < 90°$ vorgeführt!

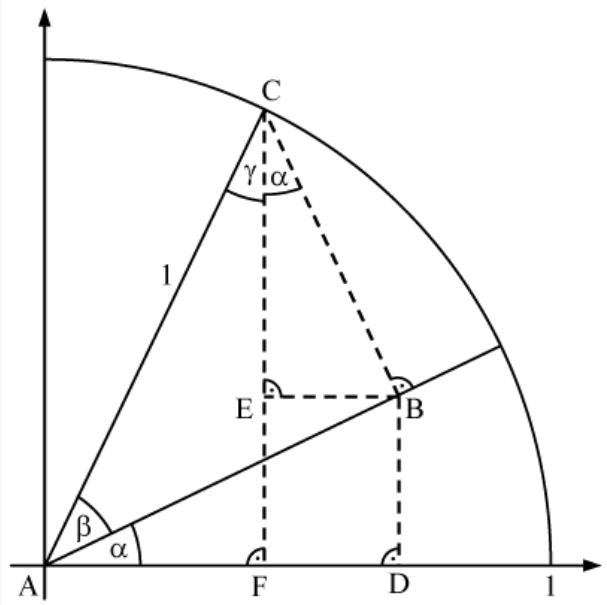


Bild 16 Skizze zur Herleitung des Additionstheorems $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\sin(\beta)\cdot\cos(\alpha)$.

Zu Beginn soll kurz erl"autert werden, warum in der obigen Abbildung der Winkel α zwei Mal vorkommt: Betrachtet man das Dreieck AFC, so ergibt sich f"ur den Winkel α:

$$\alpha = 90° - \gamma - \beta$$

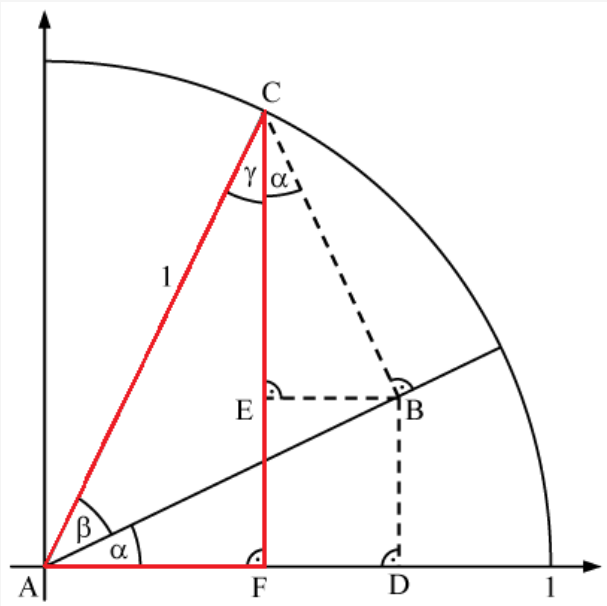


Bild 17 Das Dreieck AFC ist rot hervorgehoben

Im Dreieck ABC erh"alt man f"ur den Winkel α im Dreieck BCE ebenfalls:

$$\alpha = 90° - \gamma - \beta$$

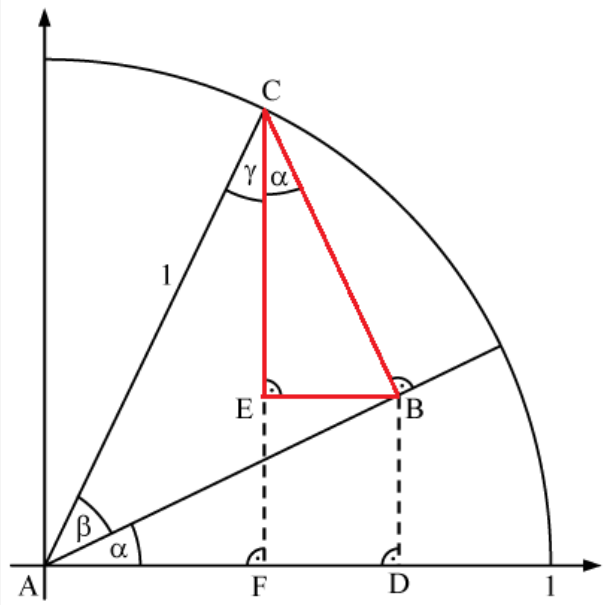


Bild 18 Das Dreieck BCE ist rot hervorgehoben

Folglich ist die Bezeichnung α f"ur den Winkel im Dreieck BCE gerechtfertigt.

