

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn

FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

LE 8 - Höhere Funktionen

8.3 Logarithmusfunktionen

Im Folgenden finden Sie die Abschnitte:

Übersicht	S. 1
Hinführung	S. 2
Inhalte mit Erklärungen	S. 5
Aufgaben	S. 8
Anwendung	S. 11

Übersicht

In diesem Kapitel werden u. a. folgende Themen behandelt

- Definition und Eigenschaften der Logarithmusfunktion
- Graph des nat"urlichen Logarithmus
- Zusammenhang zwischen Exponential- und Logarithmusfunktion
- Anwendungen des nat"urlichen Logarithmus

Hinführung

Die barometrische Höhenformel

Die barometrische Höhenformel gibt den Luftdruck p in bar in der Höhe h in Metern über dem Erdboden an:

$$p = p_0 e^{-\frac{h}{7991}}$$

Die Größe $p_0 = 1,013$ beschreibt den Luftdruck am Erdboden, also bei $h = 0$ [m].

Die barometrische Höhenformel gilt in guter Näherung in der Troposphäre – bis ca. 12 km über dem Meeresspiegel.

Der Luftdruck p ist also umso geringer, je höher man sich befindet. Dies spüren beispielsweise Bergsteiger, da in großer Höhe durch den geringeren Druck auch die Dichte und somit der Sauerstoffgehalt der Luft abnimmt.

Die barometrische Höhenformel kann man auch als Funktion definieren. Da sie nur für nichtnegative Höhen h gilt (also $h \in \mathbb{R}_0^+$) und nur positive Drücke p liefert, kann als Definitionsbereich $\mathbb{R}_0^+$ und als Zielbereich $\mathbb{R}^+$ (immer positiver Druck) gewählt werden,

$$p : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad \text{mit} \quad p(h) = p_0 e^{-\frac{h}{7991}}.$$

Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt aus dem dazugehörigen Graphen:

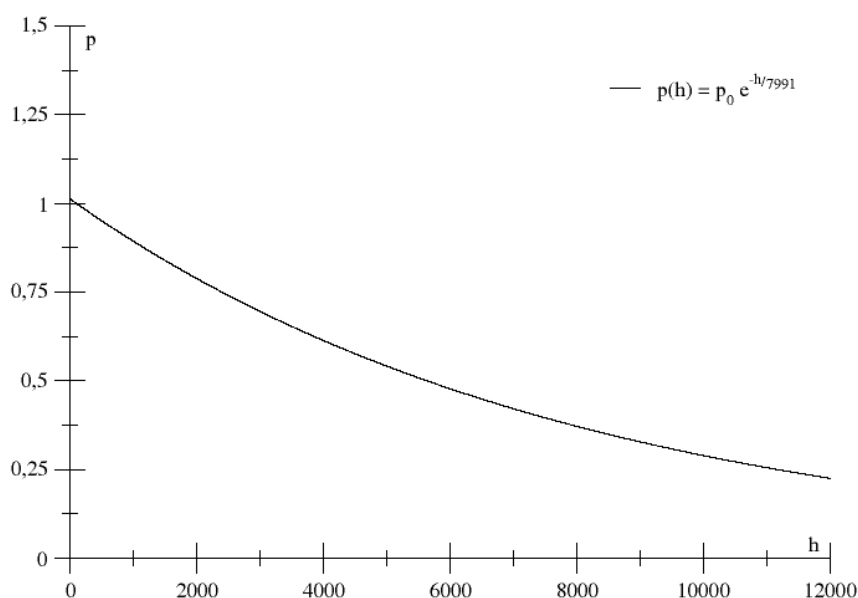


Bild 1

Umgekehrt kann man sich nun die Frage stellen, in welcher Höhe ein bestimmter Luftdruck herrscht, beispielsweise der halbe Druck dessen, der am Erdboden herrscht.

Aufgabe 1:

In welcher Höhe h_1 herrscht nur noch der halbe Luftdruck wie am Erdboden $p_1 = \frac{p_0}{2}$?

Geben Sie das Ergebnis in Metern mit zwei Nachkommastellen an.

$h_1 =$

Lösung:

Es gilt

$$p_1 = \frac{p_0}{2} = p_0 e^{-\frac{h_1}{7991}}$$

bzw.

$$\frac{1}{2} = e^{-\frac{h_1}{7991}}$$

Hieraus folgt

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{h_1}{7991}$$

wobei hier die Tatsache benutzt wurde, dass die Umkehroperation zum Potenzieren der Logarithmus ist. Mehr dazu finden Sie in der Lerneinheit *Potenzen, Wurzeln, Logarithmen*.

