

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn

FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Aufgaben

Aufgabe 5:

Welche der folgenden Zuordnungsvorschriften kann zu einer antiproportionalen Funktion gehören?

- ☐ 1.) $f(x) = \frac{735}{x}$
- ☐ 2.) $f(x) = -2 \cdot x$
- ☐ 3.) $f(x) = 4 \cdot x^{-1}$
- ☐ 4.) $f(x) = \frac{8}{x^2}$

Lösung:

Antiproportionale Zuordnungen besitzen Zuordnungsvorschriften der Form $f(x) = a \cdot \frac{1}{x}$ bzw. $f(x) = \frac{a}{x}$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Nur die Zuordnungsvorschriften 1.) ($f(x) = \frac{735}{x}$) und 3.) ($f(x) = 4 \cdot x^{-1}$) entsprechen diesem Kriterium. Bei 2.) tritt die Variable x in erster Potenz statt in der Potenz -1 auf, und bei 4.) tritt sie in der Potenz -2 statt -1 auf.

Aufgabe 6:

Die folgende Tabelle soll die Funktionswerte einer proportionalen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ enthalten. Füllen Sie sie entsprechend aus.

x	2	3	8	15	100	5000
$f(x)$	5					

Lösung:

Eine proportionale Funktion folgt immer einer Zuordnungsvorschrift $f(x) = a \cdot x$ mit $a \in \mathbb{R}$. Da hier durch den ersten Eintrag in der Tabelle vorgegeben ist, dass $f(2) = a \cdot 2 = 5$ gilt, muss $a = \frac{5}{2} = 2,5$ sein. Man erhält also die Zuordnungsvorschrift

$$f(x) = 2,5 \cdot x.$$

Mit ihrer Hilfe kann man für alle Werte von x , die in der Tabelle aufgelistet werden, $f(x)$ berechnen.

Ein alternativer Rechenweg besteht darin, auszunutzen, dass bei proportionalen Funktionen das Verhältnis (also mathematisch: der Quotient) zwischen Funktionswert $f(x)$ und Variable x konstant ist. Es muss also gelten:

$$\frac{f(x_1)}{x_1} = \frac{f(x_2)}{x_2}.$$

für zwei beliebige Stellen x_1 und x_2 und die dazugehörenden Funktionswerte $f(x_1)$ bzw. $f(x_2)$.

Konkret heißt das, dass z. B. für $x_1 = 2$, $f(x_1) = 5$ und $x_2 = 3$ gelten muss:

$$\frac{5}{2} = \frac{f(3)}{3}.$$

Diese Gleichung kann man nach $f(3)$ auflösen:

$$f(3) = \frac{5}{2} \cdot 3 = 7,5.$$

Auch auf diese Art und Weise kann man sämtliche Werte berechnen, die in die Tabelle einzutragen sind.

Unabhängig davon, welchen der beiden Rechenwege man wählt, erhält man folgende Tabelle:

x	2	3	8	15	100	5000
$f(x)$	5	7,5	20	37,5	250	12500

Aufgabe 7:

Die folgende Tabelle soll nun die Funktionswerte einer antiproportionalen Funktion $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ enthalten. Füllen Sie sie entsprechend aus. Runden Sie jeweils auf drei Nachkommastellen.

x	2	3	8	15	100	5000
$f(x)$	5					

Lösung:

Eine antiproportionale Funktion folgt immer einer Zuordnungsvorschrift $f(x) = \frac{a}{x}$ mit $a \in \mathbb{R}$. Da hier durch den ersten Eintrag in der Tabelle vorgegeben ist, dass $f(2) = \frac{a}{2} = 5$ gilt, muss $a = 5 \cdot 2 = 10$ sein. Man erhält also die Zuordnungsvorschrift

$$f(x) = \frac{10}{x}$$

Mit ihrer Hilfe kann man für alle Werte von x , die in der Tabelle aufgelistet werden, $f(x)$ berechnen.

Ein alternativer Rechenweg besteht darin, auszunutzen, dass bei antiproportionalen Funktionen der Funktionswert $f(x)$ um den gleichen Faktor abnimmt wie x zunimmt.

Es muss also gelten:

$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \frac{x_2}{x_1}.$$

für zwei beliebige Stellen x_1 und x_2 und die dazugehörenden Funktionswerte $f(x_1)$ bzw. $f(x_2)$.

Konkret heißt das, dass z. B. für $x_1 = 2$, $f(x_1) = 5$ und $x_2 = 3$ gelten muss:

$$\frac{5}{f(3)} = \frac{3}{2}.$$

Diese Gleichung kann man nach $f(3)$ auflösen:

$$f(3) = 5 \cdot \frac{2}{3} \approx 3,333.$$

Auch auf diese Art und Weise kann man sämtliche Werte berechnen, die in die Tabelle einzutragen sind.