Betrachtet man nun das Dreieck ABC, so ergibt sich f"ur die Seite $\overline{AB}$ mit der Definition des Cosinus:

$$\cos(\beta) = \frac{\overline{AB}}{1} = \overline{AB}$$

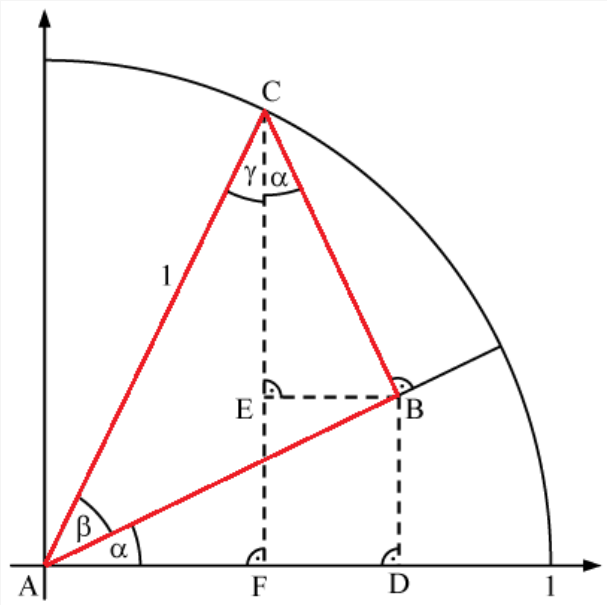


Bild 19 Das Dreieck ABC ist rot hervorgehoben

F"ur die Seite $\overline{BC}$ erhalten wir mit der Definition des Sinus:

$$\sin(\beta) = \frac{\overline{BC}}{1} = \overline{BC}$$

Wir betrachten nun das Dreieck ADB. Dort ergibt sich f"ur die Seite $\overline{DB}$:

$$\sin(\alpha) = \frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{DB} = \sin(\alpha) \cdot \overline{AB} = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)$$

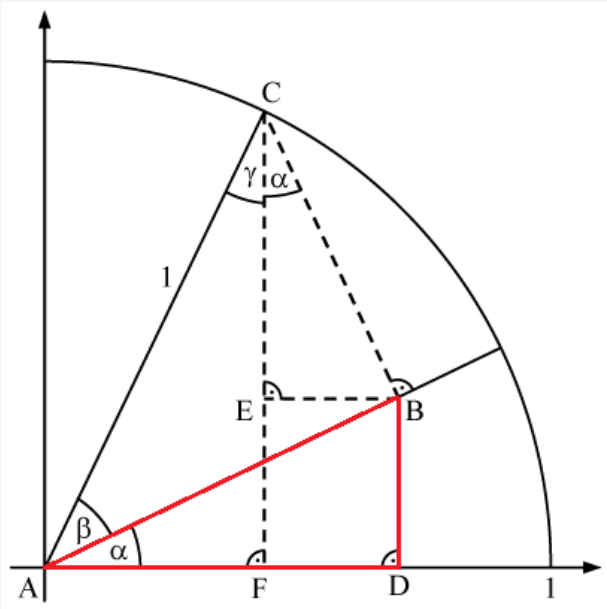


Bild 20 Das Dreieck ADB ist rot hervorgehoben

Analog verfahren wir f"ur die Seite $\overline{EC}$ und erhalten:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{EC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{EC} = \cos(\alpha) \cdot \overline{BC} = \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

F"ur $\overline{EF}$ gilt:

$$\overline{EF} = \overline{DB} = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)$$

Die Seite $\overline{FC}$ ergibt sich aus der Addition der Seiten $\overline{EC} + \overline{EF}$ und somit folgt:

$$\overline{FC} = \overline{EC} + \overline{EF} = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$$

Da $\frac{\overline{EC}+\overline{EF}}{1} = \frac{\overline{FC}}{1} = \sin(\alpha + \beta)$ ist, ergibt sich f"ur die Addition der Winkel somit:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$$

Die anderen Additionstheoreme lassen sich auf "ahnliche Weise herleiten.

