

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn

FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

LE 8 - Höhere Funktionen

8.1 Potenzfunktionen

Im Folgenden finden Sie die Abschnitte:

Übersicht	S. 1
Hinführung	S. 2
Inhalte mit Erklärungen	S. 4
Aufgaben	S. 12
Anwendung	S. 20

Übersicht

- Proportionale und antiproportionale Funktionen
- Elementare Potenzfunktionen
- Wurzelfunktionen
- Potenzfunktionen mit reellen Exponenten

Hinführung

In der Lerneinheit *Elementare Funktionen* wurde die Flugbahn einer Kugel betrachtet, die vom schiefen Turm von Pisa heruntergeworfen wurde. Für die Wegstrecke s , die ein Gegenstand im freien Fall in der Zeit t zurücklegt, gilt idealisiert ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands folgende Gleichung, wie man aus der Physik weiß:

$$s = \frac{1}{2}g \cdot t^2$$

wobei g die Erdbeschleunigung ist und $9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ (Näherungswert) beträgt.

Nun kann man sich aber auch die umgekehrte Frage stellen: Wie lange (also welche Zeit t) braucht der Gegenstand, um im freien Fall eine vorgegebene Strecke s zurückzulegen?

Hierfür muss man die obige Gleichung durch Äquivalenzumformungen nach t auflösen (da t für die Zeit steht, gilt immer $t \geq 0$):

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}gt^2 & | \cdot 2 \\ \Leftrightarrow 2s &= gt^2 & | : g \\ \Leftrightarrow \frac{2s}{g} &= t^2 & | \sqrt{} \\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2s}{g}} &= t \end{aligned}$$

Beim letzten Schritt muss man beachten, dass die Gleichung $t^2 = \frac{2s}{g}$ eigentlich zwei Lösungen besitzt: $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ und $t = -\sqrt{\frac{2s}{g}}$. Da negative Zeiten hier aber physikalisch keinen Sinn ergeben, betrachten wir lediglich die erste Lösung. Die Zeit t , die die Kugel benötigt, hängt offensichtlich davon ab, welche Strecke s vorgegeben wurde. Man kann also die Funktion $t : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit der Funktionsvorschrift

$$t(s) = \sqrt{\frac{2s}{g}}$$

formulieren. Diese Funktion gibt für jede beliebige (nicht negative) vorgegebene Strecke s an, wieviel Zeit t der Gegenstand im freien Fall benötigt, um sie zurückzulegen. Die Funktion führt von den positiven reellen Zahlen in die positiven reellen Zahlen, da sowohl negative Strecken als auch negative Zeiten in diesem Anwendungskontext keinen Sinn ergeben.

Hinweis:

Man kann die gleiche Funktion natürlich auch mit anderen Variablen definieren, die Ihnen aus der Schule eventuell geläufiger sind: Wenn man die Funktion mit f und ihr Argument mit x bezeichnet, lautet sie: $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{g}}$, wobei nun $f(x)$ die Zeit angibt, die der Gegenstand benötigt, und x die zurückgelegte Wegstrecke bezeichnet. Mit welchen Buchstaben man eine Funktion und Variablen bezeichnet, ist letztendlich eine Frage der persönlichen Vorlieben.

In Anwendungen werden manchmal Standardbezeichnungen verwendet, so in der Physik s für Weg / Strecke und t für Zeit (time).

Bei der Funktion $t(s)$ steht das Argument, also s , unter einer Wurzel. Es handelt sich daher um eine **Wurzelfunktion**. Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt aus dem dazugehörigen Graphen:

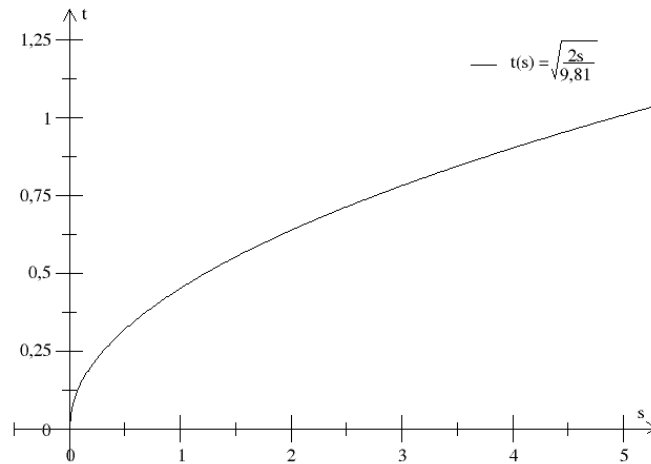


Bild 1

Aufgabe 1:

Wenn ein Gegenstand von der Spitze des schiefen Turms von Pisa, also aus 52 m Höhe, fallen gelassen wird, wie lange dauert es dann, bis er auf den Boden aufschlägt? Runden Sie auf zwei Nachkommastellen.

Sekunden.

Lösung:

Man benutzt die oben angegebene Formel für die Zeit t in Abhängigkeit der Strecke s und setzt $s = 52$ [in m] und die Erdbeschleunigung $g = 9,81$ [in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$] ein. Die Einheiten lassen wir der Einfachheit halber weg.

$$t(s) = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 52}{9,81}} \approx 3,26$$

Der Gegenstand schlägt also nach 3,26 s auf dem Boden auf.

Inhalte mit Erklärungen

Proportionale und antiproportionale Funktionen

Definition 1:

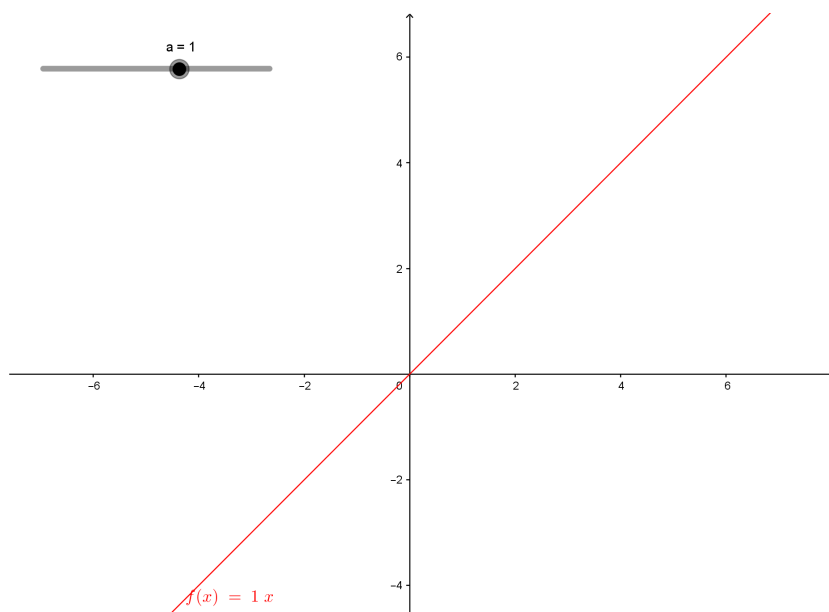
Eine **proportionale Funktion** ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit einer Zuordnungsvorschrift der Form

$$f(x) = a \cdot x,$$

wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine reelle Zahl ist, die nicht den Wert Null besitzen darf. Die Zahl a nennt man Proportionalitätsfaktor.

