

# studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn

FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

## Anwendung

### Beispiel 2: (Bestimmen von Exponentialfunktionen durch Punkte)

Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift zur Exponentialfunktion der Form  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = a^x$ , deren Graph durch den Punkt  $P(2; 16)$  verläuft.

**Lösung:** Hierzu setzt man einfach das entsprechende Wertepaar in die Funktionsgleichung ein und erhält  $f(2) = a^2$  und damit  $a^2 = 16$ . Somit ist  $a = \sqrt{16} = 4$ , da Exponentialfunktionen für negative  $a$  nicht definiert sind. Somit lautet die Funktionsvorschrift  $f(x) = 4^x$ .

### Beispiel 3: (Typischer Verlauf von Exponentialfunktionen)

Die Graphen von Exponentialfunktionen der Form  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = b \cdot e^{\lambda \cdot x}$  können grundsätzlich vier verschiedene Verläufe zeigen, abhängig von den Werten der Parameter  $b$  und  $\lambda$ .

Für jeden Verlauf schauen wir im Folgenden einen Prototypen an. Die Graphen sind in den folgenden beiden Bildern dargestellt.

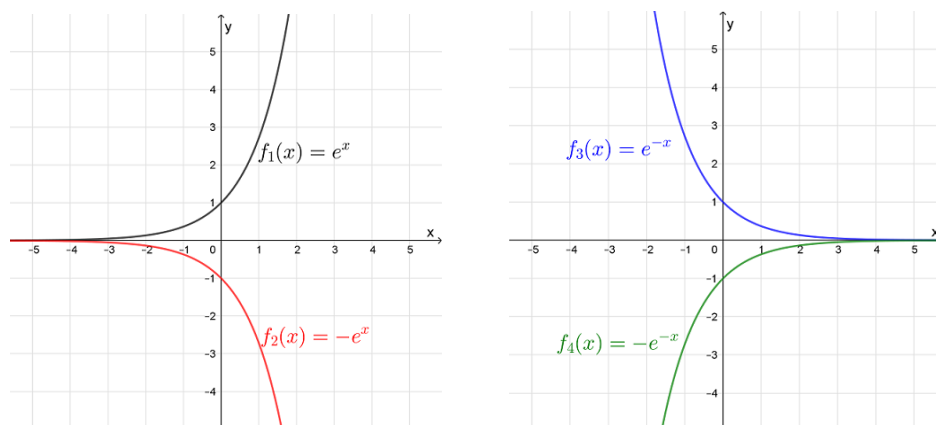


Bild 14

Im Bild auf der linken Seite sehen wir zum einen die Standard- $e$ -Funktion mit der Vorschrift  $f_1(x) = e^x$ . Der Graph schmiegt sich links an die  $x$ -Achse an, ist streng monoton steigend und schneidet die  $y$ -Achse bei  $(0; 1)$ .

Der andere Graph links gehört zur Funktionsvorschrift  $f_2(x) = -e^x$ . Er entspricht einer Spiegelung des Graphen von  $f_1$  an der  $x$ -Achse.

Im Bild auf der rechten Seite sehen wir oben den Graphen zur Funktionsvorschrift  $f_3(x) = e^{-x}$ . Der Graph entsteht durch eine Spiegelung des Graphen von  $f_1$  an der  $y$ -Achse. Wir können den Verlauf auch detaillierter beschreiben: Der Graph „kommt“ von links oben, schneidet die  $y$ -Achse bei  $(0; 1)$  und ist streng monoton fallend.

Der andere Graph rechts gehört zur Funktionsvorschrift  $f_4(x) = -e^{-x}$ . Er entspricht einer Spiegelung des Graphen von  $f_3$  an der  $x$ -Achse.

Die Parameter  $b$  und  $\lambda$  können auch andere Werte annehmen als 1 und  $-1$ . Der Graph folgt dann immer noch einem der vier Grundverläufe und ist lediglich ein wenig flacher oder steiler. Einige Beispiele sind in der folgenden Aufgabe zu finden.

|         | $\lambda > 0$                                        | $\lambda < 0$                                            |
|---------|------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| $b > 0$ | wie $e^x$ : über der $x$ -Achse, str. mon. steigend  | wie $e^{-x}$ : über der $x$ -Achse, str. mon. fallend    |
| $b < 0$ | wie $-e^x$ : unter der $x$ -Achse, str. mon. fallend | wie $-e^{-x}$ : unter der $x$ -Achse, str. mon. steigend |

Wäre  $b = 0$  oder  $\lambda = 0$ , entspricht der Graph einer Geraden und es ist keine Exponentialfunktion mehr gegeben.

### Aufgabe 11:

Im folgenden Bild sehen Sie vier Graphen von Exponentialfunktionen.

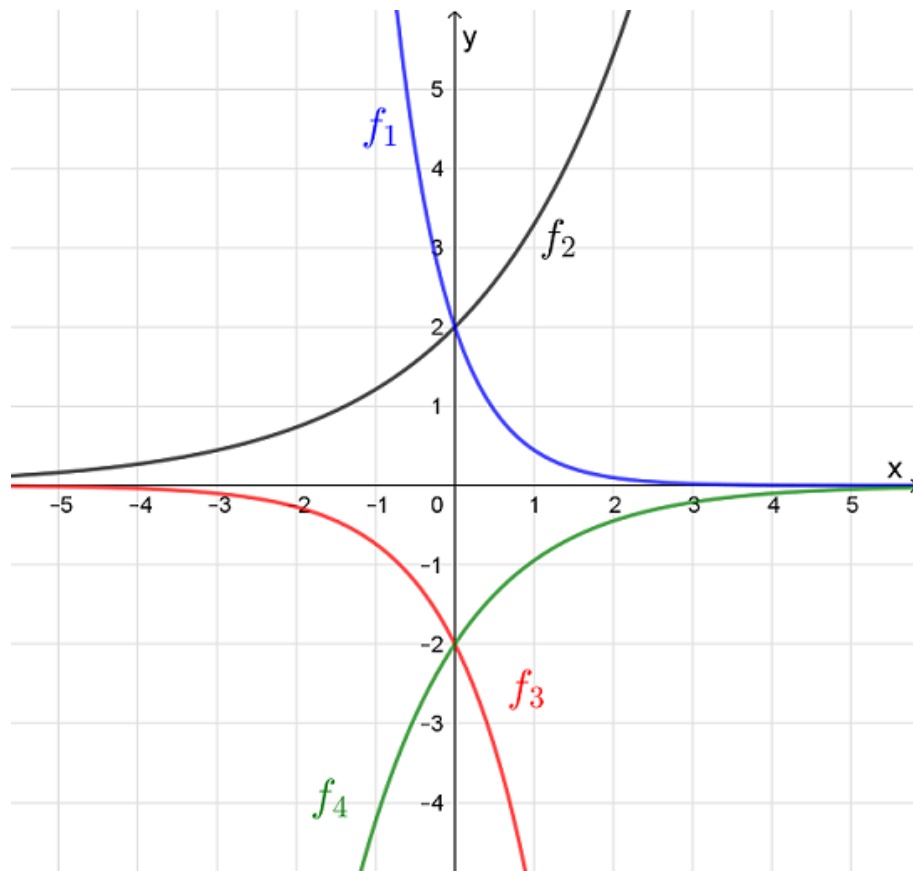


**Bild 15** Welche Funktionsvorschriften gehören zu den Graphen der Funktionen  $f_1$  (blau),  $f_2$  (schwarz),  $f_3$  (rot) und  $f_4$  (grün)?

Wählen Sie aus, welcher der vier Graphen zu der Funktionsvorschrift passt.

Funktionsterm:  $2 \cdot e^{0,5 \cdot x}$

☐  $f_1$  (blau)

☐  $f_2$  (schwarz)

☐  $f_3$  (rot)

☐  $f_4$  (grün)

Funktionsterm:  $-2 \cdot e^{-0,75 \cdot x}$

☐  $f_1$  (blau)

☐  $f_2$  (schwarz)

☐  $f_3$  (rot)

☐  $f_4$  (grün)

Funktionsterm:  $2 \cdot e^{-1,5 \cdot x}$

☐  $f_1$  (blau)

☐  $f_2$  (schwarz)

☐  $f_3$  (rot)

☐  $f_4$  (grün)

Funktionsterm:  $-2 \cdot e^x$

☐  $f_1$  (blau)

☐  $f_2$  (schwarz)

☐  $f_3$  (rot)

☐  $f_4$  (grün)

### Lösung:

Die Aufgabe lässt sich mit den typischen Verläufen lösen, die im vorherigen Beispiel vorgestellt wurden. Wir ordnen die vier Terme in die Tabelle aus dem Beispiel ein:

|         | $\lambda > 0$                                        | $\lambda < 0$                                            |          |
|---------|------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|----------|
| $b > 0$ | wie $e^x$ : über der $x$ -Achse, str. mon. steigend  | wie $e^{-x}$ : über der $x$ -Achse, str. mon. fallend    | fallend  |
| $b < 0$ | wie $-e^x$ : unter der $x$ -Achse, str. mon. fallend | wie $-e^{-x}$ : unter der $x$ -Achse, str. mon. steigend | steigend |

Daraus ergibt sich:

$2 \cdot e^{0,5 \cdot x}$  wird durch den schwarzen Graphen dargestellt:  $f_2$   
 $-2 \cdot e^{-0,75 \cdot x}$  wird durch den grünen Graphen dargestellt:  $f_4$   
 $2 \cdot e^{-1,5 \cdot x}$  wird durch den blauen Graphen dargestellt:  $f_1$   
 $-2 \cdot e^x$  wird durch den roten Graphen dargestellt:  $f_3$

### Beispiel 4: (Verdopplungen)

Dass bei vorgegebenen  $x$ -Werten die zugehörigen Funktionswerte und damit alle  $x$ -ten Potenzen zur Basis  $a$  berechnet werden können, ist bei Verwendung eines Taschenrechners genauso einfach wie klar. Der umgekehrte Fall, das Berechnen von Stellen bei vorgegebenen Funktionswerten, ist mitunter schwieriger, aber im Anwendungskontext mindestens genauso wichtig.

Eine Standardfrage ist dabei, wie sich das Argument einer Funktion ändern muss, damit sich der Funktionswert verdoppelt. Nehmen wir dazu beispielsweise die Exponentialfunktion  $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(t) = 10^t$  und betrachten dabei zunächst als Ausgangswert  $f(1) = 10$ . Wenn hierbei nun nach der Zeit (dem  $t$ -Wert) gefragt wird, nach der  $f$  auf den doppelten Wert angewachsen ist, so suchen wir dasjenige  $t_1$ , für das gilt  $f(1 + t_1) = 10 \cdot 2 = 20$ . Die Variable  $t_1$  stellt hierbei die Zeitspanne dar, die seit dem Ausgangswert vergangen ist. Setzt man das Argument  $1 + t_1$  sowie den Funktionswert 20 in die Funktionsgleichung ein und löst sie nach  $t_1$  auf, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 f(1 + t_1) &= 20 && | \text{ einsetzen} \\
 10^{1+t_1} &= 20 && | \text{ Potenzgesetz anwenden} \\
 10^1 \cdot 10^{t_1} &= 20 && | : 10 \\
 10^{t_1} &= 2 && | \log_{10}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow t_1 = \log_{10}(2) \approx 0,3$$

Somit erhält man eine Verdopplung des Funktionswertes  $f(1)$  mit  $t_1 \approx 0,3$ .

Ausgehend von dem neuen Argument  $t = 1 + t_1$  wollen wir nun untersuchen, bei welchem Argument erneut eine Verdopplung stattfindet. Demnach wollen wir berechnen, für welches  $t_2$  gilt  $f(1 + t_1 + t_2) = 2 \cdot 20 = 40$ .

Dies ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} f(1 + t_1 + t_2) &= 40 & | \text{ einsetzen} \\ 10^{1+t_1+t_2} &= 40 & | \text{ Potenzgesetz anwenden} \\ 10^{1+t_1} \cdot 10^{t_2} &= 40 & | (10^{1+t_1} = 20) \text{ einsetzen} \\ 20 \cdot 10^{t_2} &= 40 & | : 20 \\ 10^{t_2} &= 2 & | \log_{10} \\ \Rightarrow t_2 &= \log_{10}(2) \approx 0,3 \end{aligned}$$

Wie Sie sehen, erhält man  $t_1 = t_2 = \log_{10}(2)$ . Dies legt die Vermutung nahe, dass ausgehend von einem beliebigen Startzeitpunkt  $t_0$  stets eine Verdopplung bei  $t_0 + t_1$ , d. h. in  $t_1$ -Schritten stattfindet.

Die Allgemeingültigkeit dieser Vermutung kann man durch eine Herleitung beweisen, die wir jetzt durchführen wollen. Dazu berechnen wir ausgehend von einem beliebigen Startwert  $t_0$  die Änderung  $t_1$ , bis der doppelte Funktionswert  $2 \cdot f(t_0)$  erreicht wird. Es ergibt sich demnach folgende Gleichung, die nach  $t_1$  aufgelöst werden muss:

$$\begin{aligned} 2 \cdot f(t_0) &= f(t_0 + t_1) & | : f(t_0) \\ 2 &= \frac{f(t_0 + t_1)}{f(t_0)} & | \text{ einsetzen} \\ 2 &= \frac{10^{t_0+t_1}}{10^{t_0}} & | \text{ Potenzgesetz anwenden} \\ 2 &= \frac{10^{t_0} \cdot 10^{t_1}}{10^{t_0}} & | \text{ kürzen} \\ 2 &= 10^{t_1} & | \log_{10} \\ t_1 &= \log_{10}(2) \end{aligned}$$

Für unser konkretes Beispiel ergibt sich somit Zweierlei: Zum einen findet stets eine Verdopplung nach  $t_1 = \log_{10}(2)$  statt, zum anderen kürzt sich die Potenz  $10^{t_0}$  und damit der Funktionswert an der Stelle  $t_0$  heraus. Das bedeutet, dass die Zeitspanne für die Verdopplung unabhängig vom Startzeitpunkt  $t_0$  und seinem zugehörigen Funktionswert  $f(t_0)$  ist.

Allgemein lässt sich analog zeigen, dass bei allen Exponentialfunktionen zu einer beliebigen Basis  $a$  unabhängig vom Startzeitpunkt und dem entsprechenden Ausgangswert die Zeitspanne für die Verdopplung stets  $\log_a(2)$  beträgt. Diese bezeichnet man als Verdopplungszeit.

### Beispiel 5: (Wachstumsprozess)

Wachstumsprozesse können durch Exponentialfunktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = b \cdot a^x$  mit  $a, b \in \mathbb{R}^+$  beschrieben werden. Dabei ist  $b$  der Startwert und  $x$  die vergangene Zeit seit dem Startzeitpunkt. Wir betrachten folgendes Beispiel:

Eine Bakterienkultur von 1000 Gramm Gewicht wächst stetig mit einem Prozentsatz von 3% (=

0,03) pro Jahr. Auf welches Gewicht ist die Kultur nach drei Jahren und zehn Tagen angewachsen?

Der Startwert  $b$  betr agt 1000. Den Parameter  $a$  kann man aus der Wachstumsangabe bestimmen: Pro Jahr wächst das Gewicht um 3%, d.h. nach einem Jahr man  $1000 \cdot 1,03 = 1030$  Gramm. Ein weiteres Jahr später hat man dann  $1030 \cdot 1,03 = 1060,9$  Gramm. Das sind  $1000 \cdot 1,03^2$  Gramm. Also lässt sich das Gewicht durch die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = 1000 \cdot 1,03^x$  berechnen, wobei  $x$  die Anzahl der Jahre seit Beobachtungsbeginn bezeichnet. Damit kann man die Frage beantworten:

$$\begin{aligned} f\left(3 + \frac{10}{365}\right) &= 1000 \cdot 1,03^{\left(3 + \frac{10}{365}\right)} \\ &\approx 1000 \cdot 1,0936 \\ &\approx 1094. \end{aligned}$$

Also wiegt die Bakterienkultur nach 3 Jahren und 10 Tagen etwa 1094 Gramm.