Beispiel 3:

Als Anwendung der Additionstheoreme soll der Sinus des Winkels 135° bestimmt werden. Die Sinus- und Cosinuswerte zu den Winkeln 45° und 90° sind bereits bekannt, daher kann 135°

zerlegt werden in $45° + 90°$ und es ergibt sich f"ur den Sinus des Winkels 135°:

$$\begin{aligned}\sin(135°) &= \sin(45° + 90°)\\ &= \sin(45°) \cdot \cos(90°) + \sin(90°) \cdot \cos(45°)\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 + 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Der Sinus des Winkels 135° betr"agt somit $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Aufgaben

Aufgabe 1:
Berechnen Sie vom Dreieck ABC mit $a = 6$ cm, $b = 8$ cm, $\gamma = 53°$
a) die fehlende Seite $c =$? cm
b) die Winkel $\alpha =$? ° und $\beta =$? °
auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung:

a)
Mit dem Cosinussatz folgt f"ur die Seite c:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma) \\ c^2 &= 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos(53°) \\ c^2 &= 100 - 96 \cdot \cos(53°) \approx 42,23 \\ c &= \sqrt{42,23} \approx 6,50 \end{aligned}$$

Wir betrachten bei der Seite c nur das obige positive Ergebnis, da negative Ergebnisse ausgeschlossen werden k"onnen. Damit betr"agt die L"ange der Seite c ungef"ahr $6,50$ cm.
Falls zuerst gerundet wird, erhält man

$$\begin{aligned} c^2 &= 100 - 96 \cdot \cos(53°) \approx 100 - 96 \cdot 0,60 = 42,40 \\ c &= \sqrt{42,40} \approx 6,51 \end{aligned}$$

Im folgenden wird jedoch mit $c \approx 6,50$ weitergerechnet.

b)
Mithilfe des Sinussatzes kann zun"achst der Sinus des Winkels β bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \frac{b}{c} &= \frac{\sin(\beta)}{\sin(\gamma)} \\ \Leftrightarrow \quad \sin(\beta) &= \frac{\sin(\gamma) \cdot b}{c} = \frac{\sin(53°) \cdot 8}{6,50} \approx \frac{0,80 \cdot 8}{6,50} = 0,98 \end{aligned}$$

Mithilfe der Umkehrfunktion des Sinus ergibt sich f"ur die Gr"oße des Winkels β somit:

$$\beta = \arcsin(0,98) \approx 78,52°$$

Die Gr"oße des Winkels β betr"agt ungef"ahr $78,52°$.
Die Winkelgr"oße von α l"asst sich mithilfe die Winkelsumme im Dreieck bestimmen:

$$\alpha = 180° - \beta - \gamma = 180° - 53° - 78,52° = 48,48°$$

Die Gr"oße des Winkels α betr"agt demnach ca. $48,48°$.
Falls nicht direkt gerundet wird, erhält man

$$\begin{aligned} \beta &= \arcsin\left(\frac{\sin(53°) \cdot 8}{6,50}\right) \approx 79,40° \\ \alpha &= 180° - 53° - 79,40° = 47,60° \end{aligned}$$

Aufgabe 2:
Berechnen Sie im Dreieck ABC mit den Seitenl"angen $a = 6,5$ cm, $b = 7,2$ cm und $c = 9$ cm die Winkel
a) $\alpha =$? °
b) $\beta =$? °
c) $\gamma =$? °
auf zwei Stellen nach dem Komma.

