

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn

FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

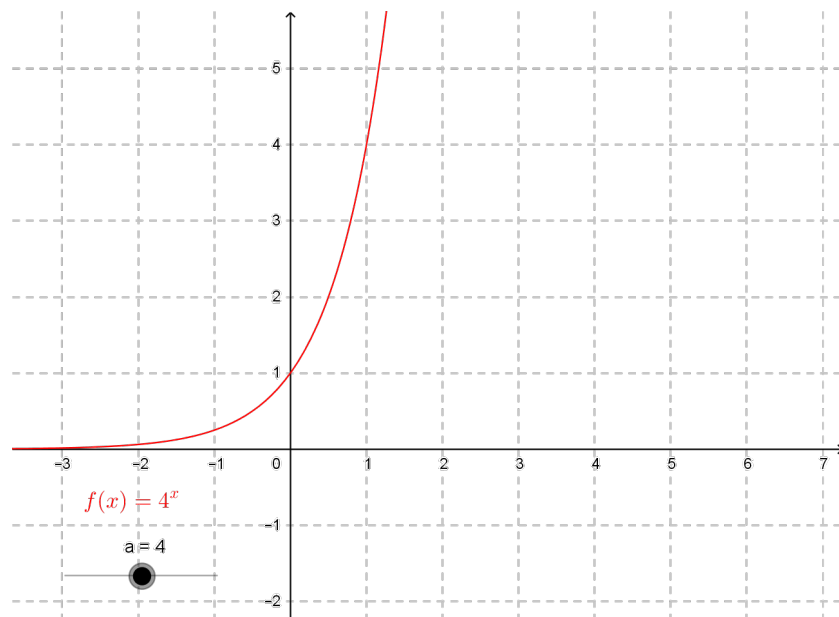
studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Aufgaben

Aufgabe 4:

Gesucht ist eine Exponentialfunktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x (a > 0)$, deren Graph durch den Punkt P mit den Koordinaten $(-2; \frac{1}{9})$ verläuft.

- Bestimmen Sie die entsprechende Funktionsvorschrift.
- Nutzen Sie das nachfolgende Applet, um den Graphen der Funktion darzustellen.
- Lesen Sie mit Hilfe des Applets jeweils einen Näherungswert für $\sqrt[4]{3}$ und für $\sqrt{27}$ ab.



Interaktion 2 (nur in digitaler Version)

Lösung:

Aus $P(-2; \frac{1}{9})$ ergibt sich durch Einsetzen in $f(x) = a^x$:

$$\begin{aligned}
 f(-2) &= \frac{1}{9} \\
 \Leftrightarrow a^{-2} &= \frac{1}{9} \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} &= \frac{1}{9} \\
 \Leftrightarrow a^2 &= 9 \\
 \Leftrightarrow a &= 3
 \end{aligned}$$

Da wir $a > 0$ vorausgesetzt haben, ist $a^2 = 9$ tatsächlich äquivalent zu $a = 3$. Somit lautet die Funktionsvorschrift $f(x) = 3^x$.