Proportionale Funktionen sind daher ein Spezialfall der linearen Funktionen, die Zuordnungsvorschriften der Form $f(x) = ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ besitzen. Man erhält sie aus den linearen Funktionen, indem man für $a \neq 0$ dann $b = 0$ setzt.

Mit Hilfe des folgenden Applets können Sie Ausschnitte aus den Graphen verschiedener proportionaler Funktionen betrachten, indem Sie den Parameter a von -5 bis $+5$ variieren.



Interaktion 1 (nur in digitaler Version)

Wie bei allen linearen Funktionen ist der Graph einer proportionalen Funktion eine Gerade. Im Unterschied zu den Graphen der linearen Funktionen mit $b \neq 0$ verläuft der Graph einer proportionalen Funktion stets durch den Ursprung des Koordinatensystems, da $f(0) = a \cdot 0 = 0$ ist, für jedes $a \in \mathbb{R}$.

Proportionale Funktionen benötigt man immer dann, wenn man den Zusammenhang zwischen zwei Größen beschreiben möchte, deren Werte immer im gleichen Verhältnis zueinander stehen.

Ein anschauliches Beispiel sind Preise von Lebensmitteln, bei denen oft festgesetzt wird, dass der Preis proportional zum Gewicht ist. Man findet in einem Aushang z. B. „1 kg Käse kostet 1,20EUR“. Gemeint ist damit (ungesagt), dass 2 kg 2,40EUR kosten, 0,5 kg 0,60EUR etc. kosten, dass also zwischen der Käsemenge K in kg und dem Preis P in EUR die Beziehung

$$P(K) = 1,2 \cdot K$$

besteht.

Eine wichtige Eigenschaft dieser Beziehung ist die **Quotientengleichheit**: Es gilt

$$\frac{P(K)}{K} = 1, 2$$

für alle Käsemengen K .

Satz 1: (Quotientengleichheit bei proportionalen Funktionen)

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine proportionale Funktion. Dann gilt:

- $\frac{f(x)}{x} = a$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2} (= a)$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \frac{x_1}{x_2}$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Diese drei Eigenschaften bilden die Basis für die Dreisatzrechnung auf der Basis von proportionalen Funktionen.

Es gibt aber auch Situationen, in denen eine Größe abnimmt, wenn eine andere zunimmt. Wenn man beispielsweise ein Stück Käse unter einer bestimmten Anzahl Personen gerecht aufteilt, bekommt jeder umso **weniger** Käse, je **mehr** Personen es sind.

Teilt man 200 g Käse auf 2 Personen auf, so erhält jeder $\frac{200}{2} = 100$ g Käse. Teilt man 200 g Käse auf 4 Personen auf, so erhält jeder nur noch 50 g und bei 10 Personen sind es nur noch 20 g Käse. Das Verhältnis zwischen der Anzahl der Personen und der jeweiligen Käsemenge pro Person ist also nicht konstant:

$$\frac{2}{100} \neq \frac{4}{50} \neq \frac{10}{20}.$$

Eine andere Größe ist dagegen konstant: Die Gesamtmenge an Käse. Sie entspricht in jedem Fall dem Produkt aus Personenanzahl und Käsemenge pro Person. Dies kann man durch Nachrechnen verifizieren:

$$200 = 2 \cdot 100 = 4 \cdot 50 = 10 \cdot 20.$$

Bezeichnet K die Käsemenge, die jede Person erhält, und n die Anzahl der Personen, so gilt offenbar

$$n \cdot K = 200.$$

Solche Zusammenhänge, bei denen eine Größe (hier: die Käsemenge pro Person) abnimmt, wenn eine andere (hier: Personenanzahl) zunimmt, aber das Produkt der beiden Größen konstant bleibt, können durch antiproportionale Funktionen beschrieben werden.

Definition 2:

Eine **antiproportionale Funktion** ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit einer Zuordnungsvorschrift der Form

$$f(x) = \frac{a}{x},$$

wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine reelle Zahl ist, die nicht Null sein darf. Aus dem Definitionsbereich muss der Wert $x = 0$ ebenfalls ausgeschlossen werden, da die Funktion sonst nicht definiert ist.

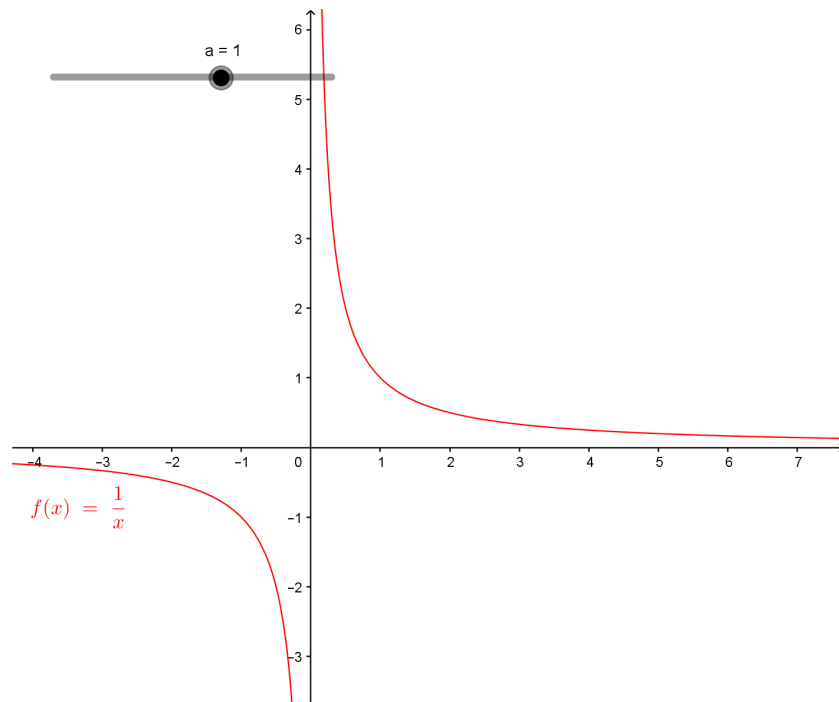
In Sachsituationen gilt in der Regel $x > 0$.