So ergibt sich:

$$\begin{aligned} h_1 &= -7991 \cdot \ln(2^{-1}) \\ &= -7991 \cdot (-1) \cdot \ln(2) \\ &\approx 5538,94 \end{aligned}$$

Da sich also auch aus der Angabe eines Druckes die Höhe berechnen lässt, gibt es für Bergsteiger sogenannte „Höhenmesser“ oder „Altimeter“, die genau nach diesem Prinzip funktionieren: Sie messen den Luftdruck und geben die dazugehörige Höhe an.

Man kann auch die Höhe in Abhängigkeit des Luftdruckes als Funktion schreiben. Dafür muss man den oben angegebenen Term nach der Höhe h auflösen:

$$\begin{aligned} p &= p_0 e^{-\frac{h}{7991}} & | : p_0 \\ \frac{p}{p_0} &= e^{-\frac{h}{7991}} & | \ln \\ \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) &= -\frac{h}{7991} & | \cdot (-7991) \\ (-7991) \cdot \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) &= h & | \text{Log-Gesetze} \\ 7991 \cdot \ln\left(\frac{p_0}{p}\right) &= h \end{aligned}$$

Dabei sind alle Umformungen Äquivalenzumformungen.

Es wurde die Zuordnungsvorschrift für die Umkehrfunktion ermittelt. Um die Definitionsmenge dafür anzugeben, muss ermittelt werden, welche Werte p annehmen kann, wenn $0 \leq h$ ist. Da die Funktion $p(h)$ monoton fallend ist, ist der Bereich $0 < p(h) \leq p_0 = 1,013$.

So erhält man die Funktion $h(p)$

$$h : \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1,013\} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

$$\text{mit } h(p) = 7991 \cdot \ln\left(\frac{p_0}{p}\right)$$

wobei $p_0 = 1,013$ weiterhin der Luftdruck am Erdboden ist. Man kann $h(p)$ mit den Logarithmenetzen noch weiter umformen:

$$\begin{aligned} h(p) &= 7991 \cdot [\ln(p_0) - \ln(p)] \\ &= 7991 \cdot \ln(p_0) - 7991 \cdot \ln(p). \end{aligned}$$

Da diese Funktion den Logarithmus der Variablen p erhält, bezeichnet man sie als **Logarithmusfunktion**. Ihr Graph sieht folgendermaßen aus:

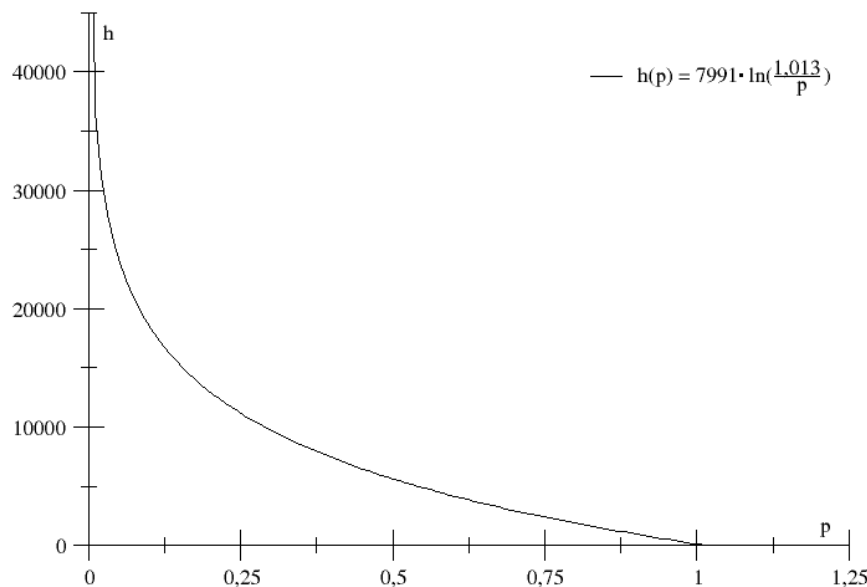


Bild 2

An dieser Funktion kann man nun ablesen, welche Höhe h zu einem gemessenen Luftdruck p gehört.