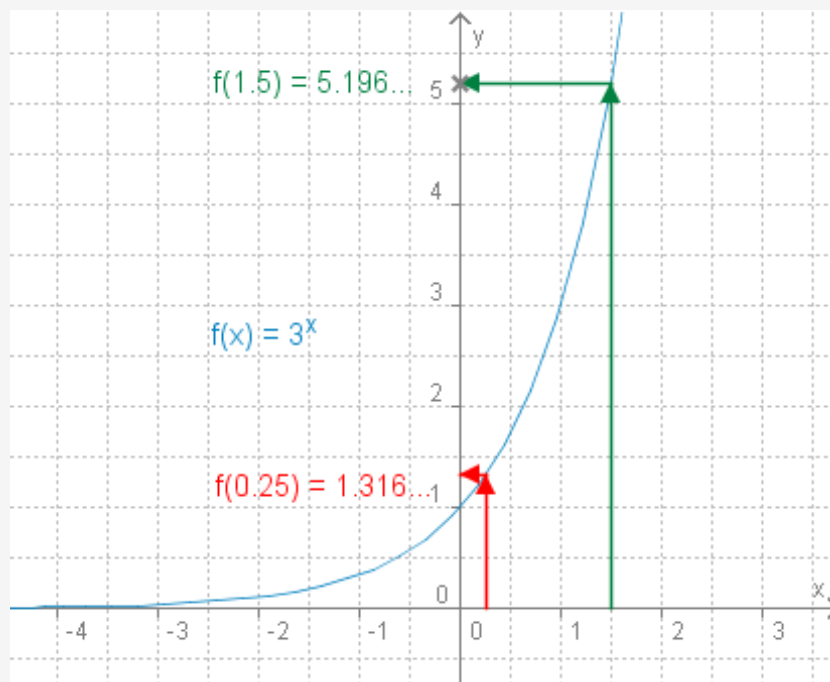


Bild 9 Ein Ausschnitt des Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x$.

Da gilt $\sqrt[4]{3} = 3^{\frac{1}{4}}$ sowie $\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = 3^{\frac{3}{2}}$, kann man am Graphen die zugehörigen y -Werte bei $x_1 = \frac{1}{4}$ und $x_2 = \frac{3}{2}$ ablesen und erhält somit folgende erste Näherung für die beiden gesuchten Potenzen:

$$\sqrt[4]{3} \approx 1,3 \quad \text{und} \quad \sqrt{27} \approx 5,2.$$

Aufgabe 5:

In der Abbildung werden Graphen zu Funktionen der Form $f(x) = a^x$ (mit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$) dargestellt. Geben Sie Funktionsvorschriften zu f_1, f_2, f_3 und f_4 an.

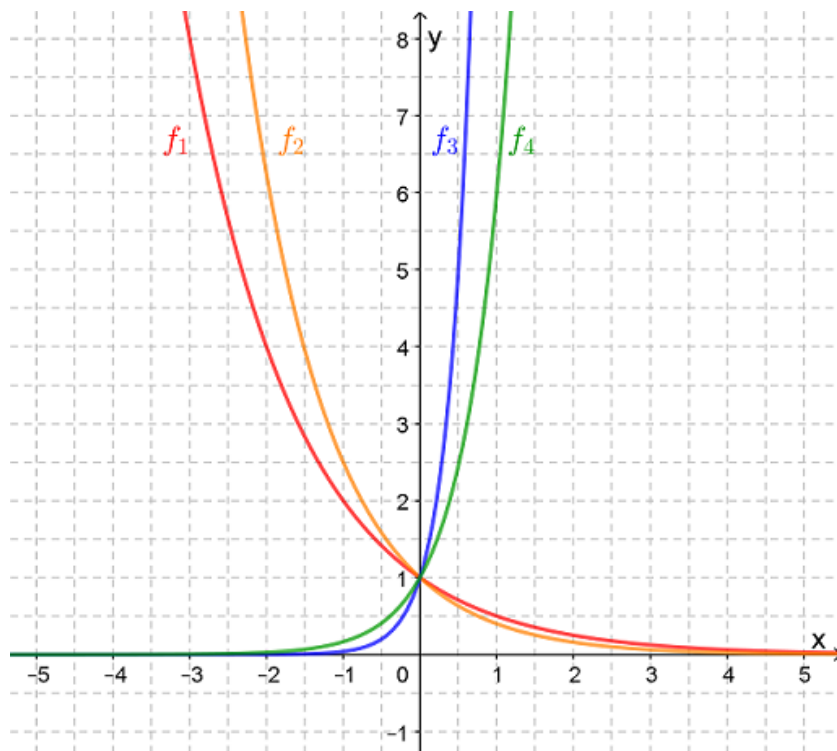


Bild 10 Ausschnitte der Graphen von 4 verschiedenen Exponentialfunktionen.

Lösung:

Um die Funktionsgleichungen zu $f_1, \dots, f_4$ aufzustellen, suchen wir zunächst Punkte auf dem Graphen, die wir leicht angenähert ablesen können. Eine Möglichkeit ist es, den Funktionswert für die Stelle $x = 1$ abzulesen, da wegen $f(1) = a^1 = a$ der Wert von a direkt bestimmt ist. Eine andere Möglichkeit ist es, solche Punkte zum Ablesen von dem Graphen zu suchen, die angenähert auf dem Koordinatengitter liegen. In diesem Fall (für $x \neq 1$) muss die erhaltene Gleichung noch nach a aufgelöst werden.