Gemäß der Potenzgesetze (siehe hierzu Lerneinheit *Potenzen, Wurzeln, Logarithmen*) kann man die Zuordnungsvorschrift auch als

$$f(x) = a \cdot x^{-1}$$

schreiben.

Der Graph einer antiproportionalen Funktion ist stets eine Hyperbel, deren charakteristische Form Sie anhand des folgenden Applets für verschiedene Werte von a zwischen -5 und 5 erkennen können:



Interaktion 2 (nur in digitaler Version)

Eigenschaften antiproportionaler Funktionen

Satz 2: (Produktgleichheit)

Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ eine antiproportionale Funktion mit

$$f(x) = \frac{a}{x}.$$

Dann gilt

- $f(x) \cdot x = a$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $f(x_1) \cdot x_1 = f(x_2) \cdot x_2 (= a)$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \frac{x_2}{x_1}$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Diese Eigenschaften bilden die Basis für die „Dreisatzrechnung bei antiproportionalen Zuordnungen“, die man aus der Schule kennt.

Elementare Potenzfunktionen

Definition 3:

Eine **elementare Potenzfunktion** ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit einer Zuordnungsvorschrift der Form

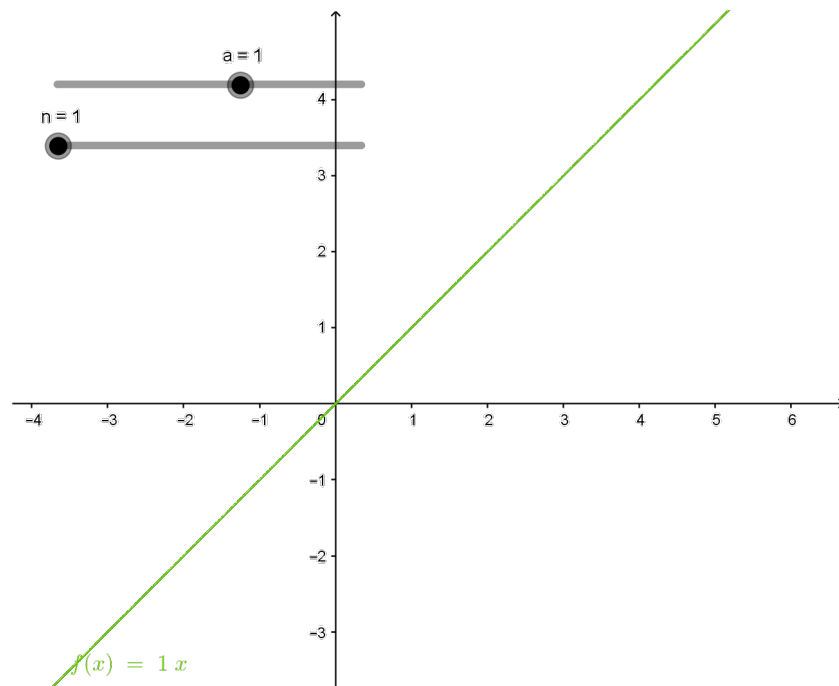
$$f(x) = ax^n,$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl ist.

Für $n = 1$ nennt man die Funktion $f(x) = a \cdot x$ auch proportionale Funktion oder Zuordnung; der Graph ist in diesem Fall eine Gerade (siehe oben). Für $n = 2$ ergibt sich eine quadratische Funktion, deren Graph eine Parabel darstellt.

Aufgabe 2:

Ändern Sie die Parameter a (a liegt zwischen -5 und 5) und n (wobei n die natürlichen Zahlen zwischen 1 und 10 annehmen kann), um sich einen Überblick über die Potenzfunktionen zu verschaffen.



Interaktion 3 (nur in digitaler Version)

Beispiel 1:

Potenzfunktionen mit geraden Exponenten:

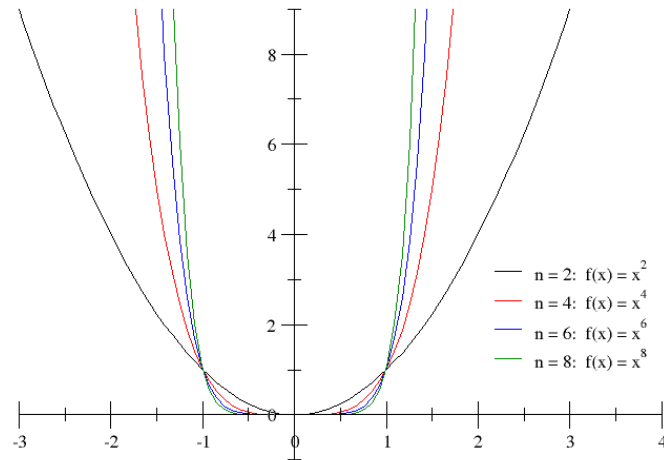


Bild 2

Beispiel 2:

Potenzfunktionen mit ungeraden Exponenten:

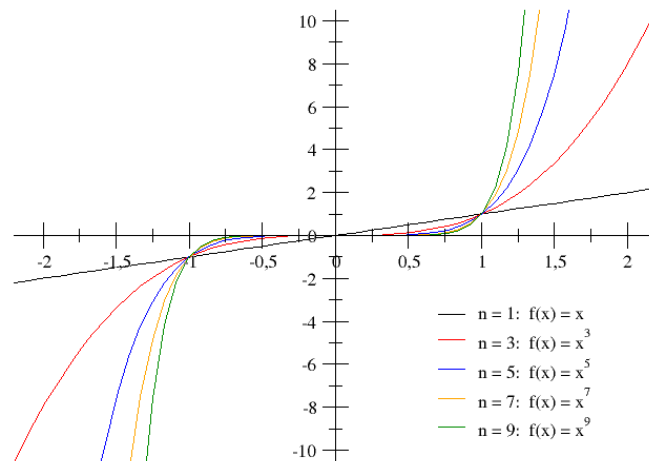


Bild 3

Wurzelfunktionen

Man kann Potenzfunktionen nun dahingehend erweitern, dass man nicht nur natürliche oder ganze Zahlen, sondern auch rationale Zahlen als Exponent zulässt.

Wie in der Lerneinheit *Potenzen, Wurzeln, Logarithmen* beschrieben, sind rationale Zahlen im Exponenten eine andere Schreibweise für Wurzelausdrücke:

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x},$$

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Betrachten wir die Funktion f mit der Zuordnungsvorschrift $f(x) = \sqrt{x}$ für $x \geq 0$. Wie in der Lerneinheit *Elementare Funktionen* erklärt wird, muss man immer den Definitions- und Zielbereich angeben, um eine Funktion zu definieren.

