

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn

FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

LE 8 - Höhere Funktionen

8.2 Exponentialfunktionen

Im Folgenden finden Sie die Abschnitte:

Übersicht	S. 1
Hinführung	S. 2
Inhalte mit Erklärungen	S. 15
Aufgaben	S. 22
Anwendung	S. 31

Übersicht

In diesem Kapitel werden u.a. folgende Themen behandelt

- Einführung der allgemeinen Exponentialfunktionen und deren Eigenschaften
- Algebraische und graphische Begründungen der Eigenschaften
- Einführung der Eulerschen Zahl e und der Exponentialfunktion zur Basis e
- Basiswechsel von Exponentialfunktionen
- Eigenschaften der e -Funktion
- Weiterführendes

Hinführung

Legende über das Schachspiel und die Reiskörner

Obwohl sich die Forschung über die genauen Umstände der Entstehung des Schachspiels unklar ist, hält sich die folgende Legende am Leben:

Der indische Minister Sissa ibn Dahir soll einst das Schachspiel erfunden haben, um seinen schwermütigen Herrscher Shihram aufzumuntern. Dem Tyrannen gefiel das Spiel derart gut, dass er - reich wie er war - seinem Untertanen jeden Wunsch erfüllen wollte. Der Minister forderte, dass auf das erste Feld seines Schachbretts ein Reiskorn gelegt werde. Auf die folgenden Felder des Schachbretts sollten weiter jeweils doppelt so viele Reiskörner gelegt werden, wie sich auf dem vorherigen Feld befanden. Als Lohn für seine Mühe wünschte sich der Minister nun die Gesamtzahl all dieser Reiskörner. Shihram war zunächst wütend über diesen seiner Ansicht nach lächerlichen Wunsch und sagte dem Minister diese Menge an Reis zu. Anschließend ergab sich allerdings ein großes Problem für den Herrscher. Können Sie sich vorstellen, worin das Problem bestand?

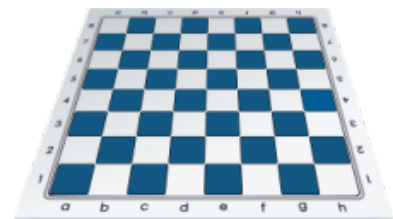


Bild 1

Aufgabe 1:

Um uns diesen Vorgang einmal näher zu betrachten, interessieren uns der Einfachheit halber nur die einzelnen Felder:

- Berechnen Sie, wie viele Reiskörner auf dem zweiten, dritten, vierten und auf dem letzten Feld liegen.
- Angenommen, es gäbe n Felder. Wie viele Körner würden auf dem n -ten Feld liegen? Überprüfen Sie ihre Antwort, indem sie z. B. für $n = 2$ einsetzen und es mit dem Ergebnis aus der letzten Teilaufgabe vergleichen.

Lösung:

Da stets eine Verdopplung vorliegt und auf dem ersten Feld ein Reiskorn liegt, sind auf dem zweiten zwei Reiskörner, auf dem dritten vier und auf dem vierten acht Körner. Betrachtet man diese Zahlenfolge näher, so zeigt sich, dass auf dem n -ten Feld jeweils 2^{n-1} Körner liegen müssen. So befinden sich z. B. auf dem zweiten Feld $2^{2-1} = 2^1 = 2$ Körner und auf dem vierten $2^{4-1} = 2^3 = 8$. Dementsprechend werden auf dem letzten Schachfeld (dem 64-ten) genau $2^{64-1} = 2^{63} = 9\,223\,372\,036\,854\,775\,808$ Reiskörner zu finden sein.

Um die gesamte Menge an Reiskörnern zu berechnen, muss man letztlich noch die Anzahl der Körner auf den einzelnen Feldern addieren. Hierbei ergibt sich eine Gesamtzahl von 18446744073709551615 Körnern. Die Rechnung können Sie **hier nachlesen**. (Aufklapptext)

Auf dem ersten Feld liegt 1 Korn.

Auf den ersten beiden Feldern liegen zusammen $1 + 2 = 3$ Körner.

Auf den ersten drei Feldern liegen zusammen $3 + 4 = 7$ Körner.

Auf den ersten vier Feldern liegen zusammen $7 + 8 = 15$ Körner.

Auf den ersten fünf Feldern liegen zusammen $15 + 16 = 31$ Körner.

usw.

Es befinden sich z.B. auf den ersten beiden Feldern insgesamt $2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$ Körner und auf den ersten vier Feldern insgesamt $2^4 - 1 = 16 - 1 = 15$. Verallgemeinernd kann man vermuten, dass sich auf den ersten n Feldern $2^n - 1$ Körner befinden. Es müsste also folgende Formel gelten:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 \dots + 2^{n-2} + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

Dies ist eine bekannte Formel, die üblicherweise im Kontext der geometrischen Reihe begründet wird. Dementsprechend liegen auf allen 64 Schachfeldern zusammen genau $2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616 - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$ Reiskörner.

Um sich die Größenordnung dieser Menge vorzustellen, hier ein paar Rechenbeispiele:

- Diese Menge entspricht der Reisernte von 4 Jahren, wenn man die gesamte Erdoberfläche (einschließlich Pole und Wasserflächen) vollständig mit Reis bepflanzen könnte.

Rechnung zum Nachlesen (Aufklapptext)

1. *Wie schwer ist der gesamte Reis auf dem Schachfeld?*

Wir können davon ausgehen, dass ein Reiskorn etwa 50 Milligramm wiegt. Das sind 0,05 g. (Unterschiedliche Reissorten wiegen natürlich unterschiedlich viel, aber dieser Wert genügt uns für eine grobe Abschätzung.)

Diesen Wert multiplizieren wir mit der (gerundeten) Anzahl der Reiskörner.

$$\begin{aligned} & 18,5 \text{ Trillionen} \cdot 0,05 \text{ g} \\ &= 0,925 \text{ Trillionen g} \\ &= 925 \text{ Milliarden g} \\ &= 925 \text{ Billionen kg} \\ &= 925 \text{ Milliarden t} \\ &= 925\,000\,000\,000 \text{ t} \end{aligned}$$

Der Reis auf dem Schachfeld wiegt also etwa 925 Milliarden Tonnen.

2. *Wie schwer ist der Reis, der weltweit in einem Jahr geerntet wird?*

Wir nehmen an, dass wir die gesamte Erdoberfläche (inklusive Pole und Wasserflächen) bepflanzen könnten. Bei Wikipedia (Zugriff im Februar 2020) kann nachgelesen werden, wie groß die Oberfläche unserer Erde ist: Sie beträgt 510 Millionen km^2 .

Die Fläche rechnen wir in die Einheit Hektar um.

$$\begin{aligned} & 510 \text{ Millionen km}^2 \\ &= 51\,000 \text{ Millionen Hektar} \\ &= 51 \text{ Milliarden Hektar} \end{aligned}$$

Nach Wikipedia (Zugriff im Februar 2020) war die weltweite Ernte von Reis in der Saison 2017/2018 etwa 4,6 Tonnen pro Hektar. Diesen Faktor multiplizieren wir mit dem Wert für die Erdoberfläche:

$$\begin{aligned} & 51 \text{ Milliarden Hektar} \cdot 4,6 \frac{\text{t}}{\text{Hektar}} \\ &= 234,6 \text{ Milliarden t} \end{aligned}$$

3. *Wie viele Jahre dauert es, bis wir mit der Reisernte die Reismenge des Schachfelds erreichen?*

Dafür teilen wir das Gewicht der Reismenge auf dem Schachbrett durch das Gewicht der Jahresernte:

$$\frac{925 \text{ Milliarden t}}{234,6 \text{ Milliarden } \frac{\text{t}}{\text{Jahr}}} = \frac{925}{234,6} \text{ Jahre} \approx 3,94 \text{ Jahre}$$

Die Reismenge auf dem Schachfeld ist also etwa die Ernte von 4 Jahren Reisanbau auf der gesamten Erdoberfläche.

- Der Transport dieser Getreidemenge würde derart viele Fahrzeuge erfordern, dass diese direkt hintereinander gestellt etwa 19 000 mal um die Erde reichen würden.

Rechnung zum Nachlesen (Aufklapptext)

1. *Wie viele Lastwagen (Lkw) braucht man für den Transport des Reises?*

Wie beim ersten Rechenbeispiel schon ausgerechnet, wiegt der Reis auf dem Schachbrett etwa 925 Milliarden Tonnen.

Ein Lastwagen hat in der Regel maximal 24 t Nutzlast.

Also benötigt man für den gesamten Reis

$$\frac{925 \text{ Milliarden t}}{24 \frac{\text{t}}{\text{Lkw}}} \approx 38,54 \text{ Milliarden Lkw} .$$

Im Folgenden rechnen wir vereinfacht mit etwa 40 Milliarden Lkw.

2. *Wie lang ist die Schlange aus Lastwagen?*

Nach Vorgaben der EU dürfen Nutzfahrzeuge maximal 18,75 m lang sein. Wir gehen davon aus, dass alle unsere 40 Milliarden Lkw diese maximale Länge ausnutzen.

Wenn wir alle Fahrzeuge direkt hintereinander stellen, dann ist die Gesamtlänge

$$\begin{aligned} & 40 \text{ Milliarden} \cdot 18,75 \text{ m} \\ &= 750 \text{ Milliarden m} \\ &= 750 \text{ Millionen km} \end{aligned}$$

3. *Wie oft reicht die Schlange aus Lkw um die Erde?*

Der Umfang der Erde beträgt etwa 40 000 km (z.B. bei Wikipedia (Zugriff im Februar 2020) nachzulesen). Das bedeutet, eine Schlange von Lkw, die genau 40 000 km lang ist, reicht genau einmal um die Erde.

Unsere Schlange ist mit 750 Millionen km jedoch deutlich länger als 40 000 km.

$$\frac{750\,000\,000 \text{ km}}{40\,000 \text{ km}} = 18\,750$$

Das heißt, die Lkw-Schlange reicht (gerundet auf Tausender) etwa 19 000 mal um die Erde.

- Wenn man den Berg Reis z. B. in England abladen würde, wäre das gesamte Land unter einer 3,50 m hohen Schicht Reis begraben.

Rechnung zum Nachlesen (Aufklapptext)

1. *Wie groß ist das Volumen der gesamten Reismenge auf dem Schachbrett?*

Wir nehmen an, dass ein Reiskorn etwa den Platz eines Quaders der Abmessungen $2 \text{ mm} \times 2 \text{ mm} \times 6 \text{ mm}$ benötigt. Die Abschätzung berücksichtigt, dass zwischen den Reiskörnern Lücken bleiben. Die Länge eines Kornes von 6 mm ist ein Durchschnittswert für verschiedene Sorten.

Das modellierte Volumen eines Reiskorns ist das Volumen eines Quaders:

$$2 \text{ mm} \cdot 2 \text{ mm} \cdot 6 \text{ mm} = 24 \text{ mm}^3.$$

Das Volumen der etwa 18,5 Trillionen Reiskörner auf dem Schachbrett ist dann

$$\begin{aligned} & 18,5 \text{ Trillionen} \cdot 24 \text{ mm}^3 \\ &= 444 \text{ Trillionen mm}^3 \\ &= 444 \text{ Billionen cm}^3 \\ &= 444 \text{ Milliarden dm}^3 \\ &= 444 \text{ Milliarden m}^3 \end{aligned}$$

2. *Wie hoch reicht der Reis, wenn er in England abgeladen wird?*

England ist nach Angaben von Wikipedia (Zugriff im Februar 2020) etwa $130\,000 \text{ km}^2$ groß. Eine Umrechnung der Einheiten ergibt:

$$\begin{aligned} & 130\,000 \text{ km}^2 \\ &= 13\,000\,000 \text{ Hektar} \\ &= 1\,300\,000\,000 \text{ Ar} \\ &= 130\,000\,000\,000 \text{ m}^2 \\ &= 130 \text{ Milliarden m}^2 \end{aligned}$$

Wenn der Reis gleichmäßig auf dieser Fläche verteilt wird, erhalten wir die Höhe der Schicht, indem wir das Volumen aus dem ersten Schritt durch die Größe der Fläche teilen:

$$\frac{444 \text{ Milliarden m}^3}{130 \text{ Milliarden m}^2} \approx 3,42 \text{ m}$$

Die Reisschicht ist also etwa 3,50 m hoch.

- Wie W. Haas 1982 in der Zeitschrift „Rochade“ schrieb: „Ein Güterzug mit allen Körnern, der mit 80 km/h, d. h. mit 2 Waggons pro Sekunde an uns vorbeiführt, jeder einzelne mit 20 Tonnen Reis beladen, bräuhete dazu 730 Jahre.“

Rechnung zum Nachlesen (Aufklapptext)

Die Anzahl an Loks, die man bräuchte, um diese Waggons zu ziehen, vernachlässigen wir bei den folgenden Betrachtungen.

1. *Wie viele Waggons werden für den Reis benötigt?*

Jeder Waggon fasst nach den Angaben 20 Tonnen, wobei insgesamt 925 Milliarden Tonnen Reis verladen werden müssen. Es werden also

$$\frac{925 \text{ Milliarden t}}{20 \frac{\text{t}}{\text{Waggon}}} = 46,25 \text{ Milliarden Waggons}$$

benötigt.