Da man die Punkte nicht exakt ablesen kann, ist diese Aufgabe auch nicht exakt lösbar. Mit den von uns abgelesenen Punkten ergeben sich anschließend die folgenden Funktionsvorschriften:

- **Roter Graph:**

Wir lesen den Punkt $(1; 0,5)$ (angenähert) vom Graphen ab.

Dann folgt $f_1(1) = a^1 = 0,5 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

Damit ergibt sich die Funktionsvorschrift: $f_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

- **Gelber/Oranger Graph:**

Wir lesen den Punkt $(-1; 2,5)$ (angenähert) vom Graphen ab.

Dann folgt $f_2(-1) = a^{-1} = 2,5 \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{25}{10} \Rightarrow a = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$.

Damit ergibt sich die Funktionsvorschrift: $f_2(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$.

- **Dunkelblauer Graph:**

Wir lesen den Punkt $(0,5; 5)$ (angenähert) vom Graphen ab.

Dann folgt $f_3(0,5) = a^{0,5} = 5 \Rightarrow a^{\frac{1}{2}} = 5 \Rightarrow \sqrt{a} = 5 \Rightarrow a = 25$.

Damit ergibt sich die Funktionsvorschrift: $f_3(x) = 25^x$.

- **Grüner Graph:**

Wir lesen den Punkt $(1; 6)$ (angenähert) vom Graphen ab.

Dann folgt $f_4(1) = a^1 = 6 \Rightarrow a = 6$.

Damit ergibt sich die Funktionsvorschrift: $f_4(x) = 6^x$.

Leseempfehlung: In den Ergänzungen zu diesem Thema erklären wir, warum stets Vorsicht beim Ablesen von Punkten von einem Graphen geboten ist.

Aufgabe 6:

Hier sind einige Aussagen zu Exponentialfunktionen der Form $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = a^x$. "Überprüfen" Sie die Richtigkeit der Aussagen, begründen oder widerlegen Sie diese und korrigieren Sie sie gegebenenfalls.

1. *Eine solche Exponentialfunktion ist bereits durch einen beliebigen Punkt ihres Graphen eindeutig festgelegt.*
2. *Bei einer beliebigen Exponentialfunktion diesen Typs ist ein konkreter Punkt des Graphen stets bekannt.*
3. *Da die Funktionswerte von Exponentialfunktionen diesen Typs stets größer als Null sind, können Prozesse, bei denen etwas im Laufe der Zeit abnimmt, hiermit nicht modelliert werden.*

Lösung:

1. *Eine solche Exponentialfunktion ist bereits durch einen beliebigen Punkt ihres Graphen eindeutig festgelegt:*

Diese Aussage trifft nur zu, wenn die x -Koordinate des Punktes nicht null ist.

Begründung: Durch das Einsetzen eines beliebigen Punktes mit $x \neq 0$ in die Funktionsvorschrift $f(x) = a^x$ lässt sich der Parameter a immer eindeutig bestimmen. Für $x = 0$ ist nur der Punkt $(0; 1)$ ein Element aller Funktionen diesen Typs. Man erhält durch das Einsetzen dieser Koordinaten lediglich folgende Gleichungen, mit denen man dann a nicht näher bestimmen kann: $a^0 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1$. Für ein beliebiges $y \neq 1$ erhält man sogar einen Widerspruch.

2. *Bei einer beliebigen Exponentialfunktion diesen Typs ist ein konkreter Punkt des Graphen stets bekannt.*

Dass dies eine allgemeingültige, wahre Aussage ist, ergibt sich bereits aus der Begründung zur letzten Aussage und dem entsprechenden Satz im Bereich *Inhalte mit Erklärungen*. Es gilt stets

$$f(0) = a^0 = 1,$$

woraus folgt, dass der Punkt $P(0; 1)$ zu jedem Graphen einer Exponentialfunktion der Form $f(x) = a^x$ gehört.