Aufgabe 3:

Was ist der maximal mögliche Definitionsbereich für die Zuordnungsvorschrift $f(x) = \sqrt{x}$?

- ☐ $\mathbb{R}$
- ☐ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
- ☐ $\mathbb{R}_0^+$
- ☐ $\mathbb{R}^+$

Lösung:

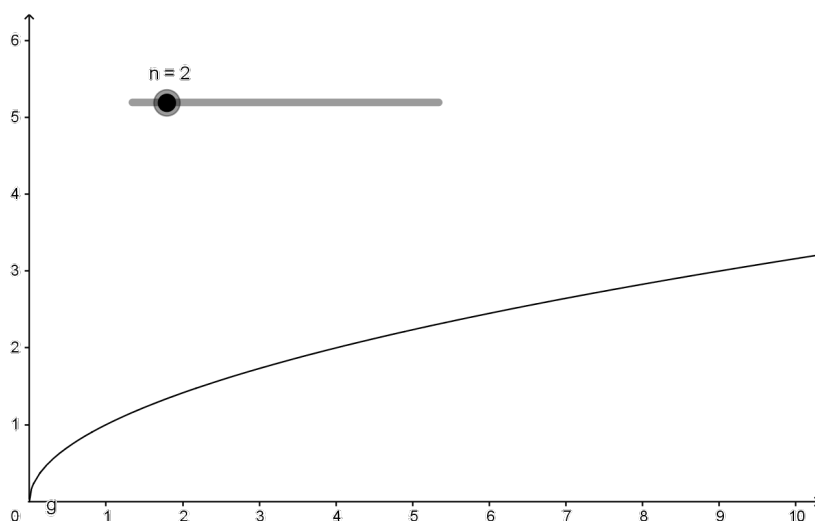
Die Wurzelfunktion ist nur für positive Werte und Null definiert. Daher muss $x \in \mathbb{R}_0^+$ gelten, also x aus der Menge der positiven reellen Zahlen (einschließlich Null) stammen.

Die Wurzel aus einer reellen Zahl hat stets einen positiven Wert. Solange man keinen Vorfaktor zulässt, ist der Wertebereich dieser Funktion daher $\mathbb{R}_0^+$.

Aufgabe 4:

Betrachten Sie im Applet nun die allgemeinere Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq 10$.

Wie ändert sich der Funktionswert der Wurzelfunktion an der Stelle $x = 2$ in Abhängigkeit vom Exponenten?



Interaktion 4 (nur in digitaler Version)

- ☐ Je größer der Wert von n ist, desto kleiner wird der Funktionswert an der Stelle $x = 2$.
- ☐ Je kleiner der Exponent $\frac{1}{n}$ ist, desto größer werden die Funktionswerte an jeder Stelle x .
- ☐ Je größer der Exponent $\frac{1}{n}$ ist, desto größer wird der Funktionswert an der Stelle $x = 2$.

Lösung:

Man kann anhand des Applets erkennen, dass größere Werte von n zu flacheren Graphen führen. Sie verlaufen allerdings alle durch den Punkt $(1; 1)$. Das bedeutet: je kleiner n ist, desto größer sind die Funktionswerte $f(x)$ an jeder Stelle $x > 1$ und somit auch an der Stelle $x = 2$.

Wird n kleiner, so wird der Exponent $\frac{1}{n}$ größer. Ein größerer Exponent $\frac{1}{n}$ führt also zu größeren Funktionswerten an der Stelle $x = 2$.

Allgemeine Potenzfunktionen

Proportionale und antiproportionale Funktionen sowie die bisher behandelten Potenz- und Wurzelfunktionen sind lauter Spezialfälle der allgemeinen Potenzfunktion.

Definition 4:

Eine **Potenzfunktion** ist eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit einer Zuordnungsvorschrift der Form

$$f(x) = ax^r,$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen sind.

Der maximal mögliche Definitionsbereich D einer Potenzfunktion hängt vom Exponenten r ab:

- Wenn der Exponent r eine natürliche Zahl ist, dann ist der maximale Definitionsbereich einer Potenzfunktion die Menge der reellen Zahlen, also $\mathbb{R}$.
- Wenn der Exponent r eine negative ganze Zahl ist, dann ist der maximale Definitionsbereich einer Potenzfunktion die Menge der reellen Zahlen ohne Null, also $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Wenn der Exponent r positiv, reell und nicht-ganzzahlig ist, dann ist der maximale Definitionsbereich einer Potenzfunktion die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen, also $\mathbb{R}_0^+$.
- Wenn der Exponent r negativ, reell und nicht-ganzzahlig ist, dann ist der maximale Definitionsbereich einer Potenzfunktion die Menge der positiven reellen Zahlen, also $\mathbb{R}^+$.

Bemerkungen

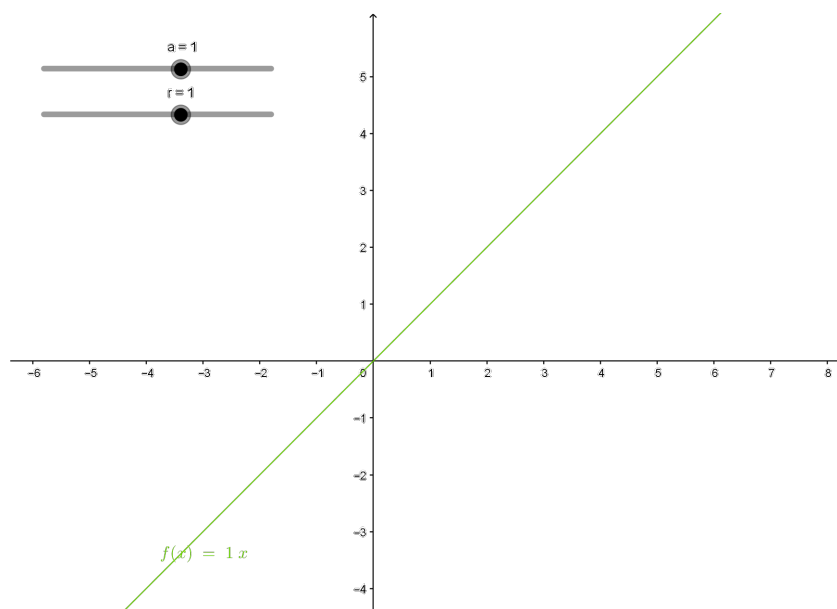
- Spezialfälle für Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten sind die proportionalen Funktionen.
- Spezialfälle für Potenzfunktionen mit negativen, ganzzahligen Exponenten sind die antiproportionalen Funktionen.