2. *Wie lange brauchen die Waggons, um an uns vorbeizufahren?*

Nach W. Haas fahren 2 Waggons pro Sekunde an uns vorbei, sodass wir für die etwa 46 Milliarden Waggons „nur“ 23 Milliarden Sekunden warten müssen.

Damit wir uns diese Zeitspanne besser vorstellen können, rechnen wir die Größe in die Einheit Jahre um.

$$\begin{aligned} & \frac{23\,000\,000\,000 \text{ s}}{23\,000\,000\,000} \text{ Jahre} \\ &= \frac{23\,000\,000\,000}{60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365} \text{ Jahre} \\ &\approx 729,33 \text{ Jahre} \end{aligned}$$

Also müssen wir 730 Jahre am Bahnübergang warten, bis der Zug vorbeigefahren ist.

Aufgabe 2:

Neue Betrachtungen

Wir betrachten die Zuordnung, die jedem Feld n die Anzahl der Körner $f(n)$ auf diesem Feld zuordnet, als Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$:

n	1	2	3	4	...
$f(n)$	1	2	4	8	...

- Schreiben Sie die Funktionsgleichung auf.
- Zeichnen Sie den Funktionsgraphen mithilfe der Werte, die Sie oben berechnet haben.

Lösung:

- Es ist $f(n) = 2^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Hier nun ein Ausschnitt des Graphen der Funktion $f(n) = 2^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

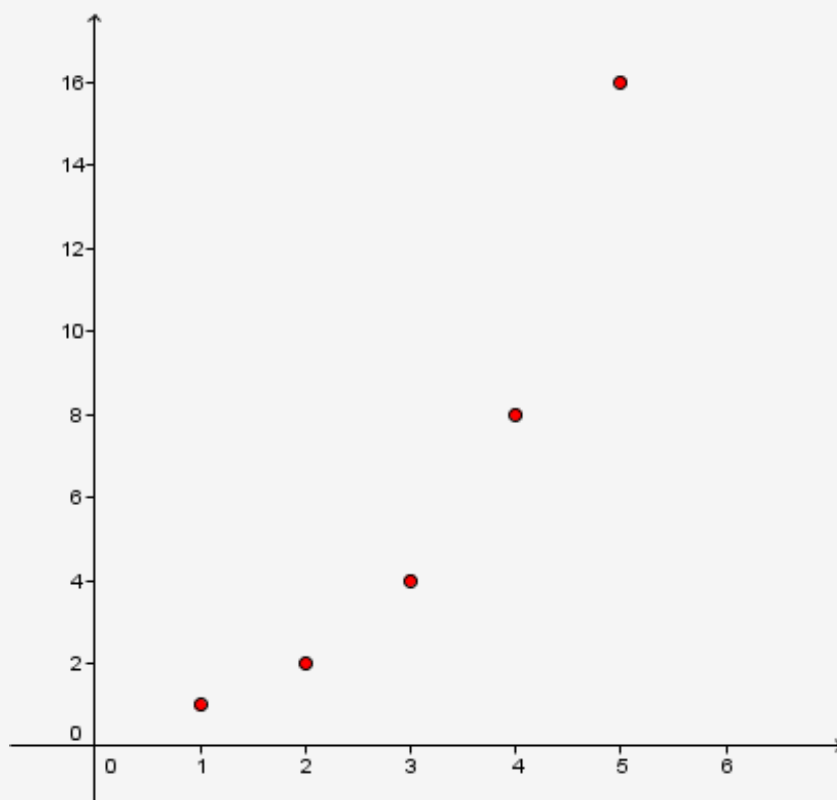


Bild 2 Ein Ausschnitt des Graphen der Funktion f mit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ und $n \mapsto 2^{n-1}$.

Aufgabe 3:

Höhere Forderungen

Stellen wir uns vor, der Minister hätte eine Verdreifachung gewünscht.

1. Geben Sie für diesen Fall einen Term an, der die Anzahl der Reiskörner auf dem n -ten Feld beschreibt.

Lösung:

Die Verdopplung haben wir mit dem Term 2^{n-1} beschrieben.

Wir könnten vermuten, dass die Verdreifachung zum jeweils nächsten Feld mit dem Term 3^{n-1} beschrieben werden kann.

Feldnummer n	1	2	3	4	...
Anz. Reiskörner auf dem Feld	1	3	9	27	...

Der Blick auf die Zahlenfolge unterstreicht die Vermutung, dass der Term 3^{n-1} die Verdreifachung beschreibt:

Auf dem ersten Feld liegt ein Reiskorn. Dies stimmt mit der Berechnung über den Term überein: Das erste Feld entspricht $n = 1$, die Anzahl der Reiskörner ist dann $3^{1-1} = 3^0 = 1$.

Auf dem zweiten Feld ($n = 2$) müssen es dann drei Körner sein, was mit $3^{2-1} = 3^1 = 3$ ebenfalls bestätigt wird.

- Nutzen Sie den Term nun, um die Anzahl der Reiskörner auf den einzelnen Feldern mit einer Funktion zu beschreiben (wie in der vorherigen Aufgabe).

Lösung:

Die Verdopplung der Reiskörner haben wir in der vorherigen Aufgabe mit der Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(n) = 2^{n-1}$ beschrieben. Für die Verdreifachung erhalten wir

$$g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad g(n) = 3^{n-1}.$$

- Zeichnen Sie den Graphen der Funktion in das Koordinatensystem, in das Sie in der vorherigen Aufgabe den Graphen zur Verdopplung der Reiskörner gezeichnet haben.

Lösung:

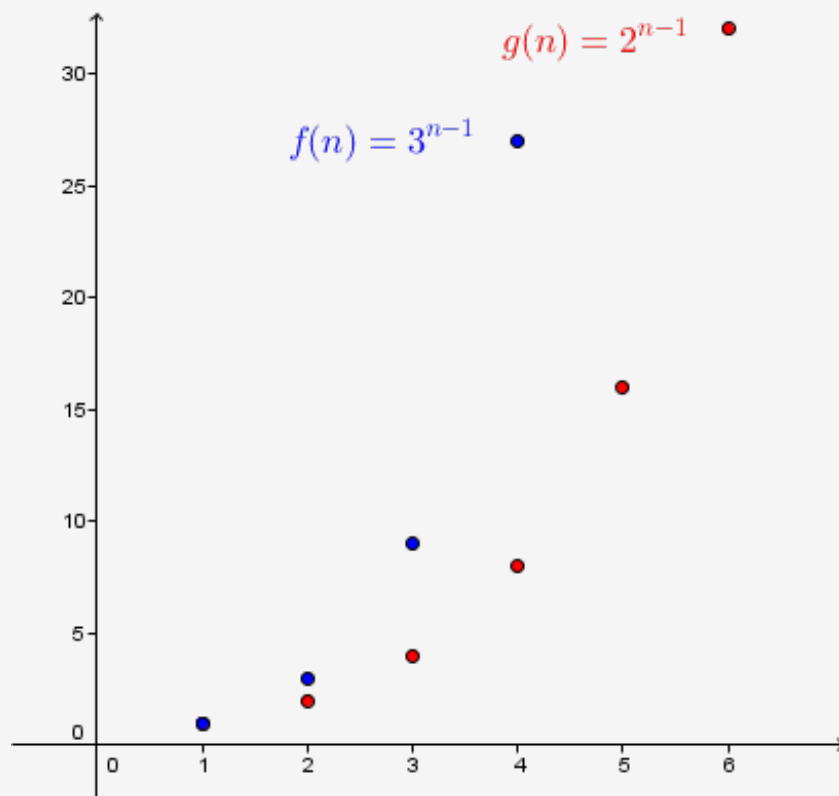


Bild 3 Darstellung der Funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = 2^{n-1}$ und $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g(n) = 3^{n-1}$ für $n = 1$ bis 6.

- Vergleichen Sie die Graphen der beiden Funktionen zur Verdopplung und Verdreifachung und halten Sie Gemeinsamkeiten sowie Unterschiede fest.

Lösung:

Beim Vergleich der beiden Graphen fällt zunächst einmal auf, dass der Punkt (1 ; 1) zu beiden Funktionsgraphen gehört:

$$f(1) = 2^{1-1} = 2^0 = 1$$

$$g(1) = 3^{1-1} = 3^0 = 1$$

Um die Unterschiede einfacher feststellen zu können, müssen wir die Achsen des Koordinatensystems noch weiter zeichnen als bisher.

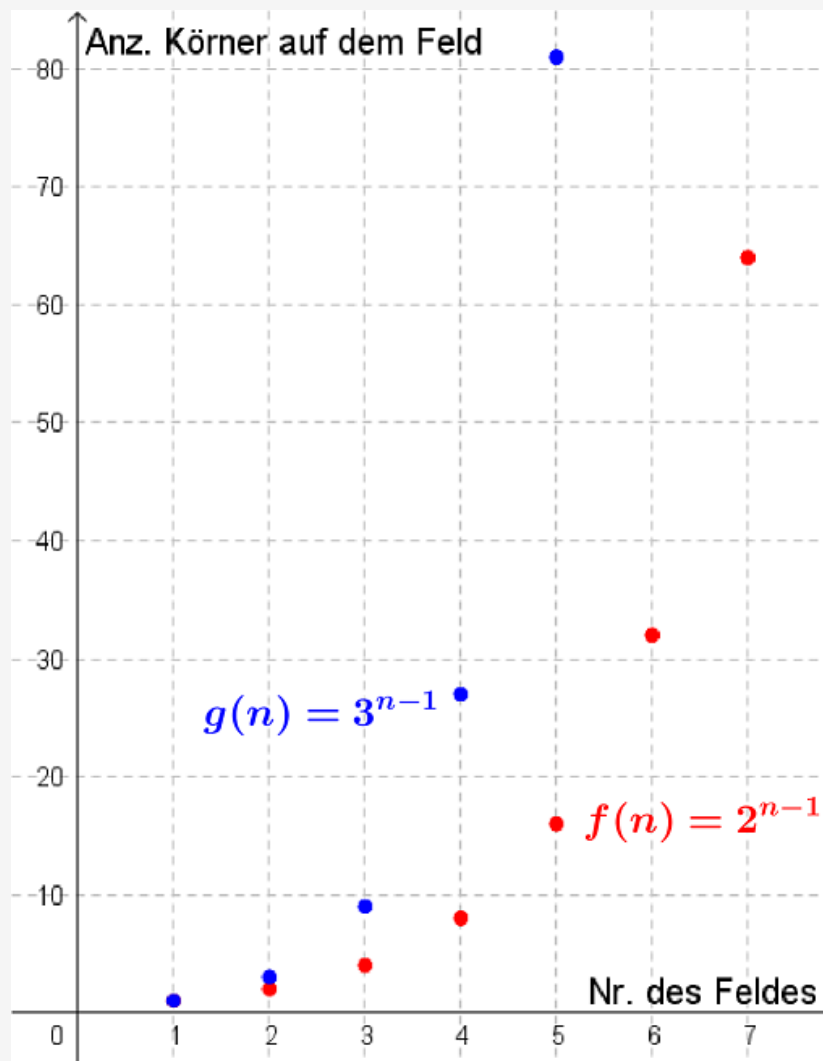


Bild 4 Darstellung der Funktionen $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = 2^{n-1}$ und $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g(n) = 3^{n-1}$ für $n = 1$ bis 7.

Die Punkte des blauen Graphen liegen ab $n = 2$ immer über den roten Punkten. Der blaue Graph wächst schneller als der rote Graph, weil sich beim Übergang von einem Feld des Schachbretts zum nächsten die Funktionswerte von g jeweils verdreifachen und bei f nur verdoppeln.

Fortsetzung der Überlegungen anhand der Einwohnerzahlen von Kassel

Wir wollen nun Überlegungen zu Exponentialfunktionen, die nicht nur für natürliche Zahlen definiert sind, anstellen.

Wir haben in der Lerneinheit *Potenzen, Wurzeln, Logarithmen* Potenzen der Form a^x für $a > 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Mit einem Funktionenplotter kann man solche Funktionen plotten. Im nachfolgenden Bild ist der Graph der Funktion mit der Vorschrift $f(x) = 2^x$ dargestellt.