Da die Funktion $h(p)$ ermittelt wurde, indem die Funktion $p(h)$ nach h aufgelöst und dabei Definitionsbereich und Wertebereich umgekehrt wurde, bezeichnet man sie auch als **Umkehrfunktion** der Funktion p . Mehr Informationen und Erklärungen zu Umkehrfunktionen finden Sie im Kapitel *Umgang mit Funktionen* dieser Lerneinheit.

Inhalte mit Erklärungen

In der Lerneinheit *Potenzen, Wurzeln, Logarithmen* wurden Logarithmen zu beliebigen Basen und die dazugehörigen Rechengesetze eingeführt. Dort wurde folgendes definiert bzw. bewiesen:

Definition 1: (Logarithmus)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ $a > 0$, $a \neq 1$, und $b > 0$ gegeben. Die reelle Zahl c , die die Gleichung $a^c = b$ erfüllt, bezeichnet man als **Logarithmus** von b zur Basis a und man schreibt $c = \log_a(b)$.

Kurz:

$$\log_a(b) = c \Leftrightarrow a^c = b.$$

Der Logarithmus $\log_a(b)$ ist also diejenige reelle Zahl, mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten.

Der Logarithmus ist somit als eine der Rechenoperationen definiert, die das Potenzieren umkehrt.

Regel 1: (Logarithmengesetze)

Für alle $a \in \mathbb{R}^+$ mit $a \neq 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y),$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),$$

$$\log_a(x^\beta) = \beta \log_a(x).$$

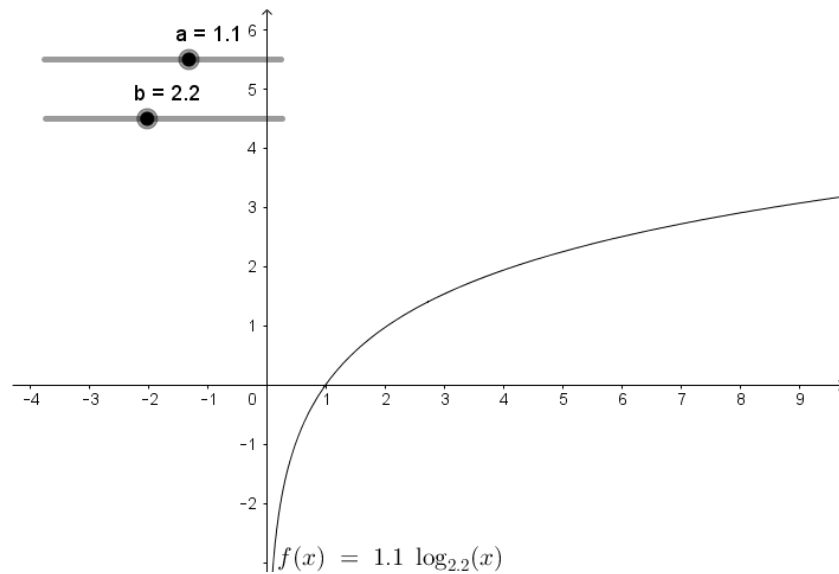
Mit Hilfe des Logarithmus kann man nun zur Exponentialfunktion eine Umkehrfunktion definieren, die man Logarithmusfunktion nennt:

Definition 2: (Logarithmusfunktion)

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Funktionsvorschrift $f(x) = b \cdot \log_a(x)$ mit $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und $b \in \mathbb{R}$ heißt Logarithmusfunktion zur Basis a .

Wichtig: Die Logarithmusfunktion ist (wie auch der Logarithmus einer Zahl selbst) nur für positive Werte von x definiert.

Des Weiteren dürfen als Basis a nur positive Werte $\neq 1$ gewählt werden, da der Logarithmus ansonsten nicht definiert ist.



Interaktion 1 (nur in digitaler Version)

Aufgabe 2:

Was bleibt immer gleich, wenn Sie die Basis der Logarithmusfunktion ändern?

Beachten Sie, dass als Basis nicht $a = 1$ gewählt werden darf, weil die Logarithmusfunktion dafür nicht definiert ist (siehe oben).

- ☐ Der Schnittpunkt mit der x -Achse.
- ☐ Der Schnittpunkt mit der y -Achse.
- ☐ Die Steigung am Punkt $(1; 0)$.

Lösung:

Die Basis der Logarithmusfunktion entspricht im Applet dem Parameter a . Ändert man ihn, so ändert sich die Steigung des Graphen.

Gleich bleibt hingegen die Tatsache, dass er an der Stelle $(1; 0)$ die x -Achse schneidet.