Beispielsweise ist die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{5}{x}$$

eine antiproportionale Funktion; der Funktionswert wird für ein immer größer werdendes x immer kleiner.

Anhand des folgenden Applets können Sie noch einmal die verschiedenen Fälle betrachten, indem Sie für a und r unterschiedliche Werte zwischen -5 und 5 einstellen:



Interaktion 5 (*nur in digitaler Version*)

Aufgaben

Aufgabe 5:

Welche der folgenden Zuordnungsvorschriften kann zu einer antiproportionalen Funktion gehören?

- ☐ 1.) $f(x) = \frac{735}{x}$
- ☐ 2.) $f(x) = -2 \cdot x$
- ☐ 3.) $f(x) = 4 \cdot x^{-1}$
- ☐ 4.) $f(x) = \frac{8}{x^2}$

Lösung:

Antiproportionale Zuordnungen besitzen Zuordnungsvorschriften der Form $f(x) = a \cdot \frac{1}{x}$ bzw. $f(x) = \frac{a}{x}$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Nur die Zuordnungsvorschriften 1.) ($f(x) = \frac{735}{x}$) und 3.) ($f(x) = 4 \cdot x^{-1}$) entsprechen diesem Kriterium. Bei 2.) tritt die Variable x in erster Potenz statt in der Potenz -1 auf, und bei 4.) tritt sie in der Potenz -2 statt -1 auf.

Aufgabe 6:

Die folgende Tabelle soll die Funktionswerte einer proportionalen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ enthalten. Füllen Sie sie entsprechend aus.

x	2	3	8	15	100	5000
$f(x)$	5					

Lösung:

Eine proportionale Funktion folgt immer einer Zuordnungsvorschrift $f(x) = a \cdot x$ mit $a \in \mathbb{R}$. Da hier durch den ersten Eintrag in der Tabelle vorgegeben ist, dass $f(2) = a \cdot 2 = 5$ gilt, muss $a = \frac{5}{2} = 2,5$ sein. Man erhält also die Zuordnungsvorschrift

$$f(x) = 2,5 \cdot x.$$

Mit ihrer Hilfe kann man für alle Werte von x , die in der Tabelle aufgelistet werden, $f(x)$ berechnen.

Ein alternativer Rechenweg besteht darin, auszunutzen, dass bei proportionalen Funktionen das Verhältnis (also mathematisch: der Quotient) zwischen Funktionswert $f(x)$ und Variable x konstant ist. Es muss also gelten:

$$\frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2}.$$

für zwei beliebige Stellen x_1 und x_2 und die dazugehörenden Funktionswerte $f(x_1)$ bzw. $f(x_2)$.

Konkret heißt das, dass z. B. für $x_1 = 2$, $f(x_1) = 5$ und $x_2 = 3$ gelten muss:

$$\frac{5}{2} = \frac{f(3)}{3}.$$

Diese Gleichung kann man nach $f(3)$ auflösen:

$$f(3) = \frac{5}{2} \cdot 3 = 7,5.$$

Auch auf diese Art und Weise kann man sämtliche Werte berechnen, die in die Tabelle einzutragen sind.

Unabhängig davon, welchen der beiden Rechenwege man wählt, erhält man folgende Tabelle:

x	2	3	8	15	100	5000
$f(x)$	5	7,5	20	37,5	250	12500

Aufgabe 7:

Die folgende Tabelle soll nun die Funktionswerte einer antiproportionalen Funktion $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ enthalten. Füllen Sie sie entsprechend aus. Runden Sie jeweils auf drei Nachkommastellen.

x	2	3	8	15	100	5000
$f(x)$	5					

Lösung:

Eine antiproportionale Funktion folgt immer einer Zuordnungsvorschrift $f(x) = \frac{a}{x}$ mit $a \in \mathbb{R}$. Da hier durch den ersten Eintrag in der Tabelle vorgegeben ist, dass $f(2) = \frac{a}{2} = 5$ gilt, muss $a = 5 \cdot 2 = 10$ sein. Man erhält also die Zuordnungsvorschrift

$$f(x) = \frac{10}{x}$$

Mit ihrer Hilfe kann man für alle Werte von x , die in der Tabelle aufgelistet werden, $f(x)$ berechnen.

Ein alternativer Rechenweg besteht darin, auszunutzen, dass bei antiproportionalen Funktionen der Funktionswert $f(x)$ um den gleichen Faktor abnimmt wie x zunimmt.

Es muss also gelten:

$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \frac{x_2}{x_1}.$$

für zwei beliebige Stellen x_1 und x_2 und die dazugehörenden Funktionswerte $f(x_1)$ bzw. $f(x_2)$.

Konkret heißt das, dass z. B. für $x_1 = 2$, $f(x_1) = 5$ und $x_2 = 3$ gelten muss:

$$\frac{5}{f(3)} = \frac{3}{2}.$$

Diese Gleichung kann man nach $f(3)$ auflösen:

$$f(3) = 5 \cdot \frac{2}{3} \approx 3,333.$$

Auch auf diese Art und Weise kann man sämtliche Werte berechnen, die in die Tabelle einzutragen sind.

Unabhängig davon, welchen der beiden Rechenwege man wählt, erhält man folgende Tabelle:

x	2	3	8	15	100	5000
$f(x)$	5	3,333	1,25	0,667	0,1	0,002

Aufgabe 8:

Gegeben seien die Potenzfunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x^3$ und die Potenzfunktion $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = 3x^{-3}$.

Berechnen Sie die Schnittpunkte der beiden Funktionen, falls vorhanden.

Wenn es mehrere Schnittpunkte gibt, geben Sie zuerst die Lösung mit dem kleineren x -Wert ein.

Erster Schnittpunkt:

$x_1 = \boxed{?}$ $y_1 = \boxed{?}$, falls vorhanden

Zweiter Schnittpunkt:

$x_2 = \boxed{?}$ $y_2 = \boxed{?}$, falls vorhanden

Überprüfen Sie anschließend Ihr Ergebnis, indem Sie die Graphen der Funktionen skizzieren.

Lösung:

Um Schnittpunkte zu finden, setzt man die beiden Funktionsvorschriften für $x \neq 0$ gleich:

$$\begin{aligned}
 3x^3 &= 3x^{-3} & | :3 \\
 \Leftrightarrow x^3 &= x^{-3} & | \cdot x^3 \\
 \Leftrightarrow x^6 &= 1
 \end{aligned}$$

Es gibt also die beiden Lösungen:

$$x_{1,2} = \pm 1$$

Man findet die Schnittpunkte daher an den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.