3. *Da die Funktionswerte von Exponentialfunktionen diesen Typs stets größer als Null sind, können Prozesse, bei denen etwas im Laufe der Zeit abnimmt, hiermit nicht modelliert werden.*

Diese Aussage ist falsch, was sich beispielsweise leicht durch den Graphen der Funktion $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ widerlegen lässt:

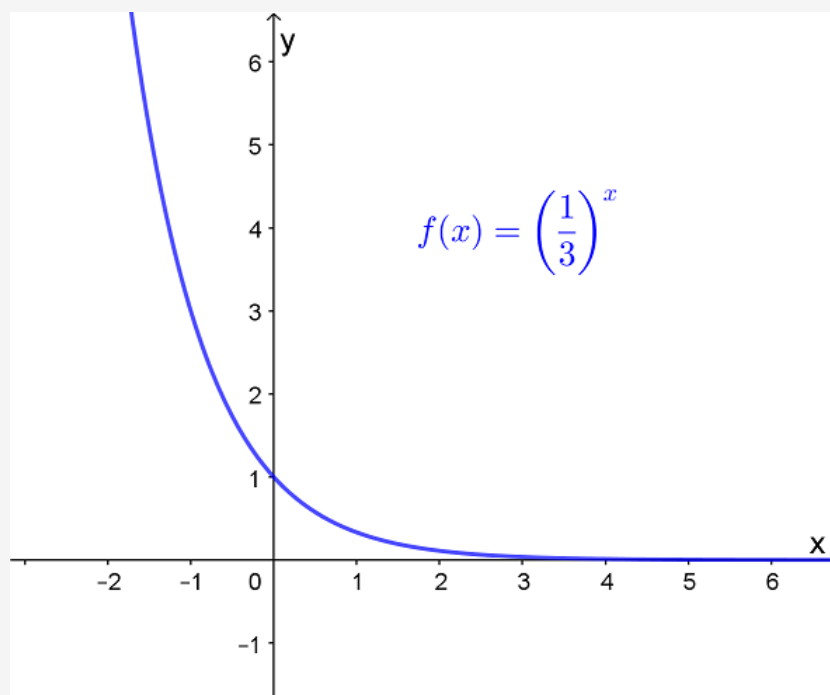


Bild 11

Diese Funktion ist streng monoton fallend, d. h. mit zunehmenden x -Werten nehmen die y -Werte stets ab und nähern sich gleichzeitig der x -Achse an, "überschreiten diese allerdings nicht. Somit werden die entsprechenden Funktionswerte stets kleiner, bleiben aber immer im positiven Bereich. Hierdurch ist gezeigt, dass man auch Abnahme - bzw. Zerfallsprozesse mit Exponentialfunktionen modellieren kann, man benötigt dazu allerdings Basen aus dem Bereich $0 < a < 1$.

Aufgabe 7:

Wir betrachten die Exponentialfunktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 7^x$.

Schreiben Sie die Funktionsvorschrift zur Basis e .

$$f(x) = \boxed{?}$$

Lösung:

$$g(x) = 7^x = e^{\ln(7) \cdot x} \quad (\approx e^{1,946 \cdot x})$$

Aufgabe 8:

Gegeben sei ein exponentieller Wachstumsprozess durch die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 180 \cdot e^{2,5x}$. Eine Kommilitonin behauptet, dass man den Startwert (also den Funktionswert an der Stelle $x = 0$) sowohl in der Funktionsvorschrift als auch am Graph stets sofort ablesen kann.

1. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion und "überprüfen Sie die Richtigkeit ihrer Aussage.
2. Betrachten Sie die allgemeine Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = b \cdot e^{\lambda \cdot x}$. Geben Sie den Startwert $f(0)$ an und "überlegen Sie, wo der entsprechende Punkt im Graphen zu finden ist.

Lösung:

1. Den Startwert erhält man durch Einsetzen von $x = 0$ in die Funktionsvorschrift $180 \cdot e^{2,5 \cdot 0} = 180 \cdot 1 = 180$. Im Graphen kann man den Startwert auf der y -Achse ebenfalls an der Stelle 0 ablesen.