Der nat"urliche Logarithmus ($\ln$)

Nimmt man als Basis des Logarithmus die Eulersche Zahl e , so erhält man den natürlichen Logarithmus

$$y = \ln(x) \iff e^y = x, \quad x > 0.$$

Die Funktion zum natürlichen Logarithmus lautet daher:

Definition 3: (Der natürliche Logarithmus als Funktion)

Die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \ln(x)$ ist die Logarithmusfunktion zur Basis e , also mit dem natürlichen Logarithmus.

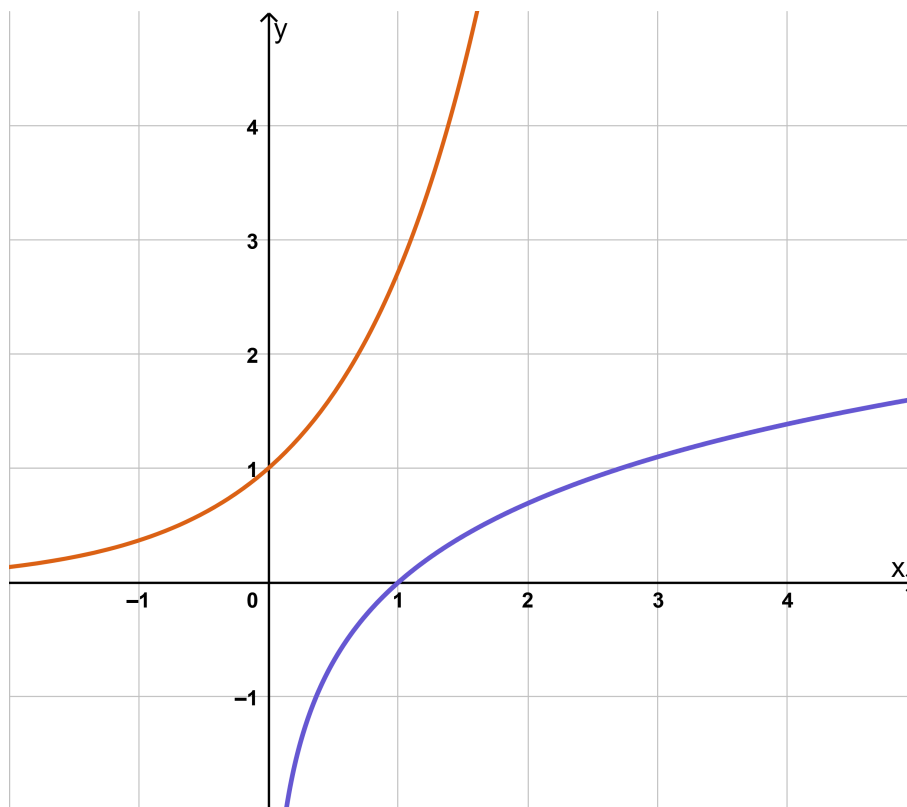


Bild 3 Graph der e -Funktion (blau) und des nat"urlichen Logarithmus (rot).

Bemerkung: Der Graph von $\ln(x)$ entsteht durch Spiegelung des Graphen der Funktion e^x an der ersten Winkelhalbierenden. Die Funktion $\ln(x)$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion e^x ; siehe Kapitel *Umgang mit Funktionen* der Lerneinheit *H"ohere Funktionen* zum Thema Umkehrfunktionen.

Aufgaben

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot \ln(2x)$ mit $a \in \mathbb{R}$. Welchen Wert muss a haben, damit die Funktion durch den Punkt $(\frac{e}{2}; 9)$ verläuft?

$a =$

Lösung:

Für $x = \frac{e}{2}$ soll gelten $f(x) = 9$ gelten. Nun kann man den gegebenen Punkt in die Funktionsvorschrift einsetzen und diese nach a auflösen:

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot \ln(2x) && | \text{Punkt einsetzen} \\ 9 &= a \cdot \ln\left(2 \cdot \frac{e}{2}\right) \\ 9 &= a \cdot \ln(e) \\ 9 &= a \cdot 1 \\ 9 &= a \end{aligned}$$

Die Funktionsvorschrift muss also $f(x) = 9 \cdot \ln(2x)$ lauten, damit f durch den gewünschten Punkt verläuft.

Aufgabe 4:

Gegeben ist die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot \ln(x + b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.

Welcher maximale Definitionsbereich D kann für diese Funktion angenommen werden?

