

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn

FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Hinführung

Die barometrische Höhenformel

Die barometrische Höhenformel gibt den Luftdruck p in bar in der Höhe h in Metern über dem Erdboden an:

$$p = p_0 e^{-\frac{h}{7991}}$$

Die Größe $p_0 = 1,013$ beschreibt den Luftdruck am Erdboden, also bei $h = 0$ [m].

Die barometrische Höhenformel gilt in guter Näherung in der Troposphäre – bis ca. 12 km über dem Meeresspiegel.

Der Luftdruck p ist also umso geringer, je höher man sich befindet. Dies spüren beispielsweise Bergsteiger, da in großer Höhe durch den geringeren Druck auch die Dichte und somit der Sauerstoffgehalt der Luft abnimmt.

Die barometrische Höhenformel kann man auch als Funktion definieren. Da sie nur für nichtnegative Höhen h gilt (also $h \in \mathbb{R}_0^+$) und nur positive Drücke p liefert, kann als Definitionsbereich $\mathbb{R}_0^+$ und als Zielbereich $\mathbb{R}^+$ (immer positiver Druck) gewählt werden,

$$p : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad \text{mit} \quad p(h) = p_0 e^{-\frac{h}{7991}}.$$

Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt aus dem dazugehörigen Graphen:

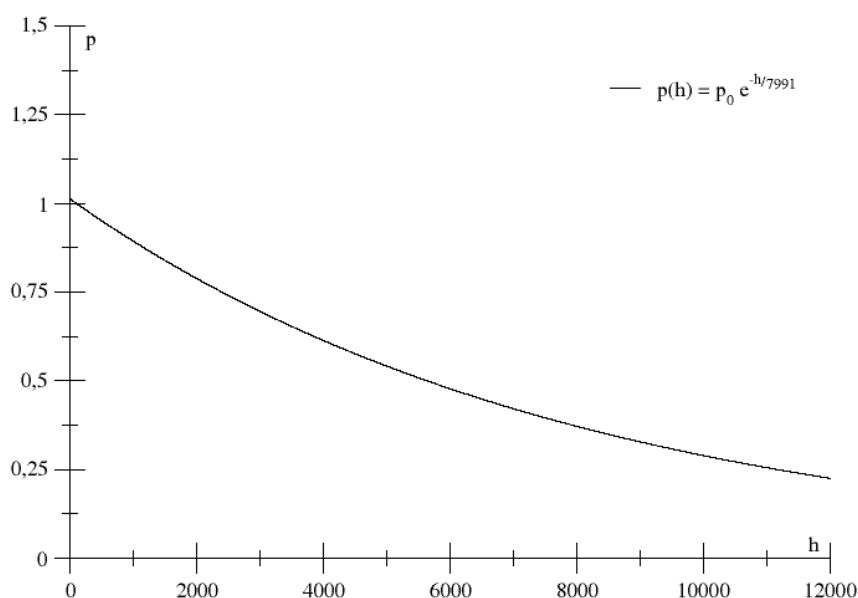


Bild 1

Umgekehrt kann man sich nun die Frage stellen, in welcher Höhe ein bestimmter Luftdruck herrscht, beispielsweise der halbe Druck dessen, der am Erdboden herrscht.

Aufgabe 1:

In welcher Höhe h_1 herrscht nur noch der halbe Luftdruck wie am Erdboden $p_1 = \frac{p_0}{2}$?

Geben Sie das Ergebnis in Metern mit zwei Nachkommastellen an.

$h_1 =$

Lösung:

Es gilt

$$p_1 = \frac{p_0}{2} = p_0 e^{-\frac{h_1}{7991}}$$

bzw.

$$\frac{1}{2} = e^{-\frac{h_1}{7991}}$$

Hieraus folgt

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{h_1}{7991}$$

wobei hier die Tatsache benutzt wurde, dass die Umkehroperation zum Potenzieren der Logarithmus ist. Mehr dazu finden Sie in der Lerneinheit *Potenzen, Wurzeln, Logarithmen*.

So ergibt sich:

$$\begin{aligned} h_1 &= -7991 \cdot \ln(2^{-1}) \\ &= -7991 \cdot (-1) \cdot \ln(2) \\ &\approx 5538,94 \end{aligned}$$

Da sich also auch aus der Angabe eines Druckes die Höhe berechnen lässt, gibt es für Bergsteiger sogenannte „Höhenmesser“ oder „Altimeter“, die genau nach diesem Prinzip funktionieren: Sie messen den Luftdruck und geben die dazugehörige Höhe an.

Man kann auch die Höhe in Abhängigkeit des Luftdruckes als Funktion schreiben. Dafür muss man den oben angegebenen Term nach der Höhe h auflösen:

$$\begin{aligned} p &= p_0 e^{-\frac{h}{7991}} & | : p_0 \\ \frac{p}{p_0} &= e^{-\frac{h}{7991}} & | \ln \\ \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) &= -\frac{h}{7991} & | \cdot (-7991) \\ (-7991) \cdot \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) &= h & | \text{Log-Gesetze} \\ 7991 \cdot \ln\left(\frac{p_0}{p}\right) &= h \end{aligned}$$

Dabei sind alle Umformungen Äquivalenzumformungen.

Es wurde die Zuordnungsvorschrift für die Umkehrfunktion ermittelt. Um die Definitionsmenge dafür anzugeben, muss ermittelt werden, welche Werte p annehmen kann, wenn $0 \leq h$ ist. Da die Funktion $p(h)$ monoton fallend ist, ist der Bereich $0 < p(h) \leq p_0 = 1,013$.

So erhält man die Funktion $h(p)$

$$h : \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1,013\} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

$$\text{mit } h(p) = 7991 \cdot \ln\left(\frac{p_0}{p}\right)$$

wobei $p_0 = 1,013$ weiterhin der Luftdruck am Erdboden ist. Man kann $h(p)$ mit den Logarithmenetzen noch weiter umformen:

$$\begin{aligned} h(p) &= 7991 \cdot [\ln(p_0) - \ln(p)] \\ &= 7991 \cdot \ln(p_0) - 7991 \cdot \ln(p). \end{aligned}$$

Da diese Funktion den Logarithmus der Variablen p erhält, bezeichnet man sie als **Logarithmusfunktion**. Ihr Graph sieht folgendermaßen aus:

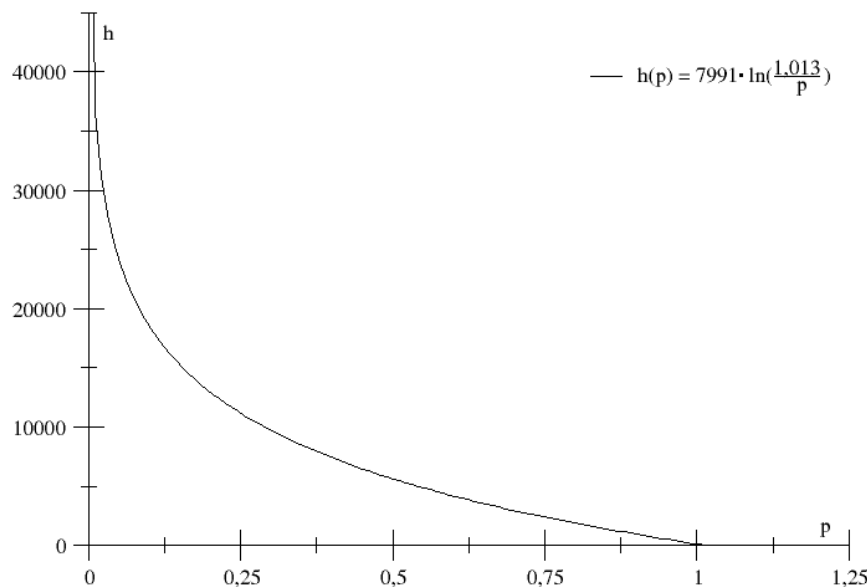


Bild 2

An dieser Funktion kann man nun ablesen, welche Höhe h zu einem gemessenen Luftdruck p gehört.

Da die Funktion $h(p)$ ermittelt wurde, indem die Funktion $p(h)$ nach h aufgelöst und dabei Definitionsbereich und Wertebereich umgekehrt wurde, bezeichnet man sie auch als **Umkehrfunktion** der Funktion p . Mehr Informationen und Erklärungen zu Umkehrfunktionen finden Sie im Kapitel *Umgang mit Funktionen* dieser Lerneinheit.