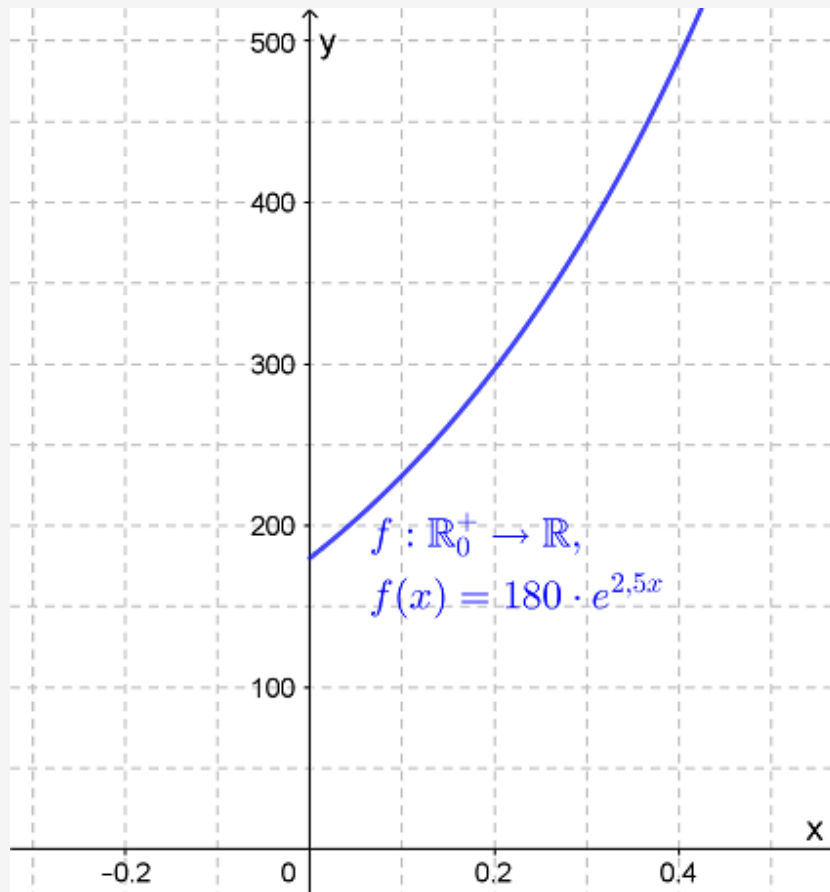


Bild 12 Ein Ausschnitt des Graphen der Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 180 \cdot e^{2,5x}$.

2. Im allgemeinen Fall $f(x) = b \cdot e^{\lambda x}$ kann man den Startwert auch direkt ablesen. Er ist gegeben durch b , denn $b \cdot e^{\lambda \cdot 0} = b \cdot 1 = b$. Im Schaubild ist der Startwert der Wert auf der y -Achse.

Aufgabe 9:

Eigenschaften der e -Funktion

Im Verlauf dieses Kapitels haben Sie die Eigenschaft $e^x > 0$ kennen gelernt.

Was bedeutet diese Eigenschaft für den Verlauf des Graphen der folgenden (erweiterten) Exponentialfunktionen?

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$
- $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = e^{\lambda x}, \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$
- $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = b \cdot e^{\lambda x}, \quad \text{mit } b, \lambda \in \mathbb{R}, b, \lambda \neq 0$

Welche weiteren Eigenschaften dieser Graphen kennen Sie?

Lösung:

Bedeutung der Eigenschaft $e^x > 0$:

- Der Graph der e -Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x$ verläuft immer oberhalb der x -Achse.
- Gleiches gilt auch für die allgemeinere Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = e^{\lambda \cdot x}$.
Denn wird der Parameter λ geändert, hat das im Wesentlichen den gleichen Effekt, als würde man bei der Funktionsvorschrift $g(x) = a^x$ die Basis a verändern.
- Bei der Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x) = b \cdot e^{\lambda \cdot x}$ müssen wir zwei Fälle unterscheiden.
Für $b > 0$ verläuft der Graph immer oberhalb der x -Achse.
Für $b < 0$ befindet sich der Graph stets unterhalb der x -Achse.