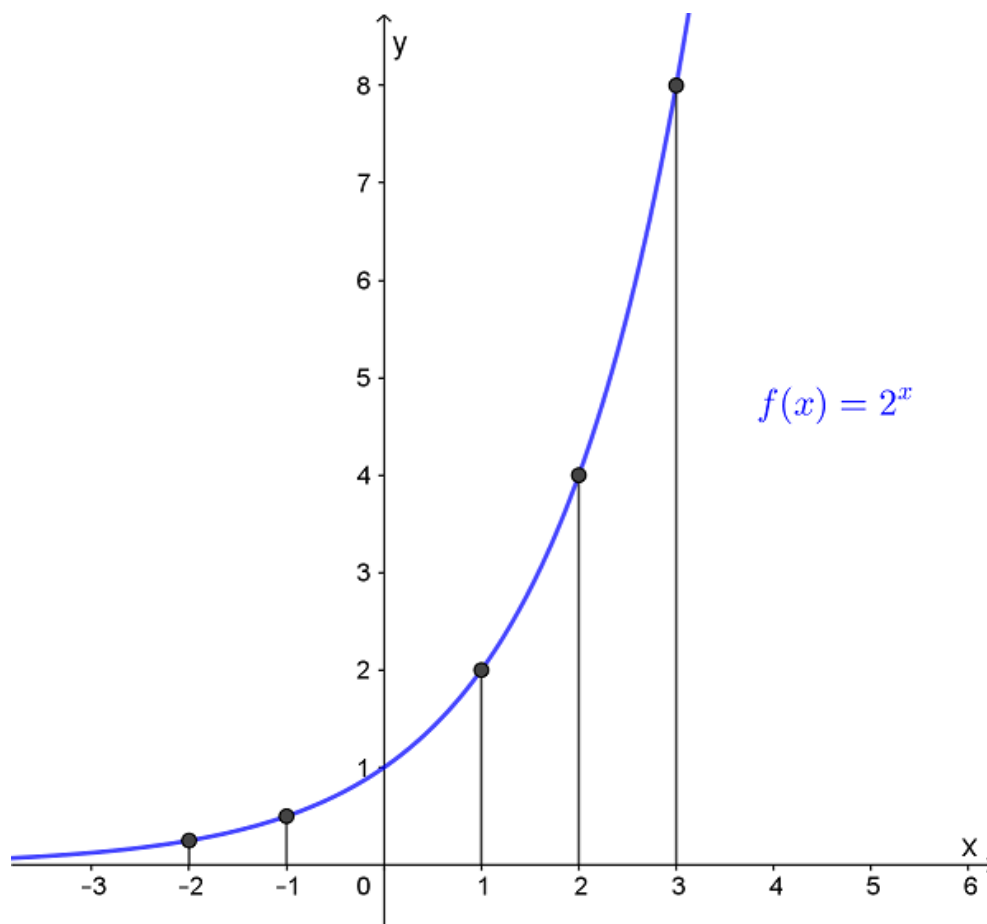


Bild 5

Wir haben die Funktionswerte an den Stellen $x = 1, 2, 3$ und $x = -1, -2$ hervorgehoben.

Man kann mit Exponentialfunktionen stetige Wachstumsprozesse modellieren. Dazu schauen wir uns genauer an, wie sich das Bevölkerungswachstum von Kassel mit einer Exponentialfunktion modellieren lässt.

Angenommen in Kassel hätten Anfang des Jahres 2000 genau 185000 Menschen gelebt. Nehmen wir zudem an, die Einwohnerzahl würde jährlich immer um 1,4% ansteigen.

- Fragen wir uns zunächst, wieviele Menschen dementsprechend ein Jahr später in Kassel leben würden. Dazu nehmen wir die Zahl von Anfang 2000 (185000), multiplizieren diese mit dem Faktor 0,014 (das entspricht 1,4%) und erhalten $185\,000 \cdot 0,014 = 2590$. Somit ist die Bevölkerung vom Jahr 2000 auf das Jahr 2001 um 2590 Menschen gestiegen. Um schließlich die gesamte Bevölkerungszahl für 2001 anzugeben, muss dieser Wert letztlich noch zur Zahl aus 2000 addiert werden. Insgesamt ergibt sich somit:

$$2590 + 185\,000 = 187\,590.$$

Wir schreiben die Rechnung nun etwas anders auf, weil es uns anschließend ermöglicht, ein Muster zu erkennen:

$$\begin{aligned} 185\,000 \cdot 0,014 + 185\,000 &= 185\,000 \cdot (0,014 + 1) \\ &= 185\,000 \cdot 1,014 \\ &= 187\,590. \end{aligned}$$

- Gehen wir einen Schritt weiter und versuchen erneut ausgehend von der Bevölkerungszahl von 2000 direkt die Zahl für 2002 zu berechnen, so ergibt sich folgendes:

$$\begin{aligned} &185\,000 \cdot (0,014 + 1) \cdot (0,014 + 1) \\ &= 185\,000 \cdot (0,014 + 1)^2 \\ &= 185\,000 \cdot 1,014^2 \\ &= 190\,216,26 \\ &\approx 190\,216. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir gerundet, weil Bevölkerungszahlen nur in ganzen Zahlen angegeben werden.

Analog ergibt sich für 2003:

$$\begin{aligned} &185\,000 \cdot (0,014 + 1) \cdot (0,014 + 1) \cdot (0,014 + 1) \\ &= 185\,000 \cdot (0,014 + 1)^3 \\ &= 185\,000 \cdot 1,014^3 \\ &\approx 192\,879. \end{aligned}$$

- Wenn wir mit x das um 2000 reduzierte Jahr bezeichnen, gilt unter unseren Annahmen für die Kasseler Bevölkerung $f(x)$:

$$f(x) = 185\,000 \cdot 1,014^x \quad \text{für } x \in \mathbb{N}.$$

Mit $f(0) = 185\,000$ können wir auch schreiben

$$f(x) = f(0) \cdot 1,014^x.$$

Es stellt sich die Frage, ob wir die Kasseler Bevölkerung auch zu anderen Zeitpunkten als für $x \in \mathbb{N}$ damit modellieren können. Wir setzen zunächst negative ganze Zahlen in den Funktionsterm ein. Es ist

$$\begin{aligned} f(-1) &= 185\,000 \cdot 1,014^{-1} \\ &= f(0) \cdot 1,014^{-1}. \end{aligned}$$

Ähnliches gilt für $x = -2, -3, \dots$

Wir erhalten folgende Tabelle:

x	$f(x)$
-1	$f(0) \cdot 1,014^{-1}$
-2	$f(0) \cdot 1,014^{-2}$
-3	$f(0) \cdot 1,014^{-3}$
-4	$f(0) \cdot 1,014^{-4}$
$\vdots$	$\vdots$

Es ist

$$f(-1) = f(0) \cdot 1,014^{-1} = \frac{f(0)}{1,014} \quad \text{bzw.} \quad f(0) = f(-1) \cdot 1,014.$$

Das würde besagen, dass die Bevölkerung vom Jahr -1 ($\hat{=}$ 1999) auf das Jahr 0 ($\hat{=}$ 2000) auch um $1,4\%$ wächst. Entsprechend gilt

$$\begin{aligned} f(-1) &= f(-2) \cdot 1,014 \\ f(-2) &= f(-3) \cdot 1,014 \end{aligned}$$

Die Gültigkeit von $f(x)$ auch für negative ganze Zahlen anzunehmen, bedeutet inhaltlich, dass wir davon ausgehen, dass auch das Wachstum vor $x = 0$ ($\hat{=}$ 2000) durch eine konstante Wachstumsrate von jährlich $1,4\%$ gekennzeichnet ist.

- Wir betrachten die Funktion $f(x) = 185\,000 \cdot 1,014^x$ jetzt für positive $x \in \mathbb{R}$. Welche Eigenschaften hätte der Wachstumsprozess der Stadt Kassel, wenn wir unterstellen, dass das Modell für alle $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ gültig ist?

Kassel wächst nicht nur in jährlichen Schüben, sondern Tag für Tag mit Sprüngen. Jeder reellen Zahl eine Bevölkerungszahl zuzuordnen ist in jedem Fall eine Idealisierung, $f(x)$ ist i.A. auch keine ganze Zahl, müsste bei der Interpretation also gerundet werden.

Wir betrachten zunächst halbjährliche Schritte:

x	$f(x)$	$f(x)$ alternativ berechnet
0	$f(0)$	$f(0)$
$\frac{1}{2}$	$f(0) \cdot 1,014^{\frac{1}{2}}$	$f(0) \cdot 1,014^{\frac{1}{2}}$
1	$f(0) \cdot 1,014^1$	$f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 1,014^{\frac{1}{2}}$
$\frac{3}{2}$	$f(0) \cdot 1,014^{\frac{3}{2}}$	$f(1) \cdot 1,014^{\frac{1}{2}}$
2	$f(0) \cdot 1,014^2$	$f\left(\frac{3}{2}\right) \cdot 1,014^{\frac{1}{2}}$

Die letzte Spalte errechnet sich aus den Potenzgesetzen, z.B.

$$f(1) = f(0) \cdot 1,014^1 = f(0) \cdot 1,014^{\frac{1}{2}} \cdot 1,014^{\frac{1}{2}} = f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 1,014^{\frac{1}{2}}.$$

Charakteristisch wäre für dieses Modell ein halbjährliches Wachstum mit der konstanten Wachstumsrate $1,014^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1,014} \approx 1,00698$. Das entspricht einem halbjährlichen Wachstum von $0,698\%$.

Entsprechend könnte man bei einer Einteilung in 365 Tage argumentieren. Nimmt man an, dass $f(x)$ für alle x , die Vielfache von $\frac{1}{365}$ sind, ein gültiges Modell darstellt, dann gilt für das tägliche Wachstum $1,014^{\frac{1}{365}} = 1,00003809 =: d$, d.h. ein tägliches Wachstum von etwa $0,0038\%$. Das wären bei Start bei 185 000 Personen nach einem Tag rund 185 007 Personen. Man beachte, dass nicht jeden Tag konstant 7 Personen dazukommen, das wäre lineares Wachstum, sondern immer derselbe Prozentsatz. Nach 365 Tagen hat man wieder den Wachstumsfaktor $d^{365} = \left(1,014^{\frac{1}{365}}\right)^{365} = 1,014$. Das entspricht $1,4\%$.

Wir können auch noch andere Zeiträume mit unserem Modell beschreiben, wie z. B. $0,05$ Jahre (das entspricht 18,25 Tagen). Das heißt, am 18. Januar 2000 leben nach dem Modell dann $f(0,05) = 185\,000 \cdot 1,014^{0,05} \approx 185\,129$ Menschen in Kassel.

Für weitere Zeiträume sind die (gerundeten) Funktionswerte in der folgenden Tabelle dargestellt. Eine Rechnung im Detail wird an dieser Stelle ausgelassen, doch die Werte können durch Einsetzen in die Funktionsvorschrift nachgerechnet werden.

x	$f(x)$
0,05	185 129
0,1	185 257
0,15	185 386
0,2	185 515
0,25	185 644
0,3	185 773
$\vdots$	$\vdots$

Fazit:

Einen Wachstumsprozess mit einer Funktion $f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ zu modellieren impliziert starke Annahmen über die Wachstumsvorgänge: bei gleichen Zunahmen um Δx wächst f immer um denselben Faktor $1,014^{\Delta x}$, der von Δx abhängig ist. [Das kann man verallgemeinernd mathematisch zeigen.]

Bei einem konkreten Wachstumsprozess muss man prüfen, ob diese Annahmen zumindest angenähert erfüllt sind, bzw. ob die empirischen Daten durch das Modell annähernd gut beschrieben und vorhergesagt werden. Das wird im Allgemeinen nur für eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ der Fall sein. Beim Vergleich mit Daten muss man auch berücksichtigen, dass Daten nur zu endlich vielen Zeitpunkten vorliegen und als Messwerte auch immer rationale Zahlen sind. Irrationale Zahlen kommen als Messwerte nicht vor.

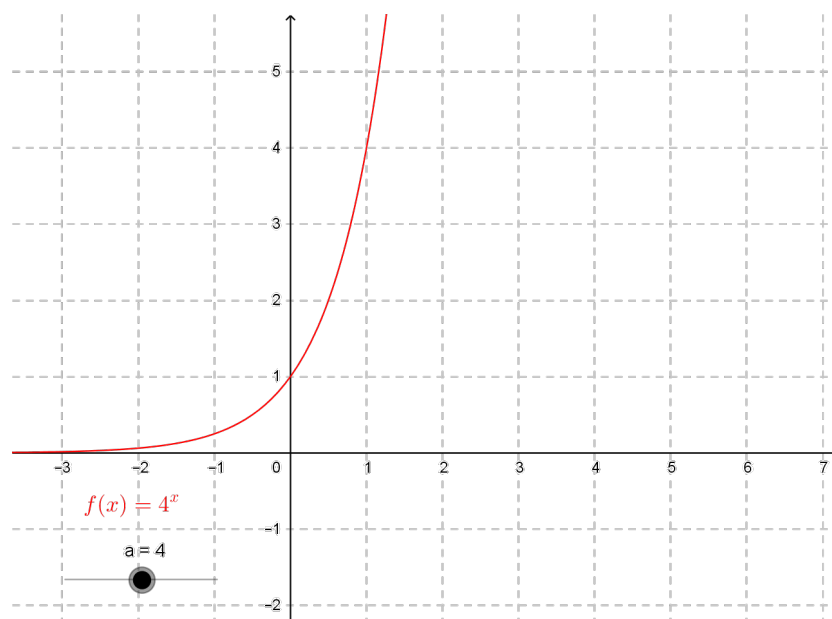
Inhalte mit Erklärungen

Exponentialfunktion zur Basis a

Definition 1:

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, welche die Funktionsvorschrift $f(x) = a^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ besitzt, heißt **Exponentialfunktion zur Basis a** .

Mit der folgenden Interaktion können Sie sich den Verlauf der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = a^x$ ansehen. Den Wert für a steuern Sie mithilfe des Schiebereglers in der linken unteren Ecke.