Lösung:
a)
Mit dem Cosinussatz folgt zun"achst f"ur $\cos(\alpha)$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) \Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Nun setzen wir die gegebenen Seitenl"angen ein und erhalten

$$\cos(\alpha) = \frac{7,2^2 + 9^2 - 6,5^2}{2 \cdot 7,2 \cdot 9} \approx 0,70$$

Mithilfe der Umkehrfunktion des Cosinus kann die Gr"oße des Winkels α bestimmt werden:

$$\alpha = \arccos(0,70) \approx 45,57°$$

Die Gr"oße des Winkels α betr"agt somit ca. $45,57°$.
Falls nicht vorher gerundet wird, erhält man

$$\alpha = \arccos\left(\frac{7,2^2 + 9^2 - 6,5^2}{2 \cdot 7,2 \cdot 9}\right) \approx 45,65°$$

Im Folgenden wird mit $\alpha = 45,57°$ weitergerechnet.

b)
Der Sinussatz liefert nun f"ur den Winkel β:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \\ \Leftrightarrow \quad \sin(\beta) &= \frac{\sin(\alpha) \cdot b}{a} = \frac{\sin(45,57°) \cdot 7,2}{6,5} \approx \frac{0,71 \cdot 7,2}{6,5} = 0,79 \end{aligned}$$

Mithilfe der Umkehrfunktion des Sinus kann die Gr"oße des Winkels β bestimmt werden:

$$\beta = \sin^{-1}(0,79) = 52,19°$$

Die Gr"oße des Winkels β betr"agt ungef"ahr $52,19°$
Ohne vorheriges Runden ergibt sich

$$\beta = \arcsin\left(\frac{\sin(45,57) \cdot 7,2}{6,5}\right) \approx 52,28°$$

Weitergerechnet wird mit dem Wert $\beta = 52,19°$.

c)
Der letzte Winkel l"asst sich nun mithilfe der Winkelsumme im Dreieck bestimmen:

$$\begin{aligned} \gamma &= 180° - \alpha - \beta \\ &= 180° - 45,57° - 52,19° \\ &= 82,24° \end{aligned}$$

Die Gr"oße des Winkels γ betr"agt ca. $82,24°$.

Aufgabe 3:
Begr"unden Sie mit dem Sinussatz warum in dem rechtwinkligen Dreieck ABC (γ ist der rechte Winkel) gilt:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$$

Lösung:

Mit dem Sinussatz folgt:

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} \Leftrightarrow \sin(\alpha) = \frac{a \cdot \sin(\gamma)}{c}$$

Da der Winkel γ gleich $90°$ ist und der Sinus von $90°$ genau 1 betr"agt, ergibt sich

$$\sin(\alpha) = \frac{a \cdot \sin(90°)}{c} = \frac{a \cdot 1}{c} = \frac{a}{c}$$

Aufgabe 4:
Beweisen Sie die folgende Aussage.
F"ur beliebige Winkel α gilt:

$$(\sin(\alpha) + \cos(\alpha))^2 = 1 + 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$$

Lösung:

Mit der ersten binomischen Formel folgt:

$$(\sin(\alpha) + \cos(\alpha))^2 = \sin^2(\alpha) + 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + \cos^2(\alpha)$$

Mit $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ folgt die Behauptung:

$$(\sin(\alpha) + \cos(\alpha))^2 = 1 + 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$$

Aufgabe 5:
Beweisen Sie die folgende Aussage.
F"ur beliebige Winkel α gilt:

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2 \cdot \sin^2(\alpha)$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha) &= \cos(\alpha + \alpha) \\ &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \end{aligned}$$

Mithilfe des trigonometrischen Pythagoras $\cos^2(\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha)$ folgt die Behauptung:

$$\cos(2\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2 \cdot \sin^2(\alpha)$$

Aufgabe 6:
Berechnen Sie mithilfe der Additionstheoreme folgende Sinus- und Cosinuswerte ohne Taschenrechner.
a) $\sin(75°) =$?
b) $\cos(75°) =$?
c) $\sin(15°) =$?
d) $\cos(15°) =$?