Unabhängig davon, welchen der beiden Rechenwege man wählt, erhält man folgende Tabelle:

x	2	3	8	15	100	5000
$f(x)$	5	3,333	1,25	0,667	0,1	0,002

Aufgabe 8:

Gegeben seien die Potenzfunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x^3$ und die Potenzfunktion $g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = 3x^{-3}$.

Berechnen Sie die Schnittpunkte der beiden Funktionen, falls vorhanden.

Wenn es mehrere Schnittpunkte gibt, geben Sie zuerst die Lösung mit dem kleineren x -Wert ein.

Erster Schnittpunkt:

$x_1 = \boxed{?}$ $y_1 = \boxed{?}$, falls vorhanden

Zweiter Schnittpunkt:

$x_2 = \boxed{?}$ $y_2 = \boxed{?}$, falls vorhanden

Überprüfen Sie anschließend Ihr Ergebnis, indem Sie die Graphen der Funktionen skizzieren.

Lösung:

Um Schnittpunkte zu finden, setzt man die beiden Funktionsvorschriften für $x \neq 0$ gleich:

$$\begin{aligned}
 3x^3 &= 3x^{-3} & | :3 \\
 \Leftrightarrow x^3 &= x^{-3} & | \cdot x^3 \\
 \Leftrightarrow x^6 &= 1
 \end{aligned}$$

Es gibt also die beiden Lösungen:

$$x_{1,2} = \pm 1$$

Man findet die Schnittpunkte daher an den Stellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.

Die dazugehörigen Funktionswerte erhält man, indem man die x -Werte in eine der beiden Funktionsvorschriften einsetzt:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= f(x_1) = 3 \cdot (x_1)^3 = 3 \cdot (-1)^3 = -3 \\
 y_2 &= f(x_2) = 3 \cdot (x_2)^3 = 3 \cdot 1^3 = 3
 \end{aligned}$$

So ergeben sich die Schnittpunkte $(-1; -3)$ und $(1; 3)$, wie auch in folgender Skizze deutlich wird:

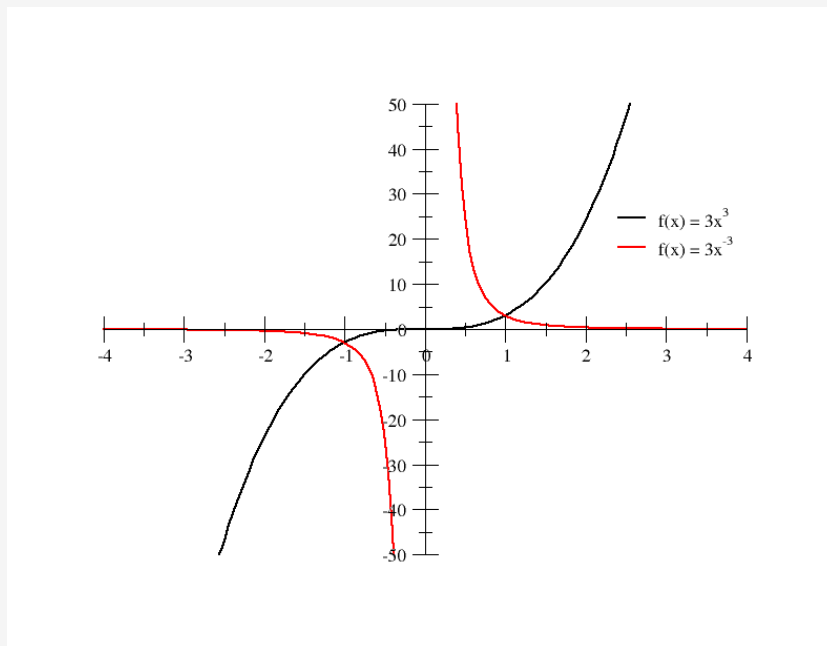


Bild 4

Aufgabe 9:

Gegeben seien die Potenzfunktionen $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x^{-1}$ und $g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{4}{5} \cdot x^{\frac{2}{7}}$.

Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Funktionen. Runden Sie auf zwei Nachkommastellen.

$x =$

$y =$

Fertigen Sie zusätzlich eine Skizze des Funktionsgraphen an.