Interaktion 1 (nur in digitaler Version)

Satz 1:

Eine Exponentialfunktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und $a \neq 1$ hat folgende Eigenschaften:

1. $f(0) = 1$
2. $f(1) = a$
3. $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Das bedeutet insbesondere, dass f keine Nullstellen besitzt.
4. Wenn $a > 1$ ist, dann ist f streng monoton steigend, d. h. aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
5. Wenn $0 < a < 1$ ist, dann ist f streng monoton fallend, d. h. aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) > f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
6. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
7. $f(x + 1) = f(x) \cdot a$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Begründungen mithilfe der Potenzgesetze (Aufklapptext)

Die Potenzgesetze für reelle Exponenten sind im Kapitel *Wurzeln und Potenzen mit reellen Exponenten* der Lerneinheit *Potenzen, Wurzeln, Logarithmen* ausführlich beschrieben. Sie sind die Grundlage für die folgenden Begründungen.

1. $f(0) = a^0 = 1$
2. $f(1) = a^1 = a$
3. Da nach Definition der Exponentialfunktion $a > 0$ gilt, folgt nach Definition der Potenzen, dass auch $a^x > 0$ und somit $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
4. Sei $a > 1$ und $x_1 < x_2$, dann gilt $x_1 + d = x_2$ mit einem $d \in \mathbb{R}$ und $d > 0$.
Es gilt $f(x_2) = f(x_1) \cdot a^d$, denn $f(x_2) = a^{x_2} = a^{x_1+d} = a^{x_1} \cdot a^d = f(x_1) \cdot a^d$.
Wegen $d > 0$ und $a > 1$ gilt zudem $a^d > 1$ und damit folgt $f(x_2) > f(x_1)$.
5. Sei $0 < a < 1$ und $x_1 < x_2$. Wie zuvor in 4. zeigt man $f(x_2) = f(x_1) \cdot a^d$.
Wegen $d > 0$ und $0 < a < 1$ gilt zudem $0 < a^d < 1$ und damit folgt $f(x_2) < f(x_1)$.
6. Mit Hilfe der Potenzgesetze formen wir um:

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) &= a^{x_1+x_2} \\ &= a^{x_1} \cdot a^{x_2} \\ &= f(x_1) \cdot f(x_2) \end{aligned}$$

7. Es gilt mit voriger Eigenschaft, sowie $x_1 := x$ und $x_2 := 1$ und $f(1) = a$:

$$\begin{aligned} f(x+1) &= f(x) \cdot f(1) \\ &= f(x) \cdot a \end{aligned}$$

Weiterführende Bemerkung zu 7. (Aufklapptext)

Die Eigenschaft kann man wie folgt formulieren:

- Falls $a > 1$:

Wann immer man das Argument x um 1 erhöht, wächst die Funktion um den Faktor a :

$$f(x+1) = a \cdot f(x) > f(x).$$

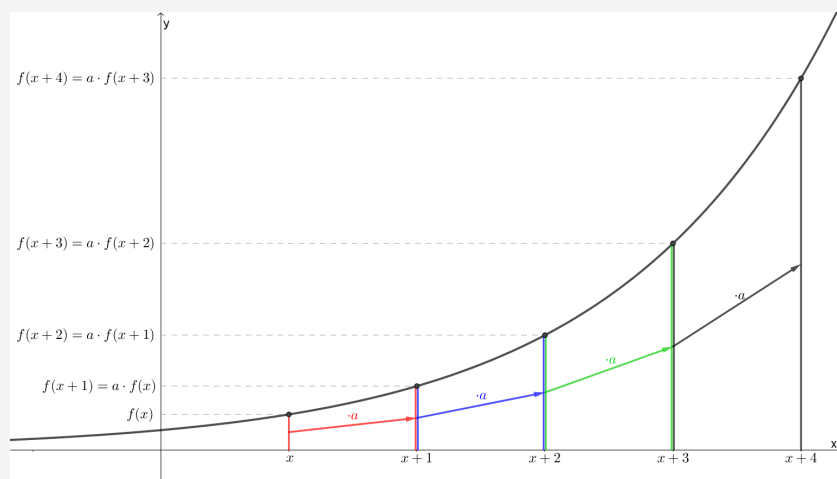


Bild 6

- Für $0 < a < 1$ gilt:

Wann immer das Argument x um 1 erhöht wird, fällt die Funktion um den Faktor a :

$$f(x+1) = a \cdot f(x) < f(x)$$

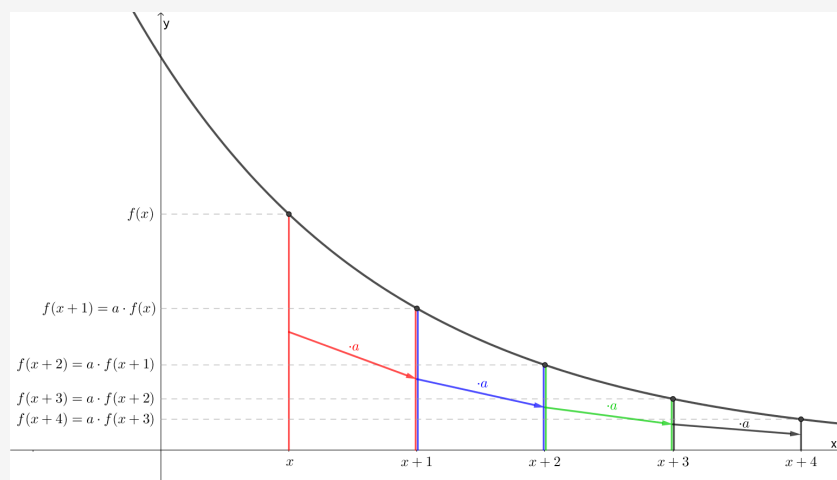


Bild 7

Man kann die Aussage verallgemeinern für $\Delta x > 0$

$$f(x + \Delta x) = a^{x+\Delta x} = a^x \cdot a^{\Delta x} = a^{\Delta x} \cdot f(x)$$

- (*) Wann immer x um die Differenz Δx wächst, wächst/fällt f immer mit dem konstanten Faktor $a^{\Delta x}$.

Falls $a > 1$ ist, ist auch $a^{\Delta x} > 1$, also wächst f um diesen Faktor.

Falls $0 < a < 1$ ist, so ist auch $a^{\Delta x} < 1$, also fällt f um diesen Faktor.

Die Aussage (*) ist eine charakteristische Eigenschaft exponentiellen Wachstums.

Erweiterung der Exponentialfunktion

Wir betrachten Funktionen f der Form: $f(x) = a^{cx}$, mit $a, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $c \neq 0$.

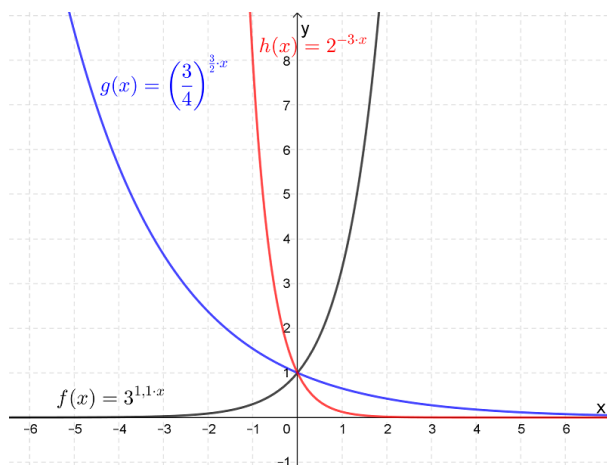


Bild 8 Dargestellt sind Ausschnitte der Graphen von drei Funktionen mit $f(x) = 3^{1,1 \cdot x}$ (schwarz), $g(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2} \cdot x}$ (blau) und $h(x) = 2^{-3 \cdot x}$ (rot).

Im Folgenden Satz werden die Eigenschaften solcher Exponentialfunktionen angegeben.

Satz 2:

Eine Exponentialfunktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^{cx}$ ($a, c \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $c \neq 0$) hat folgende Eigenschaften:

1. $f(0) = 1$
2. $f(1) = a^c$
3. $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Das bedeutet insbesondere, dass f keine Nullstellen besitzt.
4. Wenn $1 < a^c$ ist, dann ist f streng monoton steigend.
5. Wenn $0 < a^c < 1$ ist, dann ist f streng monoton fallend.
6. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
7. $f(x + 1) = f(x) \cdot a^c$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Begründungen der Eigenschaften (Aufklapptext)

Die Begründung dieser Eigenschaften lässt sich auf die zuvor begründeten Eigenschaften für Exponentialfunktionen (s.o.) zurückführen, indem wir die Funktionsgleichung wie folgt umformen: $f(x) = a^{cx} = (a^c)^x$. Das kann man mit dem entsprechenden Potenzgesetz machen. Die nachfolgende Tabelle zeigt zusätzlich, in welchen Fällen $a^c > 1$ bzw. $a^c < 1$ gilt.

	$a > 1$	$0 < a < 1$
$c > 0$	$a^c > 1$	$0 < a^c < 1$
$c < 0$	$0 < a^c < 1$	$a^c > 1$

Exponentialfunktion zur Basis e

Definition 2:

Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Funktionsvorschrift $f(x) = e^x$ bezeichnet man als **Exponentialfunktion zur Basis e** . Die Zahl e steht für die irrationale Eulersche Zahl ($e \approx 2,7183$). Der Wertebereich von f ist die Menge aller positiven reellen Zahlen.

In den meisten Anwendungen für Exponentialfunktionen wird die Exponentialfunktion zur Basis e verwendet. Dies hängt u. a. mit ihrer Ableitung zusammen. Die Exponentialfunktion zur Basis e stimmt mit ihrer Ableitung überein, d.h. für

$$f(x) = e^x$$

ist die Ableitung

$$f'(x) = e^x$$

Auf diese Eigenschaft wird in der Lerneinheit *Differentialrechnung* genauer eingegangen.

Basiswechsel von Exponentialfunktionen

Es lässt sich schnell zeigen, dass sich jede Exponentialfunktion zur Basis a in eine Exponentialfunktion zur Basis e transformieren lässt. Für die Umrechnung ist wichtig, dass man eine positive, reelle Zahl a auch so schreiben kann: $a = e^{\ln(a)}$. Dabei bezeichnet $\ln$ den **natürlichen Logarithmus**, also den Logarithmus zur Basis e : $\ln = \log_e$. Folgende Gleichung veranschaulicht die erforderlichen Umformungen:

$$a^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{\ln(a) \cdot x}$$

Info 1: (Basiswechsel)

Eine Exponentialfunktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Funktionsvorschrift $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, kann in eine Exponentialfunktion zur Basis e umgeschrieben werden. Es gilt: $f(x) = e^{\ln(a) \cdot x}$.

Nach diesen Vorüberlegungen kann man feststellen, dass sich die Familie der Exponentialfunktionen auf zwei Weisen parametrisieren lässt.

Die Funktionsgleichung $f(x) = a^x$, kann man schreiben als $f(x) = e^{\lambda x}$ mit $\lambda = \ln(a)$.

Die Funktionsgleichung $f(x) = e^{\lambda x}$, kann man schreiben als $f(x) = a^x$ mit $a = e^\lambda$.

Die Familie der Exponentialfunktionen kann man also auf zwei Weisen parametrisieren:

$$f(x) = a^x \quad (a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1) \quad \text{oder} \quad f(x) = e^{\lambda x} \quad (\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0)$$

In der Hochschulmathematik wird oft mit der Funktionsfamilie $e^{\lambda x}$ ($\lambda \neq 0$) gearbeitet.

Info 2:

Mithilfe von Exponentialfunktionen der Form $f(x) = e^{\lambda x}$ lassen sich Wachstumsprozesse ($\lambda > 0$) und Zerfallsprozesse ($\lambda < 0$) beschreiben.

In der folgenden Tabelle wird dargestellt, in welchen Fällen Wachstums- und Zerfallsprozesse in beiden Parametrisierungsvarianten beschrieben werden können ($\lambda = \ln(a)$).

	a^x	$e^{\lambda x}$
Wachstum	$a > 1$	$\lambda > 0$
Zerfall	$0 < a < 1$	$\lambda < 0$

Erweiterung der Exponentialfunktion

Auch Funktionen f der Form $f(x) = b \cdot a^{cx}$ (mit $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ und $b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) heißen Exponentialfunktion, also insbesondere auch Funktionen des Typs $f(x) = b \cdot e^{\lambda x}$ (mit $b, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

Satz 3:

Für eine Exponentialfunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = b \cdot e^{\lambda x}$ mit $b, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt: $f(0) = b$.

Beweis:

$$f(0) = b \cdot e^{\lambda \cdot 0} = b \cdot e^0 = b \cdot 1 = b.$$

Der Graph einer solchen Exponentialfunktion schneidet die y -Achse also immer bei b .

Beispiel 1:

Aufgrund des oben beschriebenen Basiswechsels stehen uns nun zwei Möglichkeiten zur Verfügung, wenn wir etwa Wachstumsvorgänge modellieren möchten.

Als Beispiel betrachten wir die folgende (vereinfachte) Datenreihe, die einem kontinuierlichem Prozess entnommen ist:

x	1	2	3	4	...
y	1	2	4	8	...

Gesucht ist eine Parametrisierung als Exponentialfunktion wahlweise in der Form $f(x) = b \cdot a^x$ oder $f(x) = b \cdot e^{\lambda x}$. Nachfolgend wird beides bestimmt.