Folgende weitere Eigenschaften könnten Sie beispielsweise finden:

- Der Graph von g verläuft immer durch den Punkt $(0; 1)$ und der Graph von h durch den Punkt $(0; b)$.
- Die Funktion g ist für $\lambda > 0$ monoton steigend und für $\lambda < 0$ monoton fallend.
- Bei der Funktion h müssen wir wieder abhängig vom Vorzeichen von b zwei Fälle unterscheiden:
Für $b > 0$ verhält sich h genauso wie g . Das heißt: h ist monoton steigend für $b > 0$ und $\lambda > 0$; h ist monoton fallend für $b > 0$ und $\lambda < 0$.
Für $b < 0$ kehrt sich das Steigungsverhalten um. Das heißt: h ist monoton steigend für $b < 0$ und $\lambda < 0$; h ist monoton fallend für $b < 0$ und $\lambda > 0$.

Aufgabe 10:

Die Wachstumsfunktion von T.R. Malthus

Thomas R. Malthus, ein englischer Philosoph, veröffentlichte im Jahr 1798 seinen „Essay on the Principles of Population“, in dem er sich mit Zusammenhängen zwischen Bevölkerungswachstum und Nahrungsmittelproduktion auseinandersetzte. In diesem Kontext stellte er auch seine Wachstumsfunktion $B(t) = B_0 \cdot 1,0302^t$ vor, mit der er das Bevölkerungswachstum in den USA von 1800 bis 1860 gut prognostizieren konnte. Der Faktor B_0 steht dabei für die Größe der Bevölkerung im Jahr 1790 - diese Zahl war Malthus aufgrund einer Volkszählung bekannt. Für t setzt man die Anzahl von Jahren nach 1790 bis zu dem Jahr ein, für das man die Bevölkerungszahl prognostizieren möchte.

Stellen wir uns vor, wir wollen auf Basis dieser Annahmen einige Werte berechnen und damit das Bevölkerungswachstum vorhersagen (womit wir uns quasi im Jahr 1790 befinden), dann erhalten wir folgende Wertetabelle (Werte sind gerundet):

Jahr	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850
t (in Jahren)	0	10	20	30	40	50	60
B (in Mio)	$B_0 = 3,9$	5,25...	...				

1. Berechnen Sie die fehlenden Werte und zeichnen Sie den dazugehörigen Graphen.
2. Prognostizieren Sie auf Basis dieser Gleichung die Bevölkerungszahl der USA für 2004.

3. Im Januar 2005 betrug die Einwohnerzahl der USA 295 267 686 Menschen. Vergleichen Sie diese Zahl mit ihrer theoretisch für 2004 errechneten. Was stellen Sie fest? Welche Ursachen sind hierfür denkbar?

Lösung:

1.