Lösung:
a)

$$\begin{aligned}
\sin(75°) &= \sin(45° + 30°) \\
&= \sin(45°) \cdot \cos(30°) + \sin(30°) \cdot \cos(45°) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2} \\
&= \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\cos(75°) &= \cos(45° + 30°) \\
&= \cos(45°) \cdot \cos(30°) - \sin(45°) \cdot \sin(30°) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2} \\
&= \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\sin(15°) &= \sin(45° - 30°) \\
&= \sin(45°) \cdot \cos(30°) - \sin(30°) \cdot \cos(45°) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\sqrt{2} \\
&= \frac{1}{4}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\cos(15^\circ) &= \cos(45^\circ - 30^\circ)\\ &= \cos(45^\circ)\cdot\cos(30^\circ) + \sin(45^\circ)\cdot\sin(30^\circ)\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{4}\sqrt{6} + \frac{1}{4}\sqrt{2}\\ &= \frac{1}{4}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

Aufgabe 7:
In einem Rechteck schneiden sich die beiden Diagonalen $e = f = 25,5$ cm unter einem Winkel von $\beta = 52^\circ$. Berechnen Sie die Seitenl"angen a und b des Rechtecks auf zwei Stellen nach dem Komma genau.

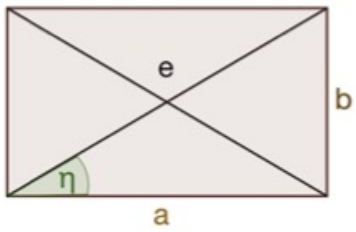


Bild 21 Rechteck mit Diagonalen

Die L"ange der Seite a betr"agt ? cm.
Die L"ange der Seite b betr"agt ? cm.

Lösung:

Durch den Schnitt der Diagonalen ergeben sich vier gleichschenklige Dreiecke in dem Rechteck. F"ur den Basiswinkel α ergibt sich:

$$\alpha = \frac{180° - 52°}{2} = 64°$$

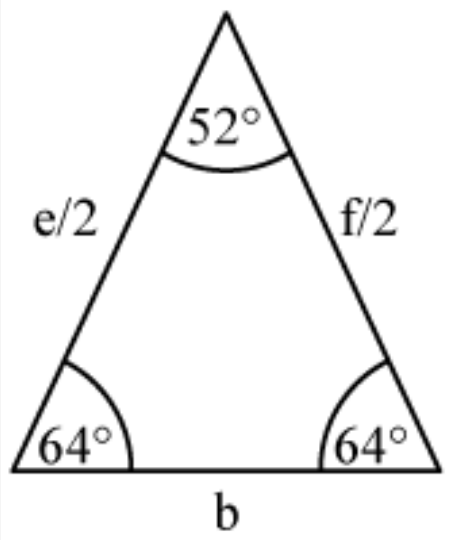


Bild 22 Im Rechteck enthaltenes gleichschenkliges Dreieck

Mit dem Sinussatz folgt somit nach obiger Skizze f"ur die L"ange der Seite b:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{f}{2}}{b} &= \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} \\ \Leftrightarrow \quad b &= \frac{f \cdot \sin(\beta)}{2 \cdot \sin(\alpha)} = \frac{25,5 \cdot \sin(52°)}{2 \cdot \sin(64°)} \approx 11,18 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich f"ur die Seite b eine L"ange von ungef"ahr $11,18$ cm.
Mithilfe des Satzes des Pythagoras kann die L"ange der Seite a bestimmt werden:

$$a^2 = e^2 - b^2 = 25,5^2 - 11,18^2 \approx 525,26$$

$$a = \sqrt{525,26} \approx 22,92$$

Die L"ange der Seite a betr"agt ungef"ahr $22,92$ cm.

Hinweis:
Falls Sie mit gerundeten Zwischenergebnissen rechnen, erhalten Sie

$$\begin{aligned} b &= \frac{25,5 \cdot \sin(52°)}{2 \cdot \sin(64°)} \approx \frac{25,5 \cdot 0,79}{2 \cdot 0,90} \approx 11,19 \\ a &= \sqrt{e^2 - b^2} = \sqrt{25,5^2 - 11,19^2} \approx 22,91 \end{aligned}$$

Anwendung

Vermessungstechnik
Manchmal kommt es vor, dass eine Strecke aufgrund des unzug"anglichen Gel"andes nicht direkt gemessen werden kann. Ein in der Vermessungstechnik angewandtes Verfahren, um diese Strecken dennoch vermessen zu k"onnen, ist das sogenannte Vorw"artsschneiden nach zwei Punkten. Hierzu wird im zug"anglichen Gel"ande eine sogenannte Standlinie mit den Endpunkten A und B abgemessen. Von diesen Punkten werden die Punkte C und D der zu messenden Seite x angepeilt und die in der folgenden Abbildung dargestellten Winkel gemessen. Gesucht ist die L"ange der Seite x.