Parametrisierung als $f(x) = b \cdot a^x$:

Wir setzen die ersten beiden Datenpunkte (1;1) und (2;2) in die Funktionsgleichung ein und erhalten die beiden Gleichungen:

$$(*) \quad 1 = b \cdot a^1$$

$$(**) \quad 2 = b \cdot a^2$$

(**) geteilt durch (*) liefert:

$$\frac{2}{1} = \frac{b \cdot a^2}{b \cdot a^1} \Leftrightarrow a = 2$$

Mit dem Datenpunkt (1; 1) und $a = 2$ erhalten wir durch Einsetzen in die Funktionsgleichung:
 $1 = b \cdot 2^1 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$.

Also gilt:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot 2^x.$$

Parametrisierung als $f(x) = b \cdot e^{\lambda x}$:

Wir setzen die ersten beiden Datenpunkte (1; 1) und (2; 2) in die Funktionsgleichung ein und erhalten die beiden Gleichungen:

$$(*) \quad 1 = b \cdot e^{\lambda \cdot 1}$$

$$(**) \quad 2 = b \cdot e^{\lambda \cdot 2}$$

Gleichung (**) geteilt durch Gleichung (*) liefert:

$$\frac{2}{1} = \frac{b \cdot e^{\lambda \cdot 2}}{b \cdot e^{\lambda \cdot 1}} \Leftrightarrow 2 = e^{\lambda} \Leftrightarrow \lambda = \ln(2)$$

Mit dem Datenpunkt (1; 1) und $a = 2$ erhalten wir durch Einsetzen in die Funktionsgleichung:
 $1 = b \cdot 2^1 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$.

Also gilt:

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{\ln(2)x}.$$

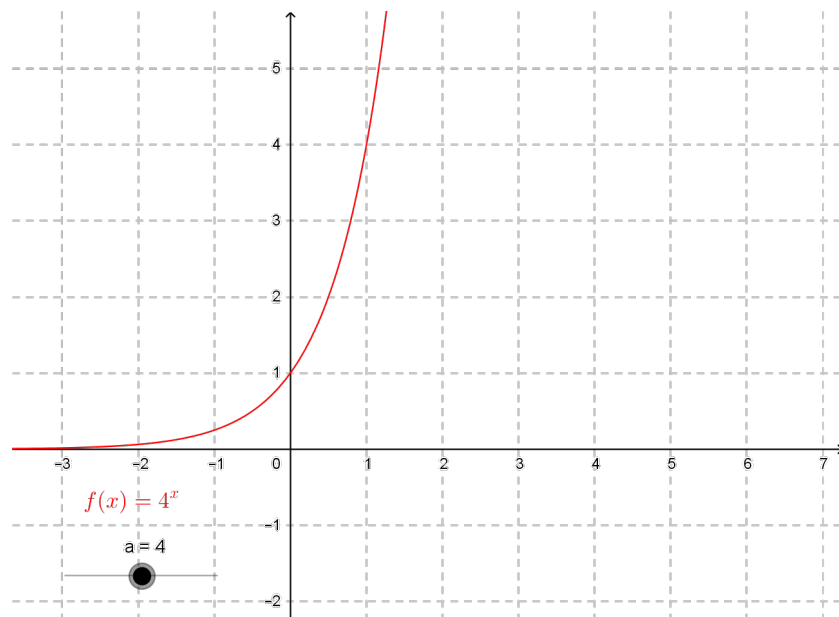
Wegen $\frac{1}{2} e^{\ln(2)x} = \frac{1}{2} (e^{\ln(2)})^x = \frac{1}{2} \cdot 2^x$ erhalten wir mit dieser Methode (natürlich) dasselbe Ergebnis wie mit der ersten Parametrisierung.

Aufgaben

Aufgabe 4:

Gesucht ist eine Exponentialfunktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ ($a > 0$), deren Graph durch den Punkt P mit den Koordinaten $(-2; \frac{1}{9})$ verläuft.

- Bestimmen Sie die entsprechende Funktionsvorschrift.
- Nutzen Sie das nachfolgende Applet, um den Graphen der Funktion darzustellen.
- Lesen Sie mit Hilfe des Applets jeweils einen Näherungswert für $\sqrt[4]{3}$ und für $\sqrt{27}$ ab.



Interaktion 2 (nur in digitaler Version)

Lösung:

Aus $P(-2; \frac{1}{9})$ ergibt sich durch Einsetzen in $f(x) = a^x$:

$$\begin{aligned}
 f(-2) &= \frac{1}{9} \\
 \Leftrightarrow a^{-2} &= \frac{1}{9} \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} &= \frac{1}{9} \\
 \Leftrightarrow a^2 &= 9 \\
 \Leftrightarrow a &= 3
 \end{aligned}$$

Da wir $a > 0$ vorausgesetzt haben, ist $a^2 = 9$ tatsächlich äquivalent zu $a = 3$. Somit lautet die Funktionsvorschrift $f(x) = 3^x$.

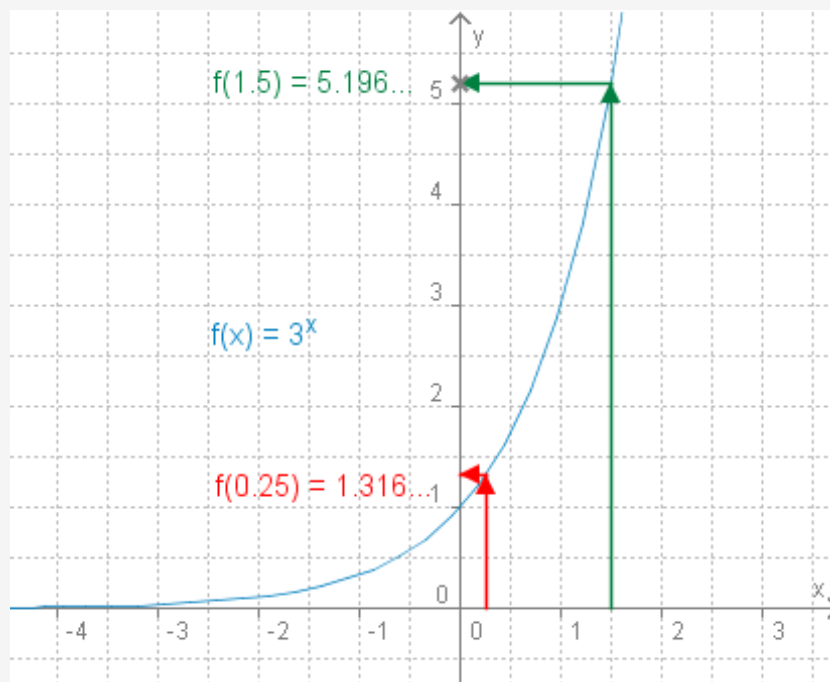


Bild 9 Ein Ausschnitt des Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x$.

Da gilt $\sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}}$ sowie $\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = 3^{\frac{3}{2}}$, kann man am Graphen die zugehörigen y -Werte bei $x_1 = \frac{1}{4}$ und $x_2 = \frac{3}{2}$ ablesen und erhält somit folgende erste Näherung für die beiden gesuchten Potenzen:

$$\sqrt[4]{3} \approx 1,3 \quad \text{und} \quad \sqrt{27} \approx 5,2.$$

Aufgabe 5:

In der Abbildung werden Graphen zu Funktionen der Form $f(x) = a^x$ (mit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$) dargestellt. Geben Sie Funktionsvorschriften zu f_1, f_2, f_3 und f_4 an.

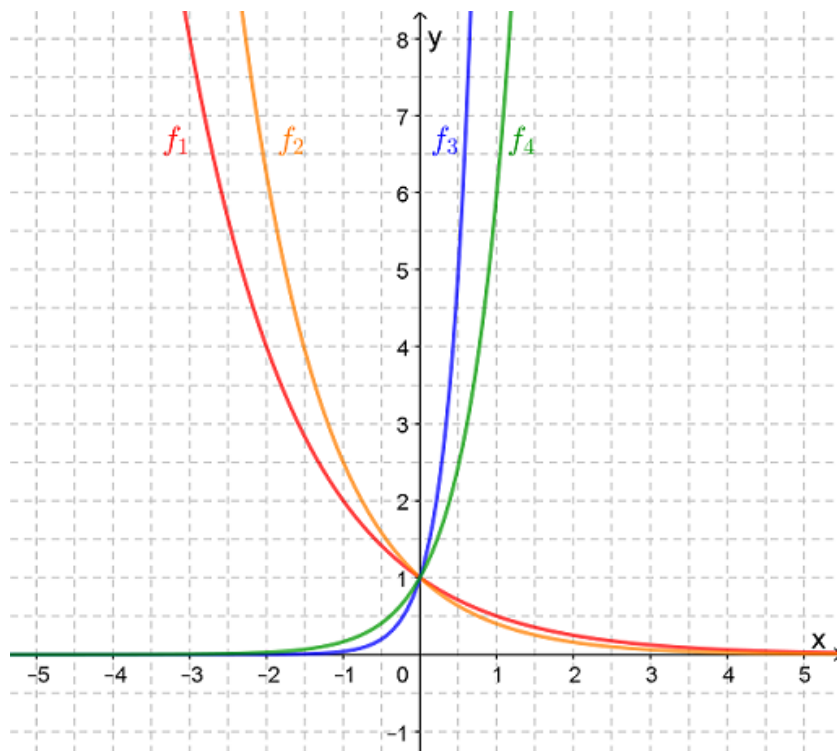


Bild 10 Ausschnitte der Graphen von 4 verschiedenen Exponentialfunktionen.

Lösung:

Um die Funktionsgleichungen zu $f_1, \dots, f_4$ aufzustellen, suchen wir zunächst Punkte auf dem Graphen, die wir leicht angenähert ablesen können. Eine Möglichkeit ist es, den Funktionswert für die Stelle $x = 1$ abzulesen, da wegen $f(1) = a^1 = a$ der Wert von a direkt bestimmt ist. Eine andere Möglichkeit ist es, solche Punkte zum Ablesen von dem Graphen zu suchen, die angenähert auf dem Koordinatengitter liegen. In diesem Fall (für $x \neq 1$) muss die erhaltene Gleichung noch nach a aufgelöst werden.

Da man die Punkte nicht exakt ablesen kann, ist diese Aufgabe auch nicht exakt lösbar. Mit den von uns abgelesenen Punkten ergeben sich anschließend die folgenden Funktionsvorschriften:

- **Roter Graph:**

Wir lesen den Punkt $(1; 0,5)$ (angenähert) vom Graphen ab.

Dann folgt $f_1(1) = a^1 = 0,5 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

Damit ergibt sich die Funktionsvorschrift: $f_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

- **Gelber/Oranger Graph:**

Wir lesen den Punkt $(-1; 2,5)$ (angenähert) vom Graphen ab.

Dann folgt $f_2(-1) = a^{-1} = 2,5 \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{25}{10} \Rightarrow a = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$.

Damit ergibt sich die Funktionsvorschrift: $f_2(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$.

- **Dunkelblauer Graph:**

Wir lesen den Punkt $(0,5; 5)$ (angenähert) vom Graphen ab.

Dann folgt $f_3(0,5) = a^{0,5} = 5 \Rightarrow a^{\frac{1}{2}} = 5 \Rightarrow \sqrt{a} = 5 \Rightarrow a = 25$.

Damit ergibt sich die Funktionsvorschrift: $f_3(x) = 25^x$.

- **Grüner Graph:**

Wir lesen den Punkt $(1; 6)$ (angenähert) vom Graphen ab.

Dann folgt $f_4(1) = a^1 = 6 \Rightarrow a = 6$.

Damit ergibt sich die Funktionsvorschrift: $f_4(x) = 6^x$.

Leseempfehlung: In den Ergänzungen zu diesem Thema erklären wir, warum stets Vorsicht beim Ablesen von Punkten von einem Graphen geboten ist.

Aufgabe 6:

Hier sind einige Aussagen zu Exponentialfunktionen der Form $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = a^x$. "Überprüfen" Sie die Richtigkeit der Aussagen, begründen oder widerlegen Sie diese und korrigieren Sie sie gegebenenfalls.

1. *Eine solche Exponentialfunktion ist bereits durch einen beliebigen Punkt ihres Graphen eindeutig festgelegt.*
2. *Bei einer beliebigen Exponentialfunktion diesen Typs ist ein konkreter Punkt des Graphen stets bekannt.*
3. *Da die Funktionswerte von Exponentialfunktionen diesen Typs stets größer als Null sind, können Prozesse, bei denen etwas im Laufe der Zeit abnimmt, hiermit nicht modelliert werden.*

Lösung:

1. *Eine solche Exponentialfunktion ist bereits durch einen beliebigen Punkt ihres Graphen eindeutig festgelegt:*

Diese Aussage trifft nur zu, wenn die x -Koordinate des Punktes nicht null ist.

Begründung: Durch das Einsetzen eines beliebigen Punktes mit $x \neq 0$ in die Funktionsvorschrift $f(x) = a^x$ lässt sich der Parameter a immer eindeutig bestimmen. Für $x = 0$ ist nur der Punkt $(0; 1)$ ein Element aller Funktionen diesen Typs. Man erhält durch das Einsetzen dieser Koordinaten lediglich folgende Gleichungen, mit denen man dann a nicht näher bestimmen kann: $a^0 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$. Für ein beliebiges $y \neq 1$ erhält man sogar einen Widerspruch.