Die dazugehörigen Funktionswerte erhält man, indem man die x -Werte in eine der beiden Funktionsvorschriften einsetzt:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= f(x_1) = 3 \cdot (x_1)^3 = 3 \cdot (-1)^3 = -3 \\
 y_2 &= f(x_2) = 3 \cdot (x_2)^3 = 3 \cdot 1^3 = 3
 \end{aligned}$$

So ergeben sich die Schnittpunkte $(-1; -3)$ und $(1; 3)$, wie auch in folgender Skizze deutlich wird:

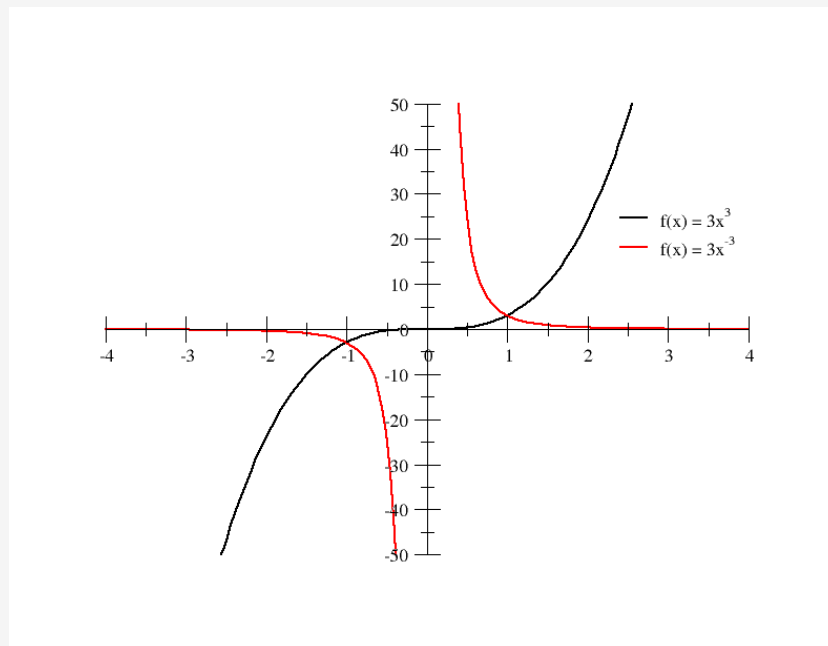


Bild 4

Aufgabe 9:

Gegeben seien die Potenzfunktionen $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x^{-1}$ und $g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{4}{5} \cdot x^{\frac{2}{7}}$.

Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Funktionen. Runden Sie auf zwei Nachkommastellen.

$x =$

$y =$

Fertigen Sie zusätzlich eine Skizze des Funktionsgraphen an.

Lösung:

Um Schnittpunkte zu finden, setzt man die beiden Funktionsvorschriften für $x > 0$ (das entspricht dem gemeinsamen Teil der Definitionsbereiche) gleich:

$$\begin{aligned}
 2x^{-1} &= \frac{4}{5} \cdot x^{\frac{2}{7}} && | \cdot x \\
 \Leftrightarrow 2 &= \frac{4}{5} \cdot x^{\frac{9}{7}} && | \cdot \frac{5}{4} \\
 \Leftrightarrow \frac{10}{4} &= x^{\frac{9}{7}} && | \text{umschreiben} \\
 \Leftrightarrow \frac{5}{2} &= \sqrt[7]{x^9} && | \text{mit 7 potenzieren} \\
 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^7 &= x^9 && | \sqrt[9]{}, \quad x > 0 \\
 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{9}} &= x \\
 \Leftrightarrow x &\approx 2,03943
 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde ein Taschenrechner verwendet.

Den dazugehörigen Funktionswert erhält man, indem man den Wert für x in eine der Funktionsvorschriften einsetzt:

$$\begin{aligned} f\left(\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{9}}\right) &= 2 \cdot \left(\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{9}}\right)^{-1} \\ &= 2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-\frac{7}{9}} \approx 0,98 \end{aligned}$$

So ergibt sich der Schnittpunkt $x \approx 2,04$, $y \approx 0,98$, wie auch in folgender Skizze deutlich wird:

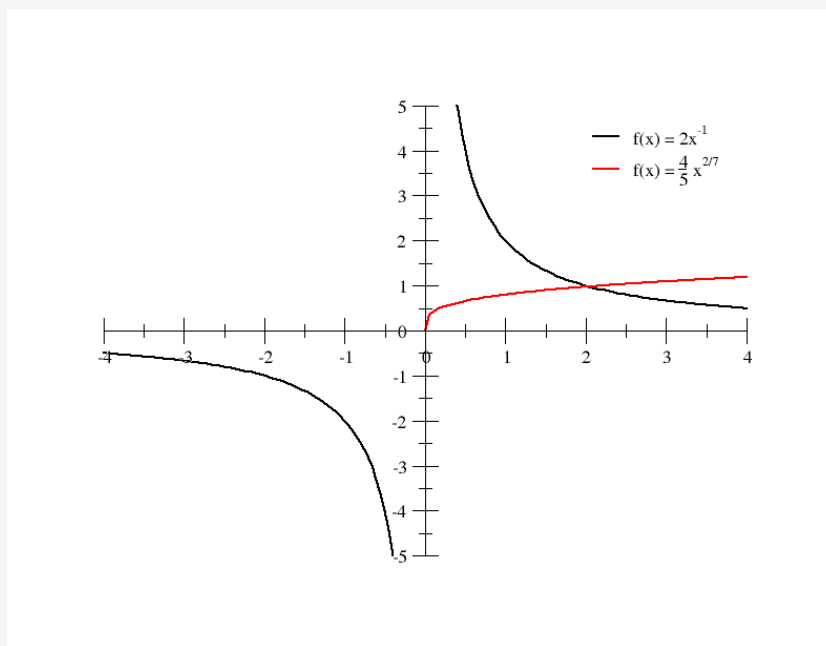


Bild 5

Aufgabe 10:

Welche der folgenden Funktionen sind punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems?

- ☐ $f_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = \frac{4}{x^5}$
- ☐ $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = 0,1 \cdot x^6$
- ☐ $f_3 : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_3(x) = 2 \cdot x^{\frac{1}{2}}$
- ☐ $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_4(x) = 0,4 \cdot x$

Fertigen Sie zusätzlich eine Skizze des Funktionsgraphen an.