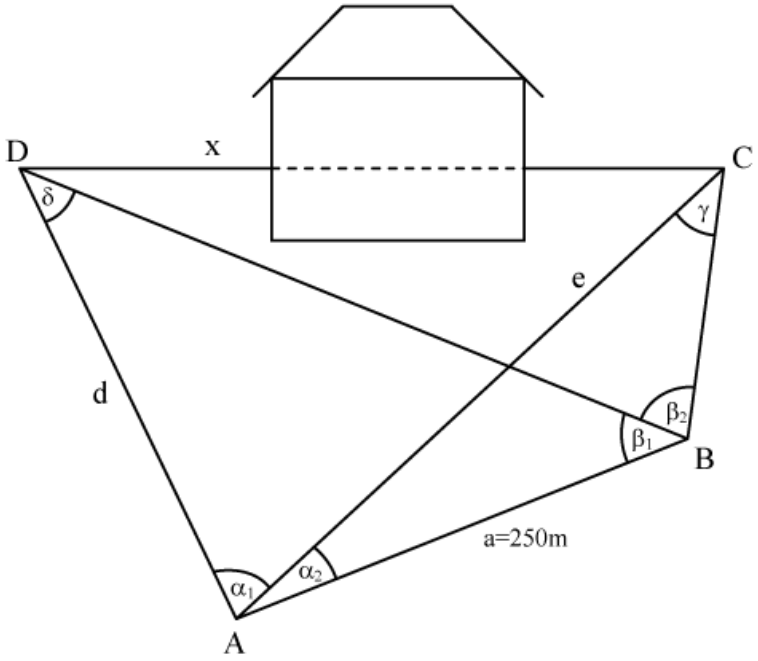


Bild 23 Skizze zum Vorw"artsschneiden

Gemessen wurden die folgenden Winkelgr"oßen:

$$\alpha_1 = 47°, \alpha_2 = 53°, \beta_1 = 46°, \beta_2 = 49°$$

Um die L"ange der Seite d berechnen zu k"onnen, wird die Gr"oße des Winkel δ ben"otigt:

$$\delta = 180° - \alpha_1 - \alpha_2 - \beta_1 = 180° - 47° - 53° - 46° = 34°$$

Mit dem Sinussatz kann nun die L"ange der Seite d bestimmt werden:

$$\frac{d}{a} = \frac{\sin(\beta_1)}{\sin(\delta)} \Leftrightarrow d = \frac{\sin(\beta_1) \cdot a}{\sin(\delta)} = \frac{\sin(46°) \cdot 250}{\sin(34°)} \approx 321,6$$

Um die L"ange der Seite e zu bestimmen wird die Gr"oße des Winkel γ ben"otigt:

$$\gamma = 180° - \alpha_2 - \beta_1 - \beta_2 = 180° - 53° - 46° - 49° = 32°$$

Nun kann wiederum der Sinussatz f"ur die Berechnung der L"ange der Seite e verwendet werden:

$$\frac{e}{a} = \frac{\sin(\beta_1 + \beta_2)}{\sin(\gamma)}$$

$$\Leftrightarrow e = \frac{\sin(\beta_1 + \beta_2) \cdot a}{\sin(\gamma)} = \frac{\sin(95°) \cdot 250}{\sin(32°)} \approx 469,97$$

Nun sind die L"angen der Seiten d und e sowie der Winkel α_1 bekannt und mit dem Cosinussatz kann nun die L"ange der Seite x berechnet werden:

$$x^2 = d^2 + e^2 - 2de \cdot \cos(\alpha_1)$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{321,6^2 + 469,97^2 - 2 \cdot 321,6 \cdot 469,97 \cdot \cos(47°)}$$

$$x \approx 343,72$$

Damit betr"agt die L"ange der gesuchten Seite x ca. $343,72$ m.
