

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn

FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

LE 8 - Höhere Funktionen

8.4 Trigonometrische Funktionen

Im Folgenden finden Sie die Abschnitte:

Übersicht	S. 1
Hinführung	S. 2
Inhalte mit Erklärungen	S. 10
Aufgaben	S. 28
Anwendung	S. 35

Übersicht

In diesem Kapitel werden u.a. folgende Themen behandelt:

- Einführung der trigonometrischen Funktionen
- Periodizität und weitere Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen
- Allgemeine Sinus - und Cosinusfunktionen
- Erklärung der einzelnen Parameter in der allgemeinen Darstellung der Sinus - und Cosinusfunktion
- Anwendungen der Sinus - und Cosinusfunktion in der Physik und Elektrotechnik
- Ergänzung: Tabelle mit typischen Winkeln im Grad - und Bogenmaß

Hinführung

In der Lerneinheit *Trigonometrie* werden die Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens zunächst anhand eines beliebigen rechtwinkligen Dreiecks eingeführt. Hierfür werden zunächst die Bezeichnungen der Seiten des Dreiecks erklärt:

Im rechtwinkligen Dreieck wird die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber liegt, als Hypotenuse bezeichnet. Die Seiten, die am rechten Winkel anliegen, heißen Katheten. Dabei liegt die Ankathete am Winkel α an und die Gegenkathete liegt dem Winkel α gegenüber.

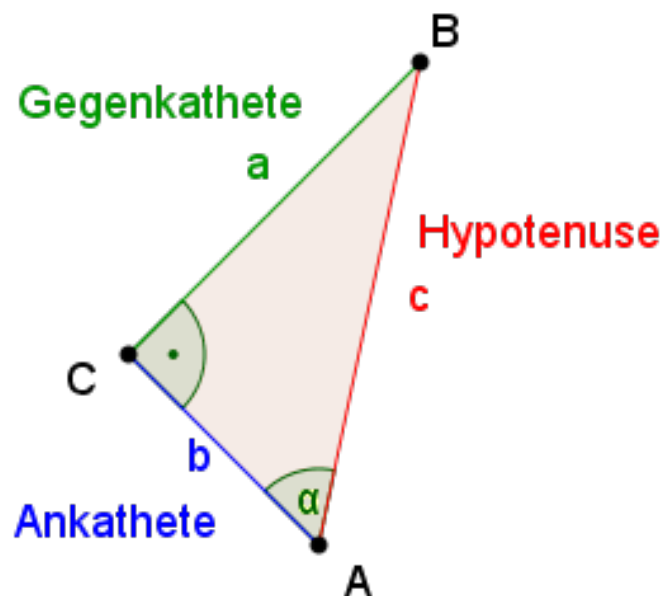


Bild 1

Die Winkelfunktionen werden mit diesen Bezeichnungen wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) &= \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \\ \cos(\alpha) &= \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \\ \tan(\alpha) &= \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}\end{aligned}$$

Auf diesen Definitionen werden wir in diesem Kapitel aufbauen, um die Funktionen auch für Winkel, die größer als 90° sind, zu verwenden.

Die folgende Abbildung zeigt eine Kreisscheibe (Draufsicht und Seitenansicht), auf der am Rand ein Korken befestigt ist ($r = 1 \text{ dm}$).

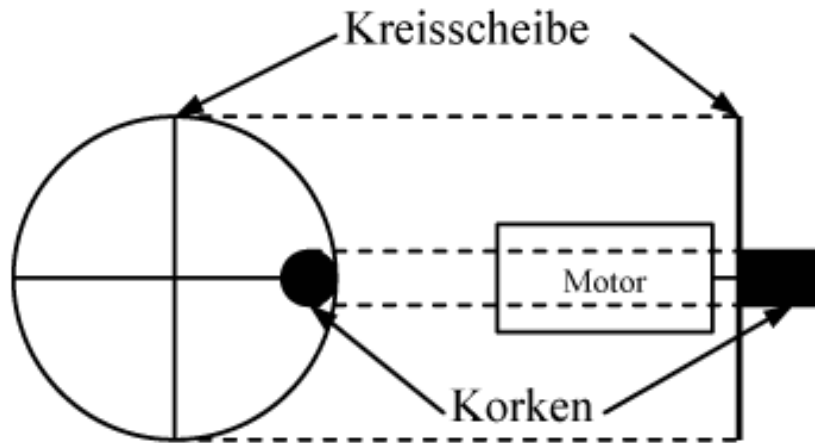


Bild 2 Kreisscheibe mit Korken (Draufsicht und Seitenansicht)

Die Kreisscheibe wird nun, mithilfe des Motors, gleichmäßig gegen den Uhrzeigersinn gedreht. Gleichzeitig wird die Bewegung des Korkens mit den Lichtstrahlen zweier Lampen zu einem auf eine senkrecht stehende und zum anderen auf eine waagrecht liegende Wand projiziert.

Diese Projektionen der Schatten werden in zwei Koordinatensystemen aufgezeichnet. Dabei wird auf der x -Achse die Zeit und auf der y -Achse der Abstand d des Korkens von der Mittellage aufgetragen.

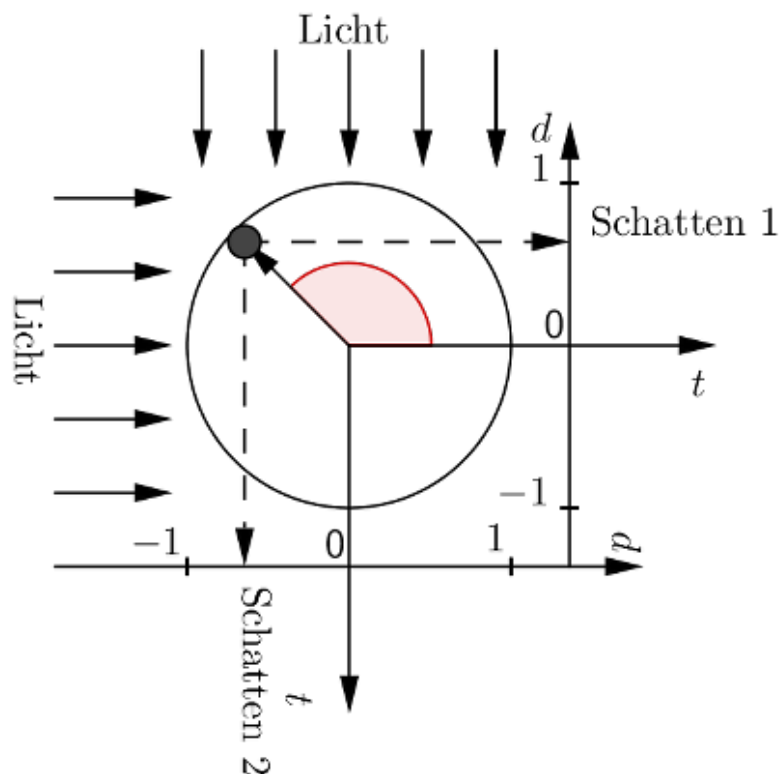


Bild 3 Schematische Darstellung der Korkenbewegung

Wenn man sich den Verlauf des Korkens anschaut, kommt man zu folgender Tabelle:

Position Korken	Winkel	Schatten 1	Schatten 2
Rechts	0°	0	1
Oben	90°	1	0
Links	180°	0	-1
Unten	270°	-1	0

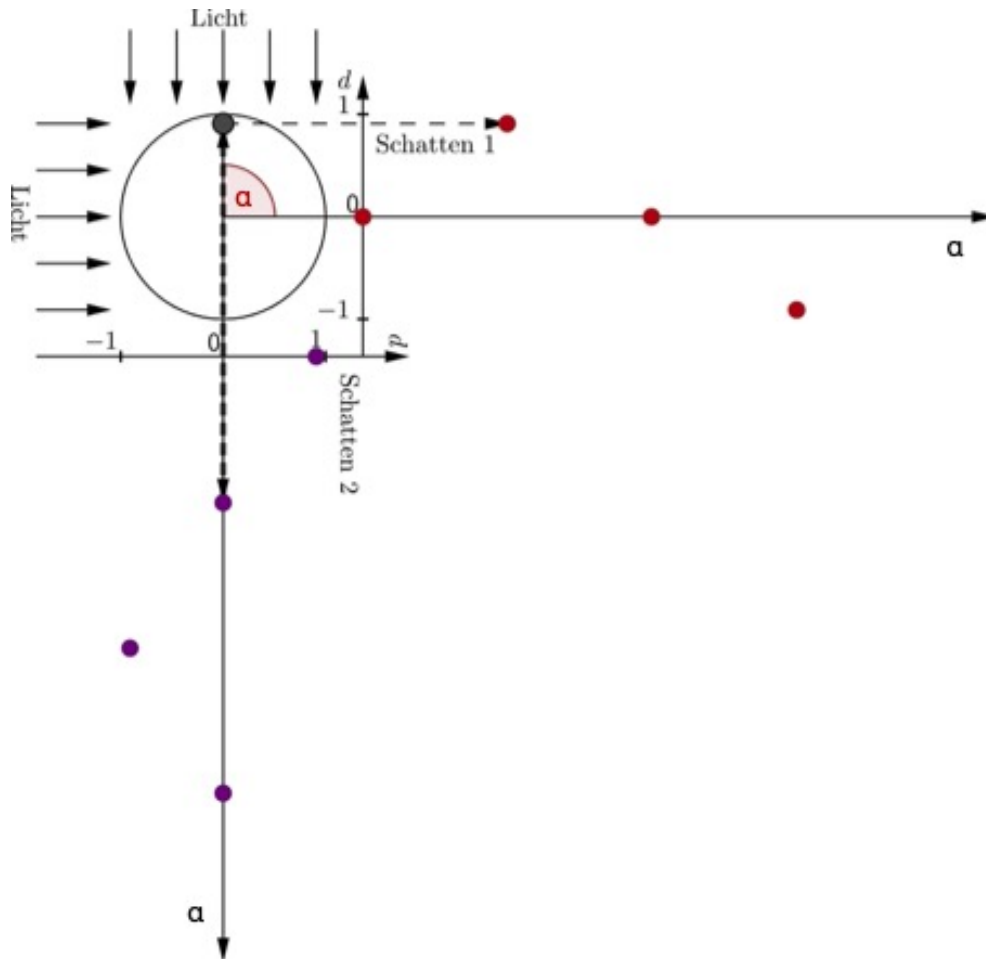


Bild 4

Wie der Verlauf zwischen diesen Höhen ist, lässt sich allerdings nicht so leicht vorstellen. Das folgende Video zeigt diesen Verlauf.

Preview fehlt:
h5p/Korkenbewegung

Video 1 (*nur in digitaler Version*)

Die oben beschriebenen Vorgänge wollen wir nun noch etwas näher untersuchen. Wir betrachten hierfür den in der folgenden Abbildung dargestellten Einheitskreis.

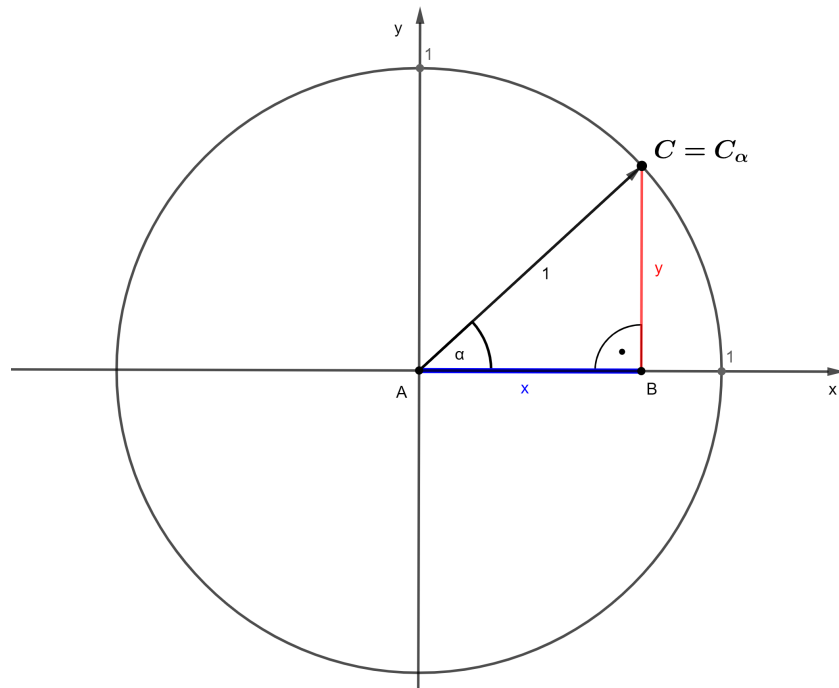


Bild 5 Einheitskreis

Mit dem Sinus und Cosinus folgt für das rechtwinklige Dreieck ABC und einen Winkel α von maximal 90° :

$$\sin(\alpha) = \frac{y}{1} \Rightarrow y = \sin(\alpha) \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \cos(\alpha)$$

Die Längen der Katheten entsprechen also im Einheitskreis dem Sinus - bzw. Cosinuswert zu einem bestimmten Winkel α . Da der Punkt C von α abhängt bezeichnen wir ihn auch mit C_α . Es ergibt sich also die Situation:

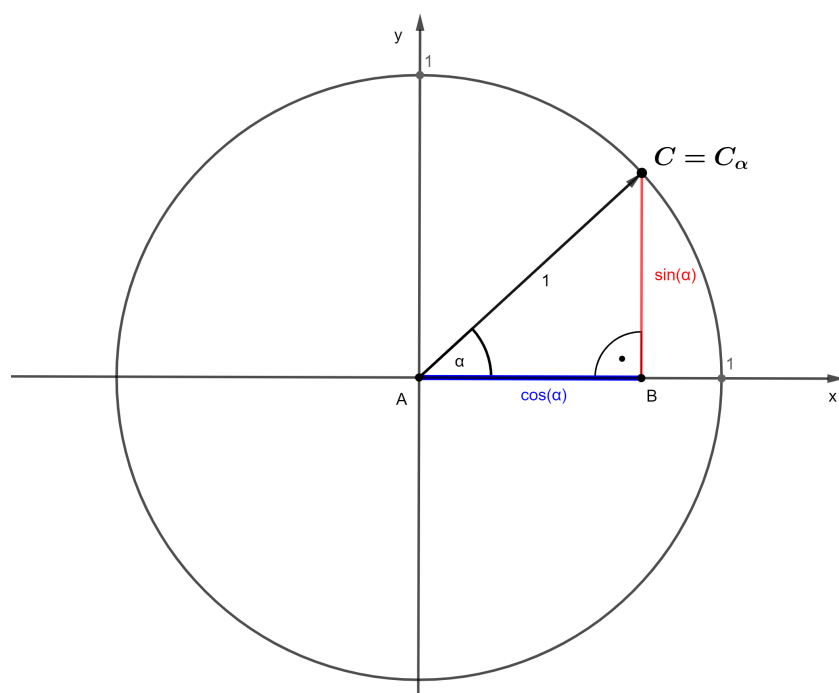


Bild 6 Darstellung von Sinus und Cosinus am Einheitskreis

Für $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ gilt: C_α hat die Koordinaten $(\cos(\alpha); \sin(\alpha))$.

Auf diesem Kreis lassen wir nun den Zeiger (Hypotenuse mit der Länge 1) im mathematisch positiven Drehsinn rotieren. Dabei erhalten wir für $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ die folgende Situation

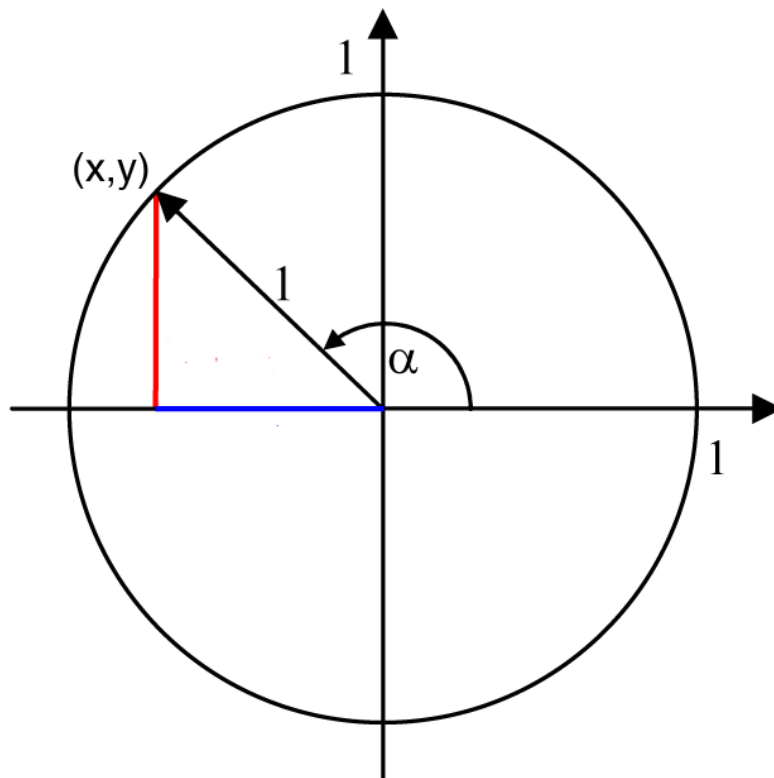


Bild 7 Sinus und Cosinus für $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$

Die Koordinaten des Punktes $(x; y)$ kann man mittels Sinus und Cosinus offenbar durch $(-\cos(180^\circ - \alpha); \sin(180^\circ - \alpha))$ darstellen.

Der Sinus und der Cosinus wurden bisher nur für $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ definiert. Um für den Punkt $(x; y) = (-\cos(180^\circ - \alpha); \sin(180^\circ - \alpha))$ für $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ eine einfache Beschreibung aufrecht zu erhalten, sind die Mathematiker auf die Idee gekommen, folgendes für $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ zu definieren:

$$\sin(\alpha) := \sin(180^\circ - \alpha) \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) := -\cos(180^\circ - \alpha)$$

Dies ist eine sinnvolle Definition, denn für $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ gilt $0^\circ \leq 180^\circ - \alpha < 90^\circ$, also sind die Ausdrücke auf der rechten Seite bereits definiert. Für $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ gilt dann mit der neuen Definition auch:

$$(x; y) = (-\cos(180^\circ - \alpha); \sin(180^\circ - \alpha)) = (\cos(\alpha); \sin(\alpha))$$

Analog definiert man für $180^\circ < \alpha \leq 270^\circ$

$$\sin(\alpha) := -\sin(270^\circ - \alpha) \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) := -\cos(270^\circ - \alpha)$$

und für $270^\circ < \alpha \leq 360^\circ$

$$\sin(\alpha) := -\sin(360^\circ - \alpha) \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) := \cos(360^\circ - \alpha)$$

Mit dieser Erweiterung der Definition von $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ auf Werte von α mit $90^\circ < \alpha \leq 360^\circ$ kann man eine einfache Beschreibung geben. Ein Punkt C_α zum Winkel α ($0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$) hat

immer die Koordinaten

$$C_\alpha = (\cos(\alpha); \sin(\alpha)).$$

Der Cosinus entspricht der x - Koordinate, der Sinus der y - Koordinate des Punktes.

Wir haben Sinus und Cosinus nun für alle Winkel am Einheitskreis $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ definiert. Einen Punkt C_α auf dem Einheitskreis kann man auch für $\alpha > 360^\circ$ (mehr als eine volle Drehung) oder auch für $\alpha < 0$ (Drehung im Uhrzeigersinn) angeben. Für diese Winkel definiert man:

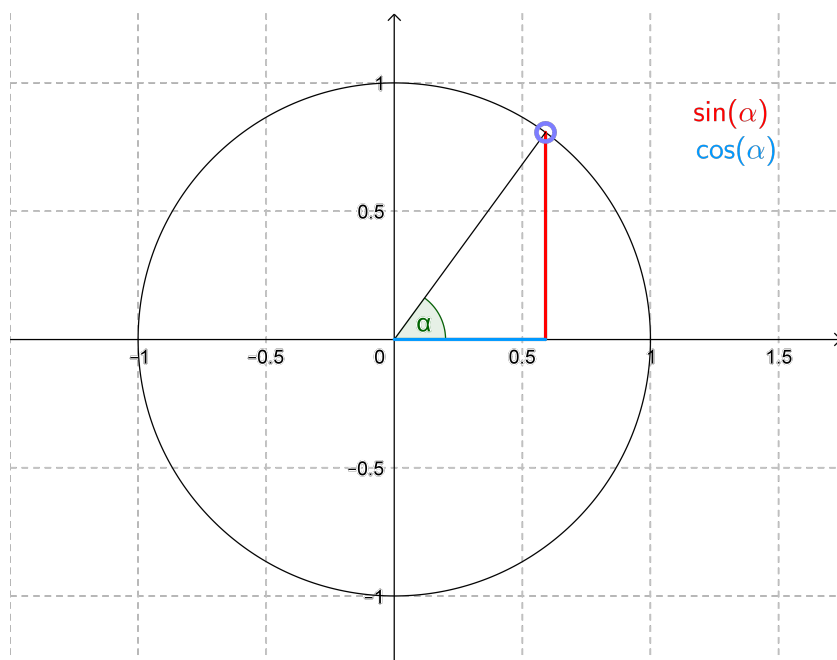
$$\cos(\alpha) := x\text{-Koordinate von } C_\alpha$$

$$\sin(\alpha) := y\text{-Koordinate von } C_\alpha$$

Somit ist klar, dass sich der Wert von Sinus und Cosinus periodisch unverändert bleibt, wenn man 360° zu einem Winkel addiert. Es gilt für alle Winkel α :

$$\sin(\alpha + 360^\circ) = \sin(\alpha) \quad \text{und} \quad \cos(\alpha + 360^\circ) = \cos(\alpha)$$

Sinus und Cosinus am Einheitskreis:



Interaktion 1 (nur in digitaler Version)

Insgesamt ergeben sich die in der nächsten Abbildung dargestellten Funktionsverläufe.

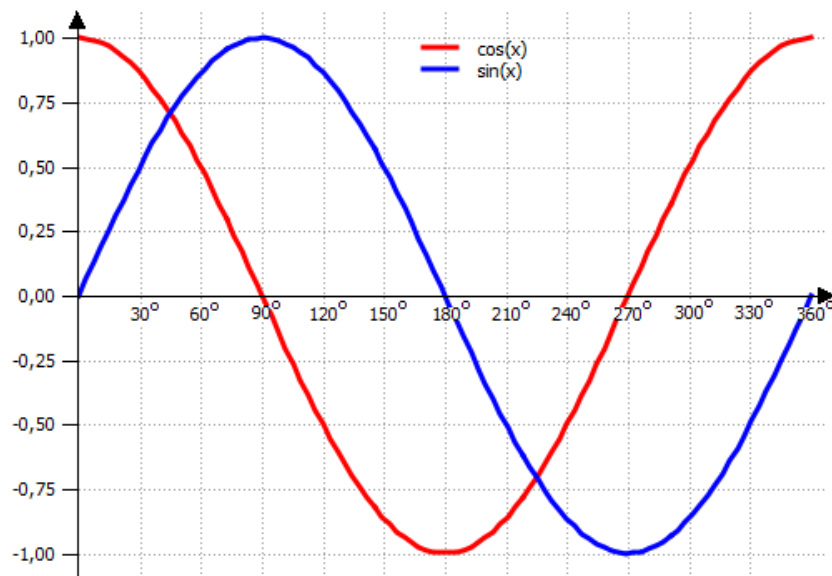


Bild 8 Graphen der Sinus - und Cosinusfunktion

Die beiden Kurvenverläufe zeigen anschaulich, dass beide Funktionen Werte aus dem Intervall $[-1; 1]$ annehmen, was auch aus der Definition folgt.

Info 1:

Es gilt für beliebige Winkel α und $k \in \mathbb{Z}$:

$$\sin(\alpha) = \sin(\alpha + k \cdot 360^\circ),$$

$$\cos(\alpha) = \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ).$$

Die Sinus- und die Cosinusfunktion sind somit beide periodisch mit Periode 360° .

Bisher wurde also festgestellt, dass die Sinus - und die Cosinusfunktion periodisch sind. Im Folgenden wird untersucht, ob es bei diesen Funktionen noch weitere Zusammenhänge gibt.

Aufgabe 1:

Untersuchen Sie den Verlauf der Sinus - und Cosinusfunktion. Versuchen Sie Ihre Vermutungen allgemein in der folgenden Tabelle oder einer selbst aufgestellten Tabelle festzuhalten und gehen Sie dabei wie folgt vor:

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$			x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$-\alpha$							
$90^\circ + \alpha$					$90^\circ - \alpha$		
$180^\circ + \alpha$					$180^\circ - \alpha$		
$270^\circ + \alpha$					$270^\circ - \alpha$		
$360^\circ + \alpha$					$360^\circ - \alpha$		

1. Zeile der Tabelle: Untersuchung auf Symmetrie.
2. und 4. Zeile der Tabelle: Drücken Sie den Sinus durch den Cosinus und den Cosinus durch den Sinus aus.
3. Zeile der Tabelle: Stellen Sie die Terme $\sin(180^\circ \pm \alpha)$ und $\cos(180^\circ \pm \alpha)$ durch $\sin(\alpha)$ bzw. $\cos(\alpha)$ dar.
5. Zeile der Tabelle: Untersuchung auf Periodizität.

Lösung:

Untersucht man die beiden Kurvenverläufe, so kann man feststellen, dass die Sinusfunktion punktsymmetrisch zum Ursprung und die Cosinusfunktion achsensymmetrisch zur y -Achse sind. Außerdem sind die Sinus- und die Cosinusfunktion um 90° zueinander verschoben und beide Funktionen sind periodisch. Die Tabelle lässt sich wie folgt ausfüllen:

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$			x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$-\alpha$	$-\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$					
$90^\circ + \alpha$	$\cos(\alpha)$	$-\sin(\alpha)$			$90^\circ - \alpha$	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$
$180^\circ + \alpha$	$-\sin(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$			$180^\circ - \alpha$	$\sin(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$
$270^\circ + \alpha$	$-\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$			$270^\circ - \alpha$	$-\cos(\alpha)$	$-\sin(\alpha)$
$360^\circ + \alpha$	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$			$360^\circ - \alpha$	$-\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$

Inhalte mit Erklärungen

In diesem Kapitel werden einige Themen aus dem Kapitel „Trigonometrie am Einheitskreis“ der Lerneinheit *Trigonometrie* wiederholt.

Wie in Lerneinheit *Trigonometrie* ausführlicher erläutert wird, existieren spezielle Bezeichnungen für die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks:

Im rechtwinkligen Dreieck wird die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber liegt, als Hypotenuse bezeichnet. Die Seiten, die am rechten Winkel anliegen, heißen Katheten. Dabei liegt die Ankathete am Winkel α an und die Gegenkathete liegt dem Winkel α gegenüber.

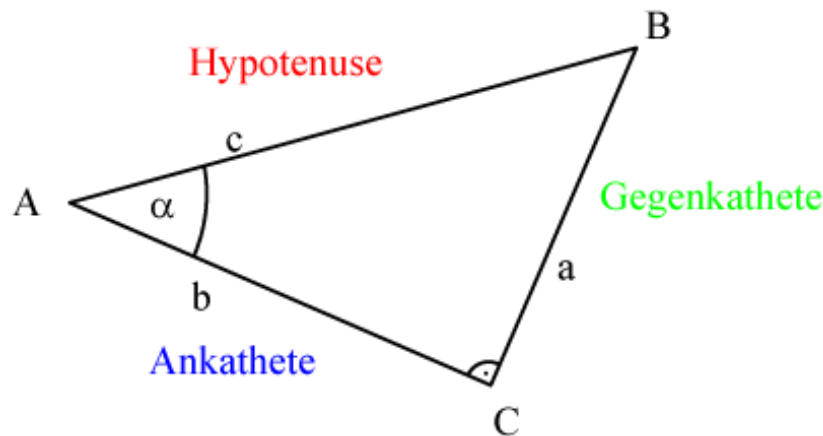


Bild 9

Sinus, Cosinus und Tangens werden mit diesen Bezeichnungen wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) &= \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \\ \cos(\alpha) &= \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \\ \tan(\alpha) &= \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Bezeichnungen kann man nun Funktionen definieren. Besonders anschaulich ist es, wenn man die trigonometrischen Funktionen Sinus, Cosinus und Tangens anhand des Einheitskreises analysiert. Der Einheitskreis ist ein Kreis mit dem Radius $r = 1$.

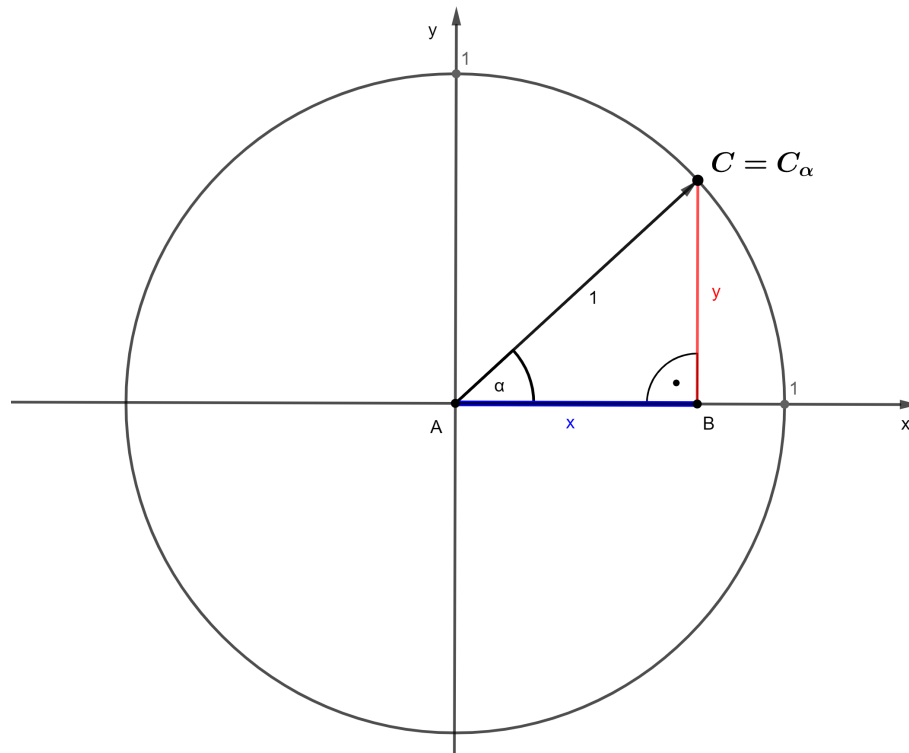


Bild 10 Cosinus und Sinus am Einheitskreis

Zunächst werden nur Winkel α zwischen 0° und 90° betrachtet. Der Punkt C aus der Abbildung hat die Koordinaten $C = (x; y)$. In dem abgebildeten rechtwinkligen Dreieck entspricht die Hypotenuse dem Radius des Einheitskreises und hat damit die Länge $r = 1$. Die Länge der Gegenkathete entspricht der y -Koordinate des Punktes C ; analog entspricht die Länge der Ankathete der x -Koordinate. Daher gilt:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{y}{1} = y$$

und

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{x}{1} = x$$

Da die Koordinaten des Punktes C mithilfe von α ausgedrückt werden können, wird C auch mit C_α bezeichnet.

Bisher wurden nur Winkel $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ betrachtet. Dafür gilt, dass die Koordinaten von C_α gegeben sind durch

$$C_\alpha = (\cos(\alpha); \sin(\alpha)).$$

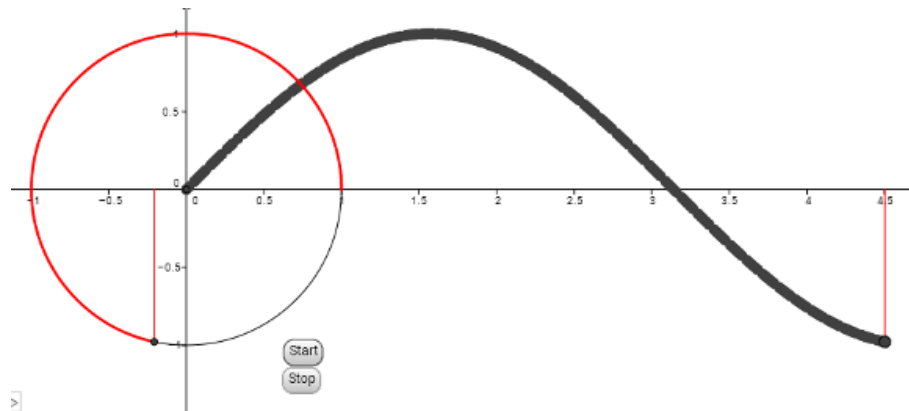
Man definiert nun den Sinus und Cosinus für beliebige Winkel α :

Definition 1:

Für beliebige Winkel α versteht man unter $\sin(\alpha)$ den Wert der y -Koordinate des Punktes C_α am Einheitskreis und unter $\cos(\alpha)$ den Wert der x -Koordinate des Punktes C_α am Einheitskreis.

Bemerkung:

Den Punkt C_α kann man auch für $\alpha > 360^\circ$ und $\alpha < 0$ (Drehung im mathematisch negativen Sinn, also im Uhrzeigersinn) konstruieren.



Interaktion 2 (nur in digitaler Version)

Alle Werte von $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ können auf die Werte im Intervall $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ zurückgeführt werden. Aufgrund geometrischer "Überlegungen" gilt:

α	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$
$90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$	$\sin(180^\circ - \alpha)$	$-\cos(180^\circ - \alpha)$
$180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$	$-\sin(-180^\circ + \alpha)$	$-\cos(-180^\circ + \alpha)$
$270^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$	$-\sin(360^\circ - \alpha)$	$\cos(360^\circ - \alpha)$
$-90^\circ \leq \alpha \leq 0^\circ$	$-\sin(-\alpha)$	$\cos(-\alpha)$
$-180^\circ \leq \alpha \leq -90^\circ$	$-\sin(180^\circ + \alpha)$	$-\cos(180^\circ + \alpha)$
$-270^\circ \leq \alpha \leq -180^\circ$	$\sin(-180^\circ - \alpha)$	$-\cos(-180^\circ - \alpha)$
$-360^\circ \leq \alpha \leq -270^\circ$	$\sin(360^\circ + \alpha)$	$\cos(360^\circ + \alpha)$

Es gilt allgemein:

Satz 1:

Die Sinus- und die Cosinusfunktion sind beide periodisch mit Periode 360° . Es gilt für beliebige Winkel α und $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) &= \sin(\alpha + k \cdot 360^\circ), \\ \cos(\alpha) &= \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ).\end{aligned}$$

Dies folgt unmittelbar aus der geometrischen Definition.

weitere Veranschaulichung (Aufklapptext)

Die Sinus- und Cosinuswerte sind am Einheitskreis als Koordinaten eines Punktes C_α in Abhängigkeit des Winkels α definiert. Wird der Winkel α , zu dem der Sinus- und Cosinuswert bestimmt werden soll, um weitere 360° gedreht, so verändert der Punkt C_α seine Lage auf dem Einheitskreis nicht. Dies gilt auch bei der Drehung des Winkels α um ganzzahlige

Vielfache von 360° . Wird der Punkt um 360° in mathematisch negativer Richtung gedreht, so ver"andert sich der Sinus - und Cosinuswert ebenfalls nicht!