2. *Bei einer beliebigen Exponentialfunktion diesen Typs ist ein konkreter Punkt des Graphen stets bekannt.*

Dass dies eine allgemeingültige, wahre Aussage ist, ergibt sich bereits aus der Begründung zur letzten Aussage und dem entsprechenden Satz im Bereich *Inhalte mit Erklärungen*. Es gilt stets

$$f(0) = a^0 = 1,$$

woraus folgt, dass der Punkt $P(0; 1)$ zu jedem Graphen einer Exponentialfunktion der Form $f(x) = a^x$ gehört.

3. *Da die Funktionswerte von Exponentialfunktionen diesen Typs stets größer als Null sind, können Prozesse, bei denen etwas im Laufe der Zeit abnimmt, hiermit nicht modelliert werden.*

Diese Aussage ist falsch, was sich beispielsweise leicht durch den Graphen der Funktion $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ widerlegen lässt:

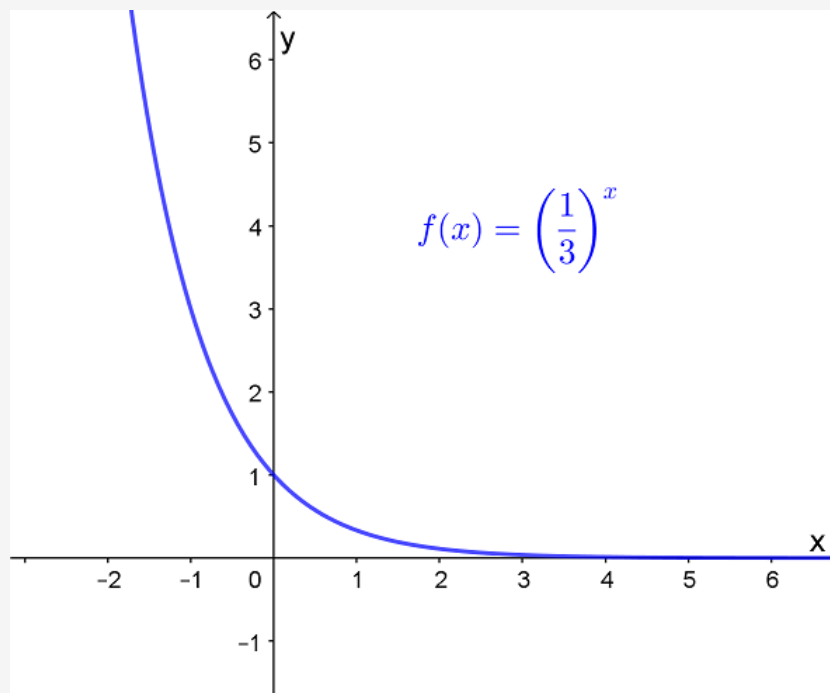


Bild 11

Diese Funktion ist streng monoton fallend, d. h. mit zunehmenden x -Werten nehmen die y -Werte stets ab und nähern sich gleichzeitig der x -Achse an, "überschreiten diese allerdings nicht. Somit werden die entsprechenden Funktionswerte stets kleiner, bleiben aber immer im positiven Bereich. Hierdurch ist gezeigt, dass man auch Abnahme - bzw. Zerfallsprozesse mit Exponentialfunktionen modellieren kann, man benötigt dazu allerdings Basen aus dem Bereich $0 < a < 1$.

Aufgabe 7:

Wir betrachten die Exponentialfunktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 7^x$.

Schreiben Sie die Funktionsvorschrift zur Basis e .

$$f(x) = \boxed{?}$$

Lösung:

$$g(x) = 7^x = e^{\ln(7) \cdot x} \quad (\approx e^{1,946 \cdot x})$$

Aufgabe 8:

Gegeben sei ein exponentieller Wachstumsprozess durch die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 180 \cdot e^{2,5x}$. Eine Kommilitonin behauptet, dass man den Startwert (also den Funktionswert an der Stelle $x = 0$) sowohl in der Funktionsvorschrift als auch am Graph stets sofort ablesen kann.

1. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion und "überprüfen Sie die Richtigkeit ihrer Aussage.
2. Betrachten Sie die allgemeine Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = b \cdot e^{\lambda \cdot x}$. Geben Sie den Startwert $f(0)$ an und "überlegen Sie, wo der entsprechende Punkt im Graphen zu finden ist.

Lösung:

1. Den Startwert erhält man durch Einsetzen von $x = 0$ in die Funktionsvorschrift $180 \cdot e^{2,5 \cdot 0} = 180 \cdot 1 = 180$. Im Graphen kann man den Startwert auf der y -Achse ebenfalls an der Stelle 0 ablesen.

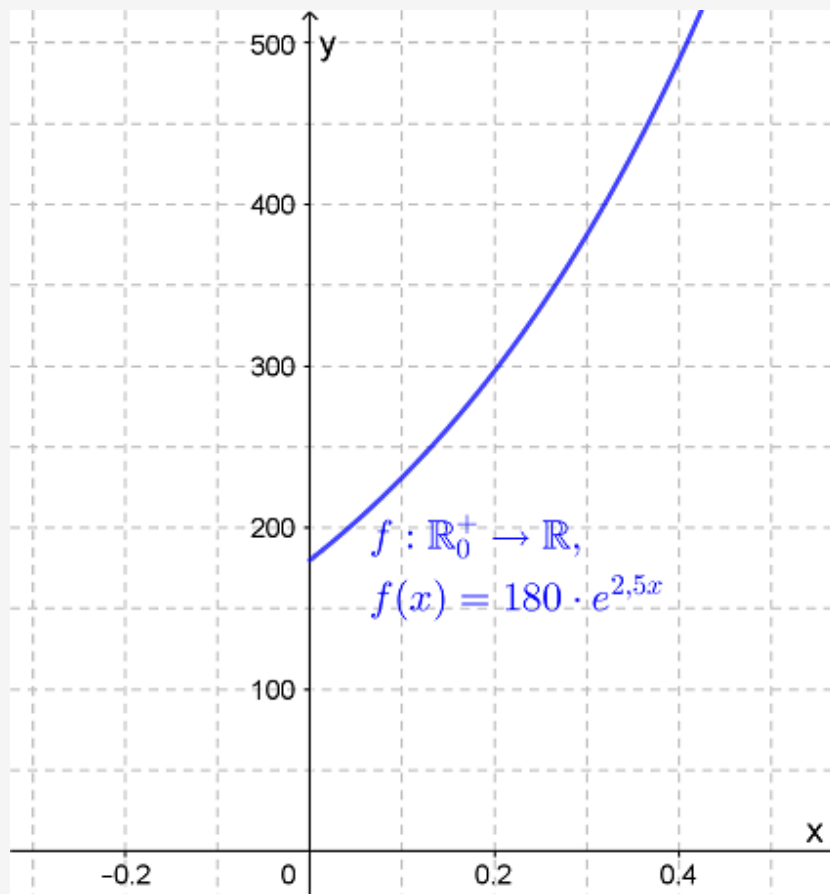


Bild 12 Ein Ausschnitt des Graphen der Funktion $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 180 \cdot e^{2,5x}$.

2. Im allgemeinen Fall $f(x) = b \cdot e^{\lambda x}$ kann man den Startwert auch direkt ablesen. Er ist gegeben durch b , denn $b \cdot e^{\lambda \cdot 0} = b \cdot 1 = b$. Im Schaubild ist der Startwert der Wert auf der y -Achse.

Aufgabe 9:

Eigenschaften der e -Funktion

Im Verlauf dieses Kapitels haben Sie die Eigenschaft $e^x > 0$ kennen gelernt.

Was bedeutet diese Eigenschaft für den Verlauf des Graphen der folgenden (erweiterten) Exponentialfunktionen?

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$
- $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = e^{\lambda x}, \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$
- $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = b \cdot e^{\lambda x}, \quad \text{mit } b, \lambda \in \mathbb{R}, b, \lambda \neq 0$

Welche weiteren Eigenschaften dieser Graphen kennen Sie?

Lösung:

Bedeutung der Eigenschaft $e^x > 0$:

- Der Graph der e -Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x$ verläuft immer oberhalb der x -Achse.
- Gleiches gilt auch für die allgemeinere Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = e^{\lambda \cdot x}$.
Denn wird der Parameter λ geändert, hat das im Wesentlichen den gleichen Effekt, als würde man bei der Funktionsvorschrift $g(x) = a^x$ die Basis a verändern.
- Bei der Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x) = b \cdot e^{\lambda \cdot x}$ müssen wir zwei Fälle unterscheiden.
Für $b > 0$ verläuft der Graph immer oberhalb der x -Achse.
Für $b < 0$ befindet sich der Graph stets unterhalb der x -Achse.

Folgende weitere Eigenschaften könnten Sie beispielsweise finden:

- Der Graph von g verläuft immer durch den Punkt $(0; 1)$ und der Graph von h durch den Punkt $(0; b)$.
- Die Funktion g ist für $\lambda > 0$ monoton steigend und für $\lambda < 0$ monoton fallend.
- Bei der Funktion h müssen wir wieder abhängig vom Vorzeichen von b zwei Fälle unterscheiden:
Für $b > 0$ verhält sich h genauso wie g . Das heißt: h ist monoton steigend für $b > 0$ und $\lambda > 0$; h ist monoton fallend für $b > 0$ und $\lambda < 0$.
Für $b < 0$ kehrt sich das Steigungsverhalten um. Das heißt: h ist monoton steigend für $b < 0$ und $\lambda < 0$; h ist monoton fallend für $b < 0$ und $\lambda > 0$.

Aufgabe 10:

Die Wachstumsfunktion von T.R. Malthus

Thomas R. Malthus, ein englischer Philosoph, veröffentlichte im Jahr 1798 seinen „Essay on the Principles of Population“, in dem er sich mit Zusammenhängen zwischen Bevölkerungswachstum und Nahrungsmittelproduktion auseinandersetzte. In diesem Kontext stellte er auch seine Wachstumsfunktion $B(t) = B_0 \cdot 1,0302^t$ vor, mit der er das Bevölkerungswachstum in den USA von 1800 bis 1860 gut prognostizieren konnte. Der Faktor B_0 steht dabei für die Größe der Bevölkerung im Jahr 1790 - diese Zahl war Malthus aufgrund einer Volkszählung bekannt. Für t setzt man die Anzahl von Jahren nach 1790 bis zu dem Jahr ein, für das man die Bevölkerungszahl prognostizieren möchte.

Stellen wir uns vor, wir wollen auf Basis dieser Annahmen einige Werte berechnen und damit das Bevölkerungswachstum vorhersagen (womit wir uns quasi im Jahr 1790 befinden), dann erhalten wir folgende Wertetabelle (Werte sind gerundet):

Jahr	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850
t (in Jahren)	0	10	20	30	40	50	60
B (in Mio)	$B_0 = 3,9$	5,25...	...				

1. Berechnen Sie die fehlenden Werte und zeichnen Sie den dazugehörigen Graphen.
2. Prognostizieren Sie auf Basis dieser Gleichung die Bevölkerungszahl der USA für 2004.

3. Im Januar 2005 betrug die Einwohnerzahl der USA 295 267 686 Menschen. Vergleichen Sie diese Zahl mit ihrer theoretisch für 2004 errechneten. Was stellen Sie fest? Welche Ursachen sind hierfür denkbar?

Lösung:

1.