Lösung:

Nur die Graphen von f_1 und f_4 können punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems sein, wie man an folgender Skizze erkennt:

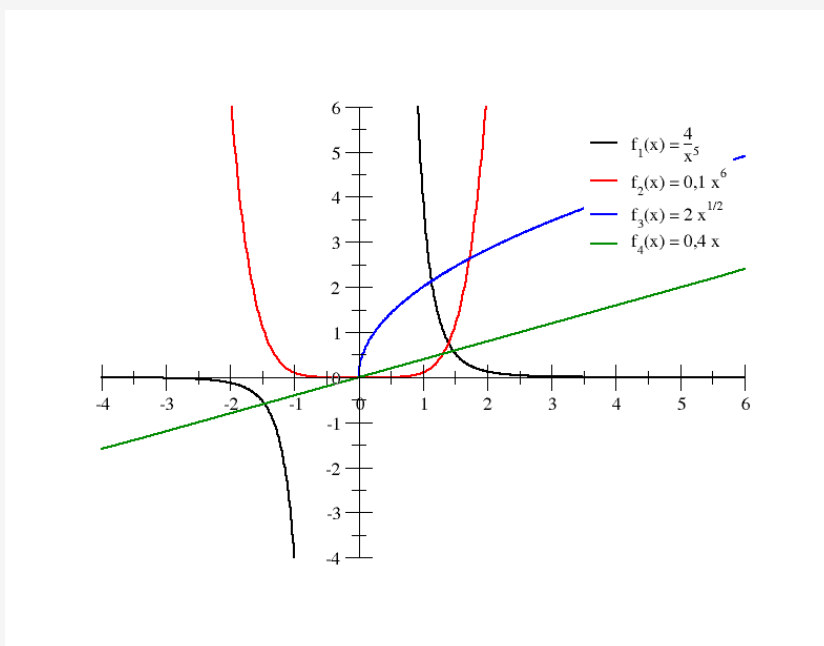


Bild 6

Wir prüfen rechnerisch nach, ob die Funktionen punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems sind: Wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt, so ist dies der Fall (siehe auch Lerneinheit *Elementare Funktionen*). Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned}
 f_1(-x) &= \frac{4}{(-x)^5} \\
 &= \frac{4}{(-1)^5 \cdot x^5} \\
 &= \frac{4}{(-1) \cdot x^5} \\
 &= (-1) \cdot \frac{4}{x^5} \\
 &= -f_1(x)
 \end{aligned}$$

Dies gilt für alle $x \neq 0$. Die Funktion f_1 ist also punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems.

Für f_2 ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 f_2(-x) &= 0,1 \cdot (-x)^6 \\
 &= 0,1 \cdot (-1)^6 \cdot x^6 \\
 &= 0,1 \cdot 1 \cdot x^6 \\
 &= f_2(x)
 \end{aligned}$$

Also gilt sogar für alle $x \neq 0$, dass $-f_2(-x) \neq f_2(x)$ ist. Die Funktion f_2 ist also nicht punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems.

Die Funktion f_3 ist eine Wurzelfunktion (bzw Potenzfunktion mit nicht-ganzzahligem Exponenten) und daher für $x < 0$ gar nicht definiert. Sie kann daher auch nicht punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems sein.

Für f_4 ergibt sich:

$$\begin{aligned} f_4(-x) &= 0,4 \cdot (-x) \\ &= 0,4 \cdot (-1) \cdot x \\ &= (-1) \cdot 0,4 \cdot x \\ &= -f_4(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Funktion f_4 ist also punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems.

Aufgabe 11:

Gesucht ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die also auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sein soll. Sie soll zur y -Achse symmetrisch sein und durch den Punkt $(1; 2)$ verlaufen. Überlegen Sie sich mindestens zwei verschiedene Lösungen.

Lösung:

Da die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sein soll, sind Potenzfunktionen mit negativem Exponenten ausgeschlossen, da sie für $x = 0$ nicht definiert sind. Auch Wurzelfunktionen und Potenzfunktionen mit nicht-ganzzahligem Exponenten sind ausgeschlossen, da diese nicht für negative Werte von x definiert sind.

Es bleiben also von den hier behandelten Funktionstypen nur Potenzfunktionen mit natürlichen Zahlen als Exponenten.

Dass eine Potenzfunktion zur y -Achse symmetrisch ist, ist nicht der Fall, wenn ihr Exponent eine ungerade Zahl ist, wie man anhand der Applets und Abbildungen im Bereich *Inhalte mit Erklärungen* beispielhaft erkennen kann.

Es kommen also Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Funktionsvorschriften der Art $f(x) = a \cdot x^n$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, n eine gerade Zahl, in Frage.

Hier gibt es keine eindeutige Lösung, sondern mehrere Funktionen, die durch den Punkt $(1; 2)$ verlaufen.

Betrachten wir als erstes Beispiel die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x^2$. Damit sie durch den Punkt $x = 1$, $f(x) = 2$ verläuft, muss gelten:

$$\begin{aligned} 2 &= a \cdot 1^2 \\ 2 &= a \end{aligned}$$

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x^2$ erfüllt also alle Anforderungen.

Betrachten wir als weiteres Beispiel die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x^4$. Damit sie durch den Punkt $x = 1$, $f(x) = 2$ verläuft, muss gelten:

$$\begin{aligned} 2 &= a \cdot 1^4 \\ 2 &= a \end{aligned}$$

Auch die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x^4$ erfüllt also alle Anforderungen.

Wenn man weiter sucht, findet man heraus, dass auch $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x^6$, $f(x) = 2x^8$, $f(x) = 2x^{10}$ und so weiter die Bedingungen erfüllen.

Das gilt für alle Funktionen $f(x) = 2x^n$ mit geraden natürlichen Exponenten, denn $f(1) = 2 \cdot 1^n = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Anwendung

Aufgabe 12:

Welcher der folgenden Zusammenhänge kann durch eine proportionale Funktion beschrieben werden?

- ☐ Strompreis und Stromverbrauch: Der Verbraucher bezahle einen vorher festgelegten Grundpreis und zusätzlich einen bestimmten Preis pro kWh Stromverbrauch.
- ☐ Gewicht und Preis für Fleischwurst: Der Kunde kann frei aussuchen, wie groß das Stück sein soll, das für ihn abgeschnitten wird. Bezahlt wird nach einem Kilogramm-Preis.

Lösung:

Strompreis und Stromverbrauch: Hier besteht kein proportionaler Zusammenhang, da der Kunde immer einen vorher festgelegten Grundpreis bezahlen muss. Es entsteht daher ein linearer Zusammenhang, der mit einer Zuordnungsvorschrift $f(x) = b + a \cdot x$ beschrieben werden kann, wobei b der Grundpreis ist und a den Preis pro kWh Stromverbrauch beschreibt. Proportionale Funktionen hingegen besitzen Zuordnungsvorschriften $f(x) = a \cdot x$ mit $a \in \mathbb{R}$ ohne den zusätzlichen additiven Term b .

Gewicht und Preis für Fleischwurst: Hier besteht ein proportionaler Zusammenhang, wenn es keinen Mengenrabatt gibt.

Aufgabe 13:

Der Body-Mass-Index b ist ein Maß dafür, ob ein Mensch normalgewichtig, über- oder untergewichtig ist. Er wird für erwachsene Menschen berechnet, indem man das Körpergewicht m (in kg) durch das Quadrat der Körpergröße (in Metern) dividiert. Die Körpergröße werde hier als l bezeichnet.

Wie lautet also die Formel, die den Zusammenhang von b , m und l beschreibt?

$b =$

Lösung:

Da man das Körpergewicht m (in kg) durch das Quadrat der Körpergröße l (in Metern), also durch l^2 , dividieren muss, um den Body-Mass-Index b zu erhalten, lautet die Formel

$$b = \frac{m}{l^2}$$

Betrachten wir nun verschiedene erwachsene Personen mit dem gleichen Gewicht $m = 80$ kg, aber verschiedener Größe l . Wie sieht die Kurve aus, an der man den Body-Mass-Index b dieser Personen (in Abhängigkeit von ihrer Größe l) ablesen kann? Zeichnen Sie die Kurve in einem geeigneten Ausschnitt.

Tipp (Aufklapptext)

Falls Ihnen die Verwendung verschiedener Buchstaben als Variablen noch Schwierigkeiten bereitet, können Sie statt der Variablen m hier auch direkt 80 kg einsetzen und die Variable l , die variiert wird, mit x bezeichnen. Sie erhalten also den Graph der Funktion $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit $f(x) = \frac{80}{x^2}$.

Lösung:

Da das Gewicht m konstant gehalten wird, hängt der Body-Mass-Index b nur noch von der Körpergröße l ab. Da l quadratisch vorkommt und im Nenner steht, erhält man eine Hyperbel. Da die Formel für den Body-Mass-Index nur für erwachsene Menschen gilt, macht nur ein Ausschnitt aus dieser Hyperbel Sinn, nämlich in etwa für Körpergrößen zwischen 1,50 m und 2,10 m:

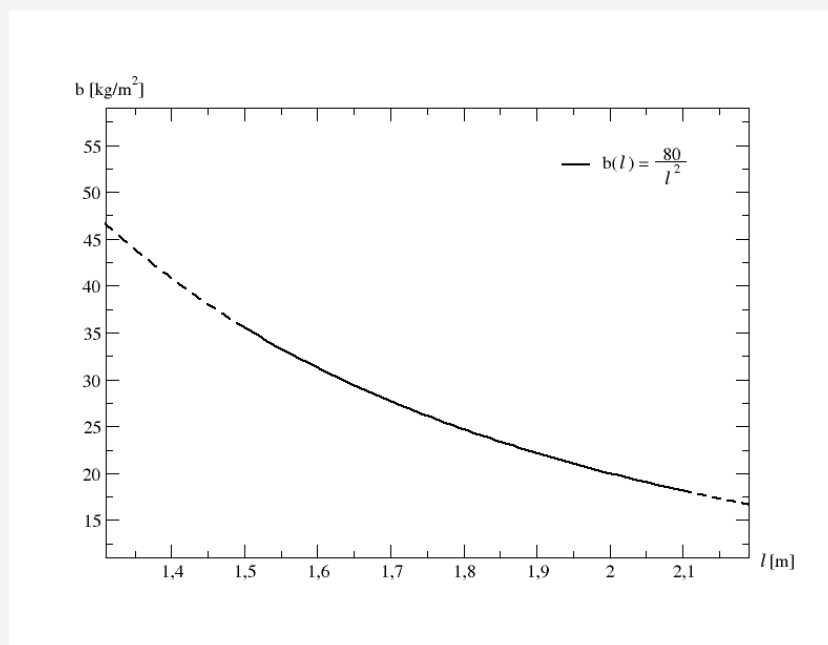


Bild 7

Aufgabe 14:

In der Physik betrachtet man unter anderem Pendelschwingungen. Eine kleine Kugel hänge dabei an einem Faden der Länge l und schwinde hin und her. Man kann herleiten, dass für die Periodendauer T , also die Zeit, die die Kugel für eine Periode (also für genau einmal hin- und zurückschwingen) braucht, die Formel

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

gilt, wobei $\pi \approx 3,14159$ die Kreiszahl ist und $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$ die Erdbeschleunigung.

Man kann an dieser Formel ablesen, dass die Periodendauer T von der Länge l des Fadens abhängt:

Je länger der Faden ist, desto größer wird auch die Periodendauer. Der Zusammenhang ist allerdings nicht linear, da die Fadenlänge l unter einer Wurzel steht.

Welcher der folgenden Ausschnitte aus Graphen kann zu der angegebenen Formel gehören?

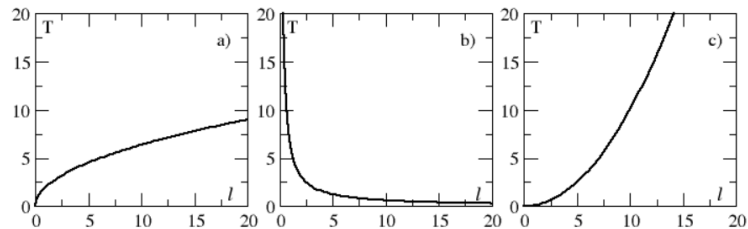


Bild 8

- ☐ Graph a)
- ☐ Graph b)
- ☐ Graph c)

Lösung:

Durch Vergleich mit den Graphen von Wurzelfunktionen und anderen Potenzfunktionen, die im Teil *Begründung und Erklärung* gezeigt werden, kann man erkennen, dass nur Graph a) zu einer Wurzelfunktion gehören kann.

Wie ändert sich die Periodendauer T , wenn man die Fadenlänge l vervierfacht?

- ☐ Sie verdoppelt sich.
- ☐ Sie vervierfacht sich.
- ☐ Sie nimmt um den Faktor $\sqrt{2}$ zu.
- ☐ Sie halbiert sich.

Lösung:

Die Periodendauer T hängt über die oben angegebene Formel $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$ mit der Fadenlänge l zusammen.

Für eine bestimmte Fadenlänge l_1 ergibt sich also die Periodendauer

$$T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}}$$

Wenn die zweite Fadenlänge viermal so lang ist wie die erste, kann man dies in die Formel einsetzen und erhält:

$$T_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot l_1}{g}}$$

Man kann den Faktor $\sqrt{4}$ vor den restlichen Ausdruck ziehen:

$$T_2 = \sqrt{4} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} = 2 \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} = 2 \cdot T_1$$

Also verdoppelt sich die Periodenlänge bei Vervierfachung der Fadenlänge.