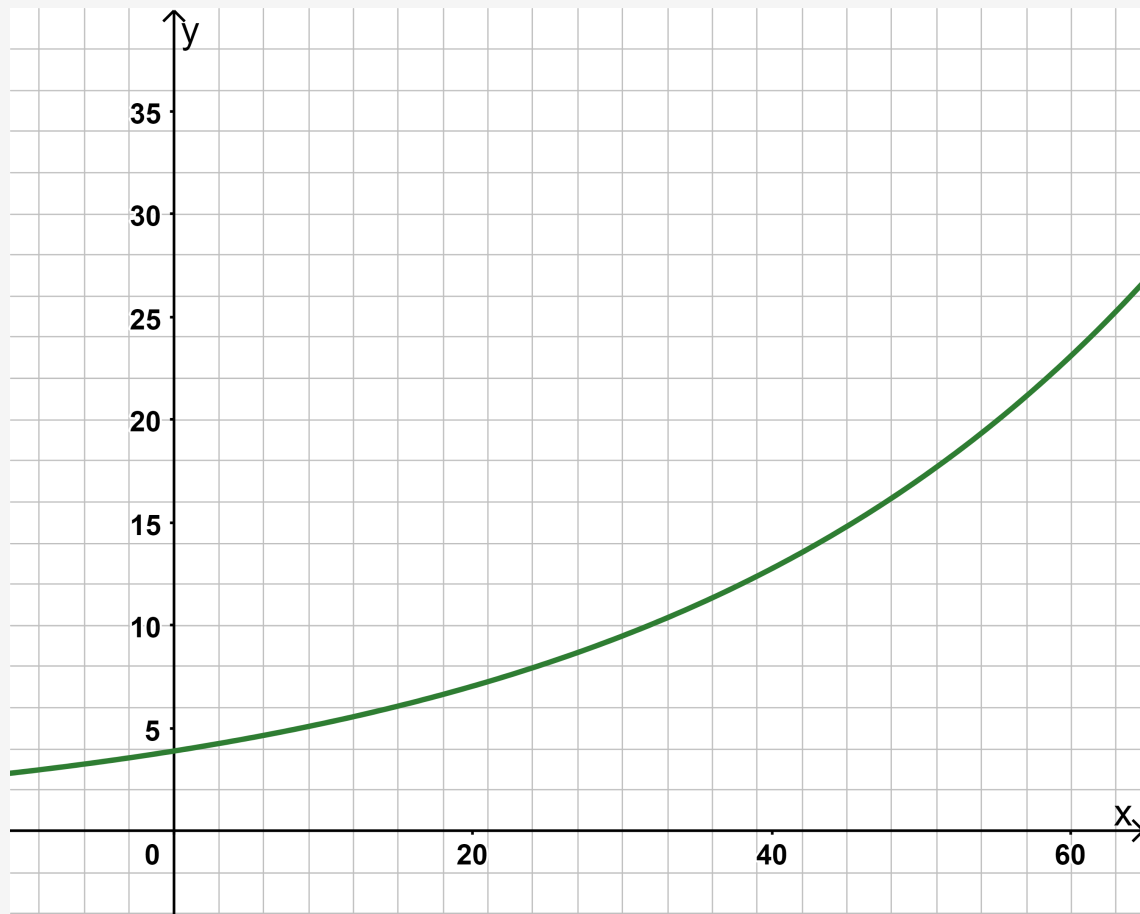


Bild 13 Der Graph der Wachstumsfunktion von Malthus

Jahr	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850
t (in Jahren)	0	10	20	30	40	50	60
B(t) (in Mio)	$B_0 = 3,9$	$\approx 5,25$	$\approx 7,07$	$\approx 9,52$	$\approx 12,82$	$\approx 17,26$	$\approx 23,25$

2. Um mithilfe der Funktionsvorschrift $B(t) = 3,9 \cdot 1,0302^t$ den Wert für das Jahr 2004 zu bestimmen, muss man zunächst das entsprechende t berechnen. Es ergibt sich $t = 2004 - 1790 = 214$. Diesen Wert setzt man nun in die Funktionsvorschrift ein und erhält dadurch eine theoretische Bevölkerungszahl von $B(214) = 3,9 \cdot 1,0302^{214} \approx 2271,30$, also rund 2,271 Milliarden Menschen.

3. Der Vergleich der theoretischen Zahl aus 2004 und der real erhobenen im Januar 2005 macht deutlich, dass bereits im Jahr 2004 rund 1975732314 mehr Menschen hätten leben müssen. Der theoretische Wert für Januar 2005 müsste demnach noch weiter vom tatsächlichen Ergebnis entfernt liegen.

Eine Prognose auf Basis der Wachstumszahlen aus 1790 ist, wie wir sehen, zumindest für eine Prognose "über einen größeren Zeitraum hinweg nicht aussagekräftig.

Ursachen hierfür sind in den Weiterentwicklungen im Bereich der Vermittlungsmittel und den damit verbundenen sinkenden Geburtenzahlen zu suchen. Kriege, Seuchen und andere Katastrophen sorgen gleichzeitig für temporäre Einschnitte in die Bevölkerungszahlen, während sich die Verbesserungen in der Versorgungslage der Menschen wiederum positiv auf die Einwohnerzahlen auswirkt. Aufgrund solcher Unsicherheitsfaktoren können Prognosen für Bevölkerungszahlen wenn überhaupt nur für kurze Zeiträume vorgenommen werden und sind als Schätzungen zu verstehen.