Lösung:

Um Schnittpunkte zu finden, setzt man die beiden Funktionsvorschriften für $x > 0$ (das entspricht dem gemeinsamen Teil der Definitionsbereiche) gleich:

$$\begin{aligned}
 2x^{-1} &= \frac{4}{5} \cdot x^{\frac{2}{7}} && | \cdot x \\
 \Leftrightarrow 2 &= \frac{4}{5} \cdot x^{\frac{9}{7}} && | \cdot \frac{5}{4} \\
 \Leftrightarrow \frac{10}{4} &= x^{\frac{9}{7}} && | \text{umschreiben} \\
 \Leftrightarrow \frac{5}{2} &= \sqrt[7]{x^9} && | \text{mit 7 potenzieren} \\
 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^7 &= x^9 && | \sqrt[9]{}, \quad x > 0 \\
 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{9}} &= x \\
 \Leftrightarrow x &\approx 2,03943
 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde ein Taschenrechner verwendet.

Den dazugehörigen Funktionswert erhält man, indem man den Wert für x in eine der Funktionsvorschriften einsetzt:

$$\begin{aligned} f\left(\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{9}}\right) &= 2 \cdot \left(\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{7}{9}}\right)^{-1} \\ &= 2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-\frac{7}{9}} \approx 0,98 \end{aligned}$$

So ergibt sich der Schnittpunkt $x \approx 2,04$, $y \approx 0,98$, wie auch in folgender Skizze deutlich wird:

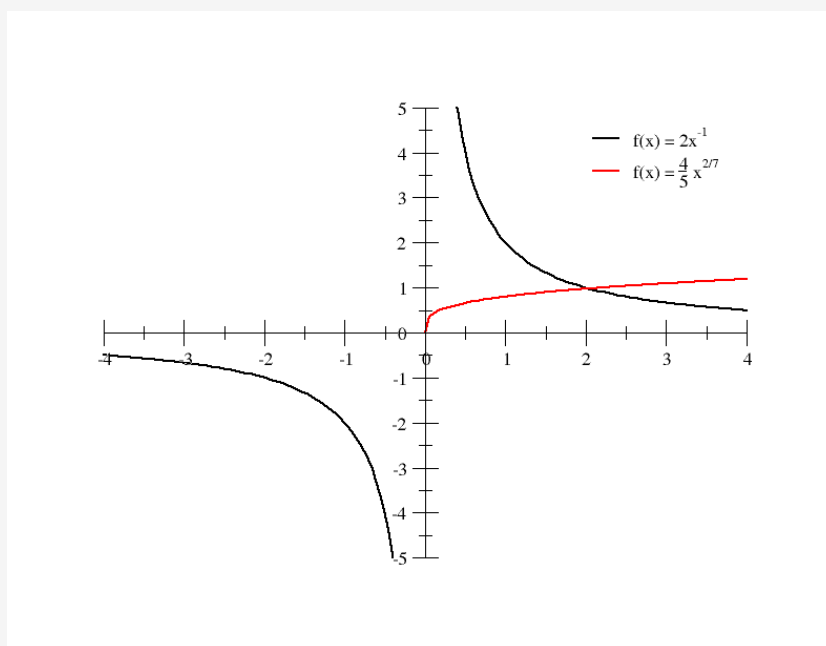


Bild 5

Aufgabe 10:

Welche der folgenden Funktionen sind punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems?

- ☐ $f_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = \frac{4}{x^5}$
- ☐ $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = 0,1 \cdot x^6$
- ☐ $f_3 : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_3(x) = 2 \cdot x^{\frac{1}{2}}$
- ☐ $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_4(x) = 0,4 \cdot x$

Fertigen Sie zusätzlich eine Skizze des Funktionsgraphen an.

Lösung:

Nur die Graphen von f_1 und f_4 können punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems sein, wie man an folgender Skizze erkennt:

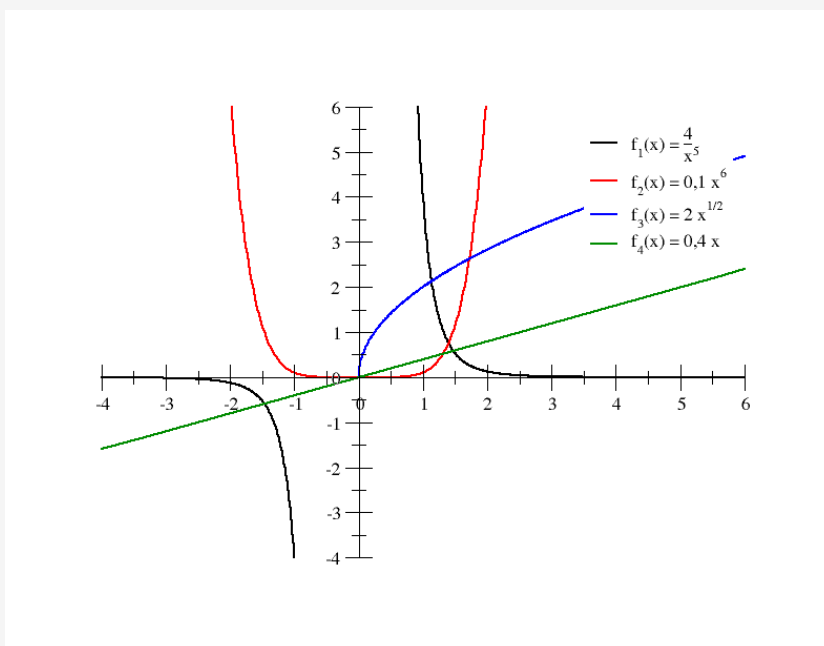


Bild 6

Wir prüfen rechnerisch nach, ob die Funktionen punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems sind: Wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt, so ist dies der Fall (siehe auch Lerneinheit *Elementare Funktionen*). Wir rechnen nach:

$$\begin{aligned}
 f_1(-x) &= \frac{4}{(-x)^5} \\
 &= \frac{4}{(-1)^5 \cdot x^5} \\
 &= \frac{4}{(-1) \cdot x^5} \\
 &= (-1) \cdot \frac{4}{x^5} \\
 &= -f_1(x)
 \end{aligned}$$

Dies gilt für alle $x \neq 0$. Die Funktion f_1 ist also punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems.

Für f_2 ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 f_2(-x) &= 0,1 \cdot (-x)^6 \\
 &= 0,1 \cdot (-1)^6 \cdot x^6 \\
 &= 0,1 \cdot 1 \cdot x^6 \\
 &= f_2(x)
 \end{aligned}$$

Also gilt sogar für alle $x \neq 0$, dass $-f_2(-x) \neq f_2(x)$ ist. Die Funktion f_2 ist also nicht punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems.

Die Funktion f_3 ist eine Wurzelfunktion (bzw Potenzfunktion mit nicht-ganzzahligem Exponenten) und daher für $x < 0$ gar nicht definiert. Sie kann daher auch nicht punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems sein.

Für f_4 ergibt sich:

$$\begin{aligned} f_4(-x) &= 0,4 \cdot (-x) \\ &= 0,4 \cdot (-1) \cdot x \\ &= (-1) \cdot 0,4 \cdot x \\ &= -f_4(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Funktion f_4 ist also punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems.

Aufgabe 11:

Gesucht ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die also auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sein soll. Sie soll zur y -Achse symmetrisch sein und durch den Punkt $(1; 2)$ verlaufen. Überlegen Sie sich mindestens zwei verschiedene Lösungen.

Lösung:

Da die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sein soll, sind Potenzfunktionen mit negativem Exponenten ausgeschlossen, da sie für $x = 0$ nicht definiert sind. Auch Wurzelfunktionen und Potenzfunktionen mit nicht-ganzzahligem Exponenten sind ausgeschlossen, da diese nicht für negative Werte von x definiert sind.

Es bleiben also von den hier behandelten Funktionstypen nur Potenzfunktionen mit natürlichen Zahlen als Exponenten.

Dass eine Potenzfunktion zur y -Achse symmetrisch ist, ist nicht der Fall, wenn ihr Exponent eine ungerade Zahl ist, wie man anhand der Applets und Abbildungen im Bereich *Inhalte mit Erklärungen* beispielhaft erkennen kann.

Es kommen also Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Funktionsvorschriften der Art $f(x) = a \cdot x^n$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, n eine gerade Zahl, in Frage.

Hier gibt es keine eindeutige Lösung, sondern mehrere Funktionen, die durch den Punkt $(1; 2)$ verlaufen.

Betrachten wir als erstes Beispiel die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x^2$. Damit sie durch den Punkt $x = 1$, $f(x) = 2$ verläuft, muss gelten:

$$\begin{aligned} 2 &= a \cdot 1^2 \\ 2 &= a \end{aligned}$$

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x^2$ erfüllt also alle Anforderungen.

Betrachten wir als weiteres Beispiel die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x^4$. Damit sie durch den Punkt $x = 1$, $f(x) = 2$ verläuft, muss gelten:

$$\begin{aligned} 2 &= a \cdot 1^4 \\ 2 &= a \end{aligned}$$

Auch die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x^4$ erfüllt also alle Anforderungen.

Wenn man weiter sucht, findet man heraus, dass auch $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x^6$, $f(x) = 2x^8$, $f(x) = 2x^{10}$ und so weiter die Bedingungen erfüllen.

Das gilt für alle Funktionen $f(x) = 2x^n$ mit geraden natürlichen Exponenten, denn $f(1) = 2 \cdot 1^n = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.