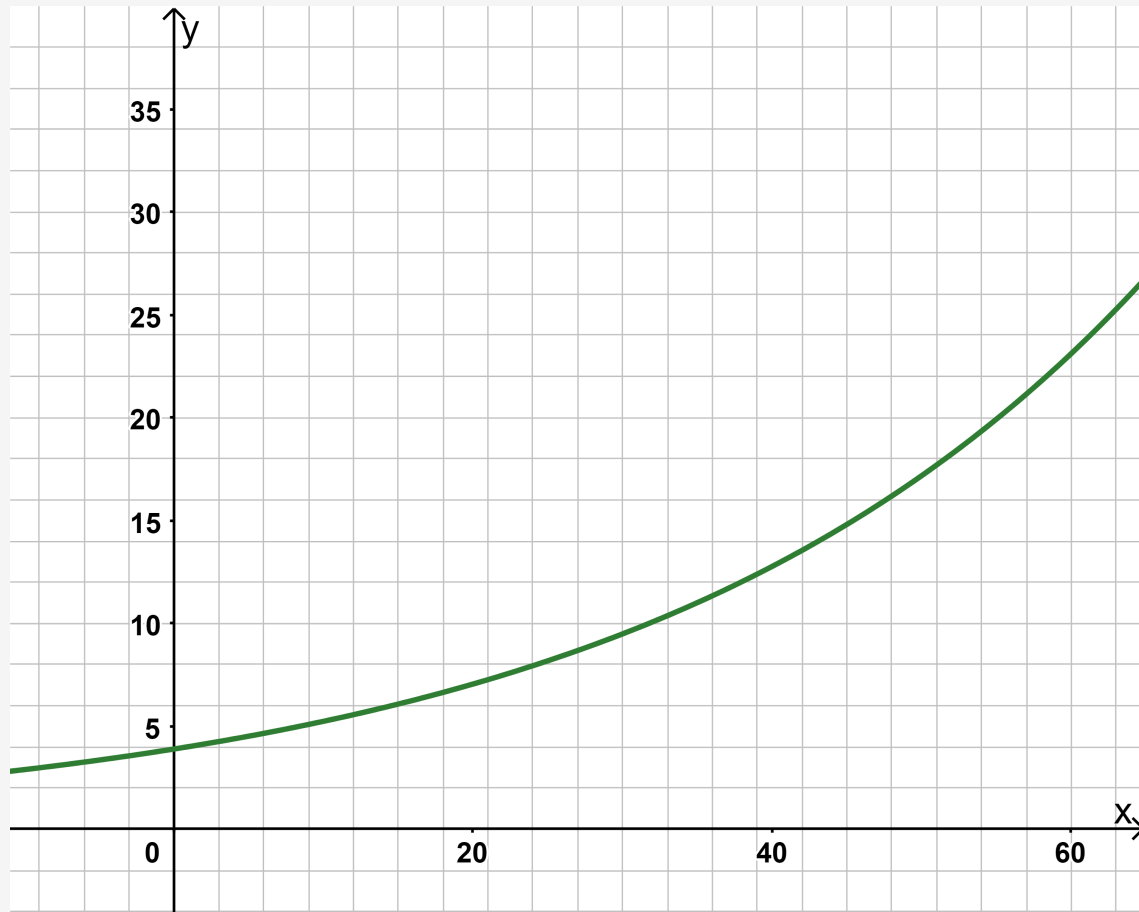


Bild 13 Der Graph der Wachstumsfunktion von Malthus

Jahr	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850
t (in Jahren)	0	10	20	30	40	50	60
B(t) (in Mio)	$B_0 = 3,9$	$\approx 5,25$	$\approx 7,07$	$\approx 9,52$	$\approx 12,82$	$\approx 17,26$	$\approx 23,25$

2. Um mithilfe der Funktionsvorschrift $B(t) = 3,9 \cdot 1,0302^t$ den Wert für das Jahr 2004 zu bestimmen, muss man zunächst das entsprechende t berechnen. Es ergibt sich $t = 2004 - 1790 = 214$. Diesen Wert setzt man nun in die Funktionsvorschrift ein und erhält dadurch eine theoretische Bevölkerungszahl von $B(214) = 3,9 \cdot 1,0302^{214} \approx 2271,30$, also rund 2,271 Milliarden Menschen.

3. Der Vergleich der theoretischen Zahl aus 2004 und der real erhobenen im Januar 2005 macht deutlich, dass bereits im Jahr 2004 rund 1975732314 mehr Menschen hätten leben müssen. Der theoretische Wert für Januar 2005 müsste demnach noch weiter vom tatsächlichen Ergebnis entfernt liegen.

Eine Prognose auf Basis der Wachstumszahlen aus 1790 ist, wie wir sehen, zumindest für eine Prognose "über einen größeren Zeitraum hinweg nicht aussagekräftig.

Ursachen hierfür sind in den Weiterentwicklungen im Bereich der Vermittlungsmittel und den damit verbundenen sinkenden Geburtenzahlen zu suchen. Kriege, Seuchen und andere Katastrophen sorgen gleichzeitig für temporäre Einschnitte in die Bevölkerungszahlen, während sich die Verbesserungen in der Versorgungslage der Menschen wiederum positiv auf die Einwohnerzahlen auswirkt. Aufgrund solcher Unsicherheitsfaktoren können Prognosen für Bevölkerungszahlen wenn überhaupt nur für kurze Zeiträume vorgenommen werden und sind als Schätzungen zu verstehen.

Anwendung

Beispiel 2: (Bestimmen von Exponentialfunktionen durch Punkte)

Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift zur Exponentialfunktion der Form $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = a^x$, deren Graph durch den Punkt $P(2; 16)$ verläuft.

Lösung: Hierzu setzt man einfach das entsprechende Wertepaar in die Funktionsgleichung ein und erhält $f(2) = a^2$ und damit $a^2 = 16$. Somit ist $a = \sqrt{16} = 4$, da Exponentialfunktionen für negative a nicht definiert sind. Somit lautet die Funktionsvorschrift $f(x) = 4^x$.

Beispiel 3: (Typischer Verlauf von Exponentialfunktionen)

Die Graphen von Exponentialfunktionen der Form $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = b \cdot e^{\lambda \cdot x}$ können grundsätzlich vier verschiedene Verläufe zeigen, abhängig von den Werten der Parameter b und λ .

Für jeden Verlauf schauen wir im Folgenden einen Prototypen an. Die Graphen sind in den folgenden beiden Bildern dargestellt.

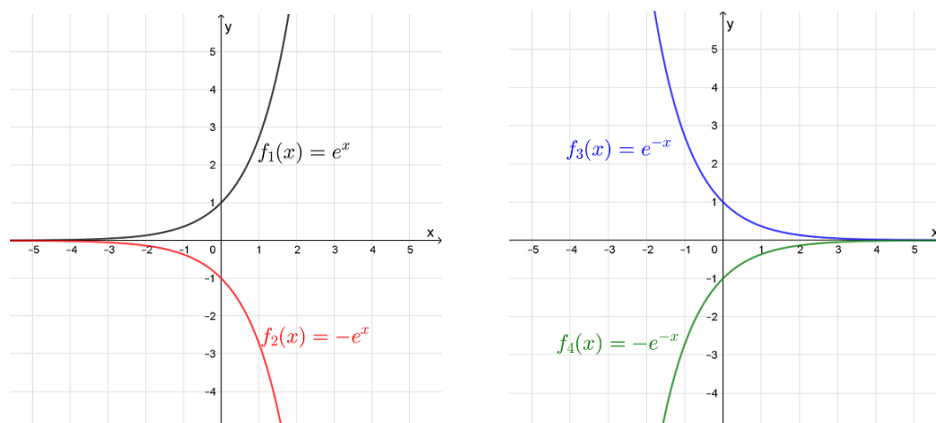


Bild 14

Im Bild auf der linken Seite sehen wir zum einen die Standard- e -Funktion mit der Vorschrift $f_1(x) = e^x$. Der Graph schmiegt sich links an die x -Achse an, ist streng monoton steigend und schneidet die y -Achse bei $(0; 1)$.

Der andere Graph links gehört zur Funktionsvorschrift $f_2(x) = -e^x$. Er entspricht einer Spiegelung des Graphen von f_1 an der x -Achse.

Im Bild auf der rechten Seite sehen wir oben den Graphen zur Funktionsvorschrift $f_3(x) = e^{-x}$. Der Graph entsteht durch eine Spiegelung des Graphen von f_1 an der y -Achse. Wir können den Verlauf auch detaillierter beschreiben: Der Graph „kommt“ von links oben, schneidet die y -Achse bei $(0; 1)$ und ist streng monoton fallend.

Der andere Graph rechts gehört zur Funktionsvorschrift $f_4(x) = -e^{-x}$. Er entspricht einer Spiegelung des Graphen von f_3 an der x -Achse.

Die Parameter b und λ können auch andere Werte annehmen als 1 und -1 . Der Graph folgt dann immer noch einem der vier Grundverläufe und ist lediglich ein wenig flacher oder steiler. Einige Beispiele sind in der folgenden Aufgabe zu finden.

	$\lambda > 0$	$\lambda < 0$
$b > 0$	wie e^x : über der x -Achse, str. mon. steigend	wie e^{-x} : über der x -Achse, str. mon. fallend
$b < 0$	wie $-e^x$: unter der x -Achse, str. mon. fallend	wie $-e^{-x}$: unter der x -Achse, str. mon. steigend

Wäre $b = 0$ oder $\lambda = 0$, entspricht der Graph einer Geraden und es ist keine Exponentialfunktion mehr gegeben.

Aufgabe 11:

Im folgenden Bild sehen Sie vier Graphen von Exponentialfunktionen.

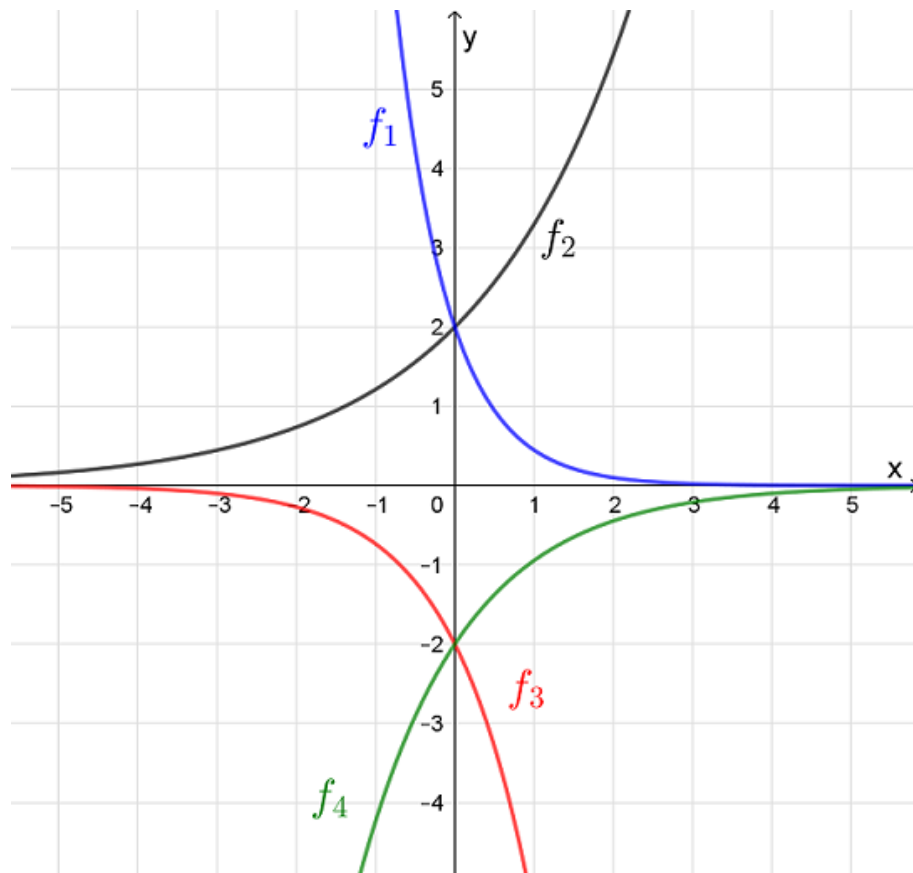


Bild 15 Welche Funktionsvorschriften gehören zu den Graphen der Funktionen f_1 (blau), f_2 (schwarz), f_3 (rot) und f_4 (grün)?

Wählen Sie aus, welcher der vier Graphen zu der Funktionsvorschrift passt.

Funktionsterm: $2 \cdot e^{0,5 \cdot x}$

☐ f_1 (blau)

☐ f_2 (schwarz)

☐ f_3 (rot)

☐ f_4 (grün)

Funktionsterm: $-2 \cdot e^{-0,75 \cdot x}$

☐ f_1 (blau)

☐ f_2 (schwarz)

☐ f_3 (rot)

☐ f_4 (grün)

Funktionsterm: $2 \cdot e^{-1,5 \cdot x}$

☐ f_1 (blau)

☐ f_2 (schwarz)

☐ f_3 (rot)

☐ f_4 (grün)

Funktionsterm: $-2 \cdot e^x$

☐ f_1 (blau)

☐ f_2 (schwarz)

☐ f_3 (rot)

☐ f_4 (grün)

Lösung:

Die Aufgabe lässt sich mit den typischen Verläufen lösen, die im vorherigen Beispiel vorgestellt wurden. Wir ordnen die vier Terme in die Tabelle aus dem Beispiel ein:

	$\lambda > 0$	$\lambda < 0$	
$b > 0$	wie e^x : über der x -Achse, str. mon. steigend	wie e^{-x} : über der x -Achse, str. mon. fallend	fallend
$b < 0$	wie $-e^x$: unter der x -Achse, str. mon. fallend	wie $-e^{-x}$: unter der x -Achse, str. mon. steigend	steigend

Daraus ergibt sich:

$2 \cdot e^{0,5 \cdot x}$ wird durch den schwarzen Graphen dargestellt: f_2
 $-2 \cdot e^{-0,75 \cdot x}$ wird durch den grünen Graphen dargestellt: f_4
 $2 \cdot e^{-1,5 \cdot x}$ wird durch den blauen Graphen dargestellt: f_1
 $-2 \cdot e^x$ wird durch den roten Graphen dargestellt: f_3

Beispiel 4: (Verdopplungen)

Dass bei vorgegebenen x -Werten die zugehörigen Funktionswerte und damit alle x -ten Potenzen zur Basis a berechnet werden können, ist bei Verwendung eines Taschenrechners genauso einfach wie klar. Der umgekehrte Fall, das Berechnen von Stellen bei vorgegebenen Funktionswerten, ist mitunter schwieriger, aber im Anwendungskontext mindestens genauso wichtig.

Eine Standardfrage ist dabei, wie sich das Argument einer Funktion ändern muss, damit sich der Funktionswert verdoppelt. Nehmen wir dazu beispielsweise die Exponentialfunktion $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(t) = 10^t$ und betrachten dabei zunächst als Ausgangswert $f(1) = 10$. Wenn hierbei nun nach der Zeit (dem t -Wert) gefragt wird, nach der f auf den doppelten Wert angewachsen ist, so suchen wir dasjenige t_1 , für das gilt $f(1 + t_1) = 10 \cdot 2 = 20$. Die Variable t_1 stellt hierbei die Zeitspanne dar, die seit dem Ausgangswert vergangen ist. Setzt man das Argument $1 + t_1$ sowie den Funktionswert 20 in die Funktionsgleichung ein und löst sie nach t_1 auf, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 f(1 + t_1) &= 20 & | \text{ einsetzen} \\
 10^{1+t_1} &= 20 & | \text{ Potenzgesetz anwenden} \\
 10^1 \cdot 10^{t_1} &= 20 & | : 10 \\
 10^{t_1} &= 2 & | \log_{10}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t_1 = \log_{10}(2) \approx 0,3$$

Somit erhält man eine Verdopplung des Funktionswertes $f(1)$ mit $t_1 \approx 0,3$.

Ausgehend von dem neuen Argument $t = 1 + t_1$ wollen wir nun untersuchen, bei welchem Argument erneut eine Verdopplung stattfindet. Demnach wollen wir berechnen, für welches t_2 gilt $f(1 + t_1 + t_2) = 2 \cdot 20 = 40$.

Dies ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} f(1 + t_1 + t_2) &= 40 & | \text{ einsetzen} \\ 10^{1+t_1+t_2} &= 40 & | \text{ Potenzgesetz anwenden} \\ 10^{1+t_1} \cdot 10^{t_2} &= 40 & | (10^{1+t_1} = 20) \text{ einsetzen} \\ 20 \cdot 10^{t_2} &= 40 & | : 20 \\ 10^{t_2} &= 2 & | \log_{10} \\ \Rightarrow t_2 &= \log_{10}(2) \approx 0,3 \end{aligned}$$

Wie Sie sehen, erhält man $t_1 = t_2 = \log_{10}(2)$. Dies legt die Vermutung nahe, dass ausgehend von einem beliebigen Startzeitpunkt t_0 stets eine Verdopplung bei $t_0 + t_1$, d. h. in t_1 -Schritten stattfindet.

Die Allgemeingültigkeit dieser Vermutung kann man durch eine Herleitung beweisen, die wir jetzt durchführen wollen. Dazu berechnen wir ausgehend von einem beliebigen Startwert t_0 die Änderung t_1 , bis der doppelte Funktionswert $2 \cdot f(t_0)$ erreicht wird. Es ergibt sich demnach folgende Gleichung, die nach t_1 aufgelöst werden muss:

$$\begin{aligned} 2 \cdot f(t_0) &= f(t_0 + t_1) & | : f(t_0) \\ 2 &= \frac{f(t_0 + t_1)}{f(t_0)} & | \text{ einsetzen} \\ 2 &= \frac{10^{t_0+t_1}}{10^{t_0}} & | \text{ Potenzgesetz anwenden} \\ 2 &= \frac{10^{t_0} \cdot 10^{t_1}}{10^{t_0}} & | \text{ kürzen} \\ 2 &= 10^{t_1} & | \log_{10} \\ t_1 &= \log_{10}(2) \end{aligned}$$

Für unser konkretes Beispiel ergibt sich somit Zweierlei: Zum einen findet stets eine Verdopplung nach $t_1 = \log_{10}(2)$ statt, zum anderen kürzt sich die Potenz 10^{t_0} und damit der Funktionswert an der Stelle t_0 heraus. Das bedeutet, dass die Zeitspanne für die Verdopplung unabhängig vom Startzeitpunkt t_0 und seinem zugehörigen Funktionswert $f(t_0)$ ist.

Allgemein lässt sich analog zeigen, dass bei allen Exponentialfunktionen zu einer beliebigen Basis a unabhängig vom Startzeitpunkt und dem entsprechenden Ausgangswert die Zeitspanne für die Verdopplung stets $\log_a(2)$ beträgt. Diese bezeichnet man als Verdopplungszeit.

Beispiel 5: (Wachstumsprozess)

Wachstumsprozesse können durch Exponentialfunktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = b \cdot a^x$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ beschrieben werden. Dabei ist b der Startwert und x die vergangene Zeit seit dem Startzeitpunkt. Wir betrachten folgendes Beispiel:

Eine Bakterienkultur von 1000 Gramm Gewicht wächst stetig mit einem Prozentsatz von 3% (=

0,03) pro Jahr. Auf welches Gewicht ist die Kultur nach drei Jahren und zehn Tagen angewachsen?

Der Startwert b betr agt 1000. Den Parameter a kann man aus der Wachstumsangabe bestimmen: Pro Jahr wächst das Gewicht um 3%, d.h. nach einem Jahr man $1000 \cdot 1,03 = 1030$ Gramm. Ein weiteres Jahr später hat man dann $1030 \cdot 1,03 = 1060,9$ Gramm. Das sind $1000 \cdot 1,03^2$ Gramm. Also lässt sich das Gewicht durch die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1000 \cdot 1,03^x$ berechnen, wobei x die Anzahl der Jahre seit Beobachtungsbeginn bezeichnet. Damit kann man die Frage beantworten:

$$\begin{aligned} f\left(3 + \frac{10}{365}\right) &= 1000 \cdot 1,03^{\left(3 + \frac{10}{365}\right)} \\ &\approx 1000 \cdot 1,0936 \\ &\approx 1094. \end{aligned}$$

Also wiegt die Bakterienkultur nach 3 Jahren und 10 Tagen etwa 1094 Gramm.

Ergänzungen

Missverständnisse bei Graphen von Exponentialfunktionen

Wir kennen den Funktionsgraphen als „das Bild“ einer Funktion. Dabei müssen wir beachten, dass wir immer nur einen Ausschnitt des Graphen sehen und niemals den ganzen Graphen. Denn ab irgendeiner Stelle müssen wir den üblichen Definitionsbereich $\mathbb{R}$ abschneiden, damit unser Bild nicht unendlich breit wird.

Wie wir jetzt sehen werden, kann uns der gezeigte Ausschnitt auch in die Irre führen und falsche Vorstellungen wecken.

Dazu betrachten wir eine Funktion, die Sie bereits in der Hinführung kennengelernt haben. Diese Funktion beschreibt die Bevölkerungszahl in Kassel, wobei wir folgende beiden Annahmen treffen:

- zu Beginn des Jahres 2000 leben 185 000 Menschen in Kassel,
- die Bevölkerung wächst jedes Jahr um 1,4%.

Unser Modell für die Bevölkerungszahl wird durch die Funktionsvorschrift $f(x) = 185\,000 \cdot 1,014^x$ beschrieben (wie in der Hinführung hergeleitet). Dabei bezeichnet x die Anzahl der Jahre seit 2000 und $f(x)$ die Bevölkerungszahl.

Der Graph der Funktion könnte wie im folgenden Bild aussehen:

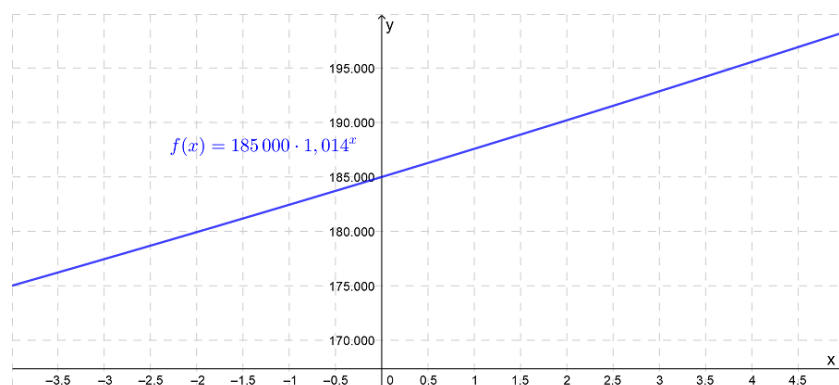


Bild 16 Mögliche Darstellung des Graphen zur Funktionsvorschrift $f(x) = 185\,000 \cdot 1,014^x$.

Dieser Graph ist wunderbar geeignet, um sich die Bevölkerungssituation in Kassel ein paar Jahre um 2000 herum genau anzuschauen, wie es in der Hinführung gemacht wird. Konkret sieht man das Bevölkerungswachstum in den Jahren 1996 ($x = -4$) bis 2005 ($x = 5$).

Der hier gewählte (ziemlich kleine) Ausschnitt hat einen großen Nachteil: Wenn wir nur den Graphen ohne die Funktionsvorschrift sehen, denken wir sofort, dass der Graph eine Gerade ist und es sich um eine lineare Funktion handelt. Diese Annahme, zu der uns der Graph verleitet, ist jedoch falsch - wir wissen schon, dass es eine Exponentialfunktion ist.

Ausblick (Aufklapptext)

Tatsächlich gibt es viele Funktionen, die beim Heranzoomen linear erscheinen. Dieser Effekt ist für die Ableitung wichtig. Daher können Sie mehr dazu im Kapitel *Ableitungsbegriff* in der Lerneinheit zur *Differentialrechnung* erfahren.

Uns fehlt in dem eben gezeigten Ausschnitt des Graphen also der charakteristische Verlauf der Exponentialfunktion, damit wir die Funktion nicht mit einer linearen Funktion verwechseln. Den exponentiellen Verlauf erhalten wir, indem wir aus dem Bild „herauszoomen“ und einen größeren Abschnitt betrachten. Das Ergebnis könnte zum Beispiel so aussehen:

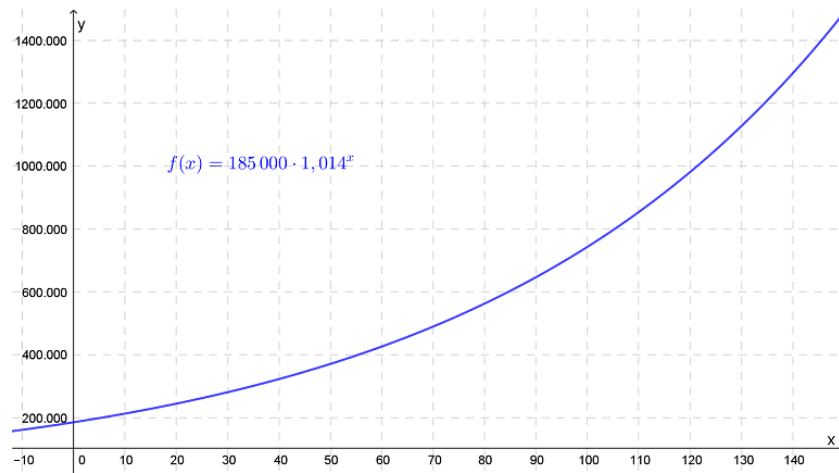
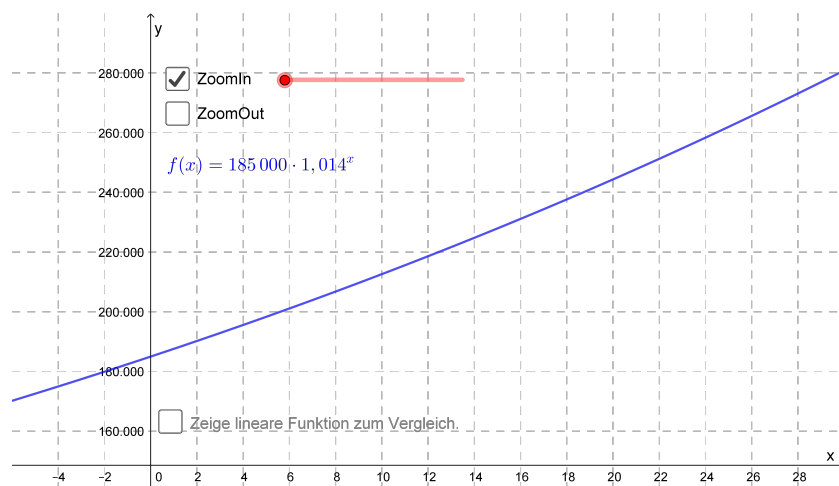


Bild 17 Eine weitere mögliche Darstellung des Graphen zur Funktionsvorschrift $f(x) = 185\,000 \cdot 1,014^x$.

Hier ist der exponentielle Verlauf gut erkennbar, aber wegen des sehr großen Ausschnitts ist es deutlich schwieriger, präzise Aussagen über die Bevölkerungszahl in den Jahren um 2000 zu treffen.

Wie man von dem Bild, das Sie in der Hinführung gesehen haben, zu den beiden verschiedenen Ausschnitten kommt, können Sie in dem folgenden Applet nachvollziehen. Wählen Sie aus, ob Sie Hereinzoomen (ZoomIn) oder Herauszoomen (ZoomOut) möchten und bewegen Sie den Schieberegler. Sie können sich den Graphen einer linearen Funktion zum Vergleich anzeigen lassen.



Interaktion 3 (nur in digitaler Version)

Verweis

Wenn Sie sich für Trugschlüsse bei den Graphen von Polynomfunktionen interessieren, schauen Sie doch einmal im Bereich *Ergänzungen* im Kapitel zu *Polynomfunktionen* vorbei.