- ☐ $D = \mathbb{R}$
- ☐ $D = \mathbb{R}^+$, mit $b \geq 0$.
- ☐ $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -b\}$

Lösung:

Da die Logarithmusfunktion nur für positive Argumente definiert ist, muss der Definitionsbereich so eingeschränkt sein, dass immer $(x + b) > 0$ gilt.

Den maximal möglichen Definitionsbereich erhält man, wenn man $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -b\}$ wählt, denn in diesem Fall darf x alle Werte annehmen, für die die Summe aus x und b größer als Null ist.

Welchen Wert müssen a und b besitzen, damit die oben angegebene Funktion f durch den Punkt $(-2; 0)$ verläuft?

Antwort für a :

- ☐ a kann man beliebig wählen, das hat keinen Einfluss auf den Verlauf durch den Punkt $(-2; 0)$.
- ☐ a muss den Wert $a = 1$ besitzen, damit f durch den Punkt $(-2; 0)$ verlaufen kann.
- ☐ a muss den Wert $a = -2$ besitzen, damit f durch den Punkt $(-2; 0)$ verlaufen kann.

Antwort für b :

$b =$

Lösung:

Für den Wert $x = -2$ soll $f(x) = 0$ gelten. Um die Parameter zu ermitteln kann man den Punkt $(-2; 0)$ in die Funktionsvorschrift einsetzen und auflösen:

$$\begin{array}{ll}
 f(x) = a \cdot \ln(x + b) & | \text{ Punkt einsetzen} \\
 0 = a \cdot \ln(-2 + b) & | : a, \quad (a \neq 0) \\
 0 = \ln(-2 + b) & | e^{\dots} \\
 e^0 = -2 + b & | \text{ ausrechnen} \\
 1 = -2 + b & | + 2 \\
 3 = b &
 \end{array}$$

Aufgrund der Einschränkung $a \neq 0$ (siehe Aufgabenstellung) erhält man eine eindeutige Lösung $b = 3$ für den Parameter b . Für den Parameter a erhält man keine Aussage. Tatsächlich kann der Parameter a hier beliebig gewählt werden, da dies nur die Steigung der Funktion ändert, aber nicht ihren Schnittpunkt mit der x -Achse.

Die Funktionsvorschrift muss also $f(x) = a \cdot \ln(x + 3)$ mit $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ lauten, damit f durch den gewünschten Punkt verläuft.

Aufgabe 5:

Welcher der folgenden Graphen kann zu einer Logarithmusfunktion gehören?

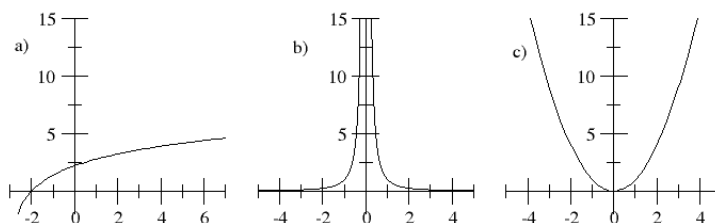


Bild 4

- ☐ Graph a)
- ☐ Graph b)
- ☐ Graph c)

Lösung:

Graph a) gehört zur Logarithmusfunktion $f : \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2 \cdot \ln(x + 3)$.

Graph b) gehört zur Potenzfunktion $g : \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

Graph c) gehört zur quadratischen Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x) = x^2$.

Graph a) ist daher die einzige korrekte Lösung.

Anwendung

Aufgabe 6:

Kondensatoraufladung

Ein Kondensator befindet sich in einem Stromkreis mit einer Spannungsquelle und einem Widerstand.

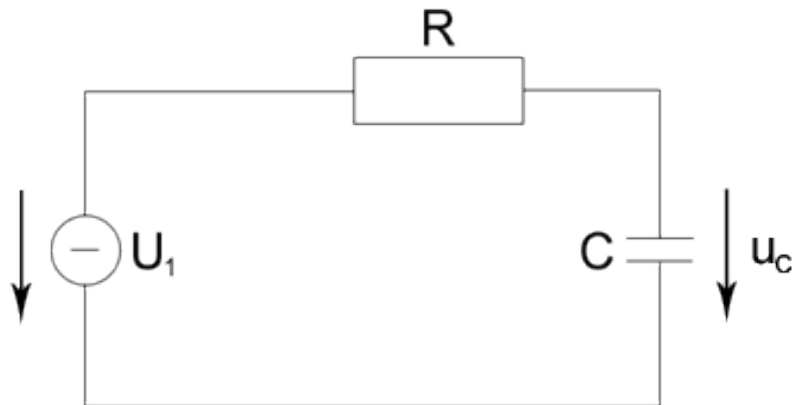


Bild 5 Kondensatoraufladung

Der Aufladungsvorgang für Zeitpunkte $t \geq 0$ wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$u_C : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad u_C(t) = U_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right),$$

wobei $u_C(t)$ die auf den Kondensator zu einem Zeitpunkt t „aufgeladene“ Spannung ist. U_1 bezeichnet die Spannung an der Gleichstromquelle, R den Widerstand der Stromleitung, über die der Kondensator aufgeladen wird, und C die Kapazität des Kondensators.

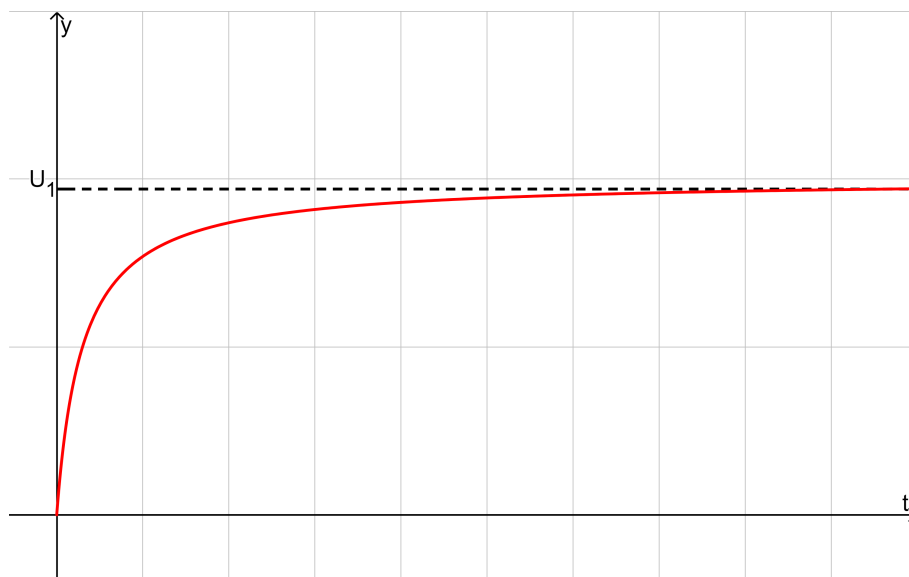


Bild 6 Die Funktion $u_C(t)$ mit $u_C = U_1 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$

Zu welcher Zeit t_1 betr"agt die Spannung am Kondensator $u_C = \frac{U_1}{2}$, wenn die Kapazit"at $C = 0,01$ und der Widerstand $R = 10$ betr"agt? (Alle Einheiten wurden hier der Einfachheit halber weggelassen.) Runden Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.

$t_1 =$ Sekunden

L"osung:

Zum Zeitpunkt t_1 soll gelten: $u_C = \frac{U_1}{2}$. Eingesetzt in die Funktionsgleichung bedeutet dies:

$$\frac{U_1}{2} = U_1 \left(1 - e^{-\frac{t_1}{RC}} \right)$$

Dies l"ost man nach t_1 auf:

$$\begin{aligned} \frac{U_1}{2} &= U_1 \left(1 - e^{-\frac{t_1}{RC}} \right) && | : U_1 \\ \frac{1}{2} &= 1 - e^{-\frac{t_1}{RC}} && | -\frac{1}{2} + e^{-\frac{t_1}{RC}} \\ e^{-\frac{t_1}{RC}} &= 1 - \frac{1}{2} \\ e^{-\frac{t_1}{RC}} &= \frac{1}{2} && | \ln \\ -\frac{t_1}{RC} &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) && | \text{Log-Gesetze} \\ -\frac{t_1}{RC} &= \ln(1) - \ln(2) \\ -\frac{t_1}{RC} &= 0 - \ln(2) && | \cdot (-1) \\ \frac{t_1}{RC} &= \ln(2) && | \cdot R \cdot C \\ t_1 &= R \cdot C \cdot \ln(2) \\ \Rightarrow t_1 &\approx 10 \cdot 0,01 \cdot 0,69315 \approx 0,07 \end{aligned}$$

Nach ca. 0,07 Sekunden ist der Kondensator zur H"alfte geladen.