

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn

FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Hinführung

In der Lerneinheit *Elementare Funktionen* wurde die Flugbahn einer Kugel betrachtet, die vom schiefen Turm von Pisa heruntergeworfen wurde. Für die Wegstrecke s , die ein Gegenstand im freien Fall in der Zeit t zurücklegt, gilt idealisiert ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands folgende Gleichung, wie man aus der Physik weiß:

$$s = \frac{1}{2}g \cdot t^2$$

wobei g die Erdbeschleunigung ist und $9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ (Näherungswert) beträgt.

Nun kann man sich aber auch die umgekehrte Frage stellen: Wie lange (also welche Zeit t) braucht der Gegenstand, um im freien Fall eine vorgegebene Strecke s zurückzulegen?

Hierfür muss man die obige Gleichung durch Äquivalenzumformungen nach t auflösen (da t für die Zeit steht, gilt immer $t \geq 0$):

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}gt^2 & | \cdot 2 \\ \Leftrightarrow 2s &= gt^2 & | : g \\ \Leftrightarrow \frac{2s}{g} &= t^2 & | \sqrt{} \\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2s}{g}} &= t \end{aligned}$$

Beim letzten Schritt muss man beachten, dass die Gleichung $t^2 = \frac{2s}{g}$ eigentlich zwei Lösungen besitzt: $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$ und $t = -\sqrt{\frac{2s}{g}}$. Da negative Zeiten hier aber physikalisch keinen Sinn ergeben, betrachten wir lediglich die erste Lösung. Die Zeit t , die die Kugel benötigt, hängt offensichtlich davon ab, welche Strecke s vorgegeben wurde. Man kann also die Funktion $t : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit der Funktionsvorschrift

$$t(s) = \sqrt{\frac{2s}{g}}$$

formulieren. Diese Funktion gibt für jede beliebige (nicht negative) vorgegebene Strecke s an, wieviel Zeit t der Gegenstand im freien Fall benötigt, um sie zurückzulegen. Die Funktion führt von den positiven reellen Zahlen in die positiven reellen Zahlen, da sowohl negative Strecken als auch negative Zeiten in diesem Anwendungskontext keinen Sinn ergeben.

Hinweis:

Man kann die gleiche Funktion natürlich auch mit anderen Variablen definieren, die Ihnen aus der Schule eventuell geläufiger sind: Wenn man die Funktion mit f und ihr Argument mit x bezeichnet, lautet sie: $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{g}}$, wobei nun $f(x)$ die Zeit angibt, die der Gegenstand benötigt, und x die zurückgelegte Wegstrecke bezeichnet. Mit welchen Buchstaben man eine Funktion und Variablen bezeichnet, ist letztendlich eine Frage der persönlichen Vorlieben.

In Anwendungen werden manchmal Standardbezeichnungen verwendet, so in der Physik s für Weg / Strecke und t für Zeit (time).

Bei der Funktion $t(s)$ steht das Argument, also s , unter einer Wurzel. Es handelt sich daher um eine **Wurzelfunktion**. Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt aus dem dazugehörigen Graphen:

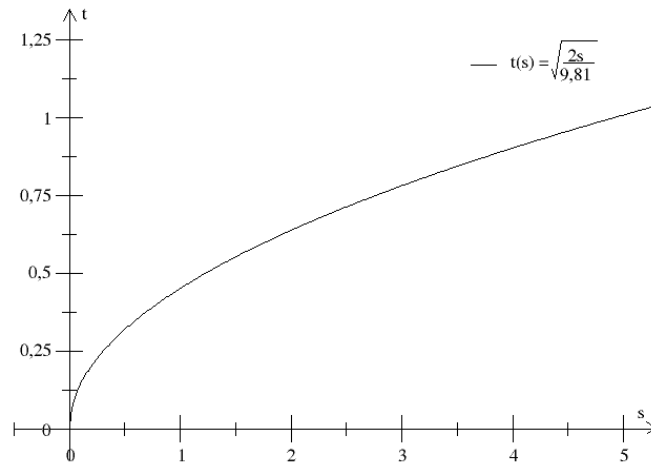


Bild 1

Aufgabe 1:

Wenn ein Gegenstand von der Spitze des schiefen Turms von Pisa, also aus 52 m Höhe, fallen gelassen wird, wie lange dauert es dann, bis er auf den Boden aufschlägt? Runden Sie auf zwei Nachkommastellen.

Sekunden.

Lösung:

Man benutzt die oben angegebene Formel für die Zeit t in Abhängigkeit der Strecke s und setzt $s = 52$ [in m] und die Erdbeschleunigung $g = 9,81$ [in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$] ein. Die Einheiten lassen wir der Einfachheit halber weg.

$$t(s) = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 52}{9,81}} \approx 3,26$$

Der Gegenstand schlägt also nach 3,26 s auf dem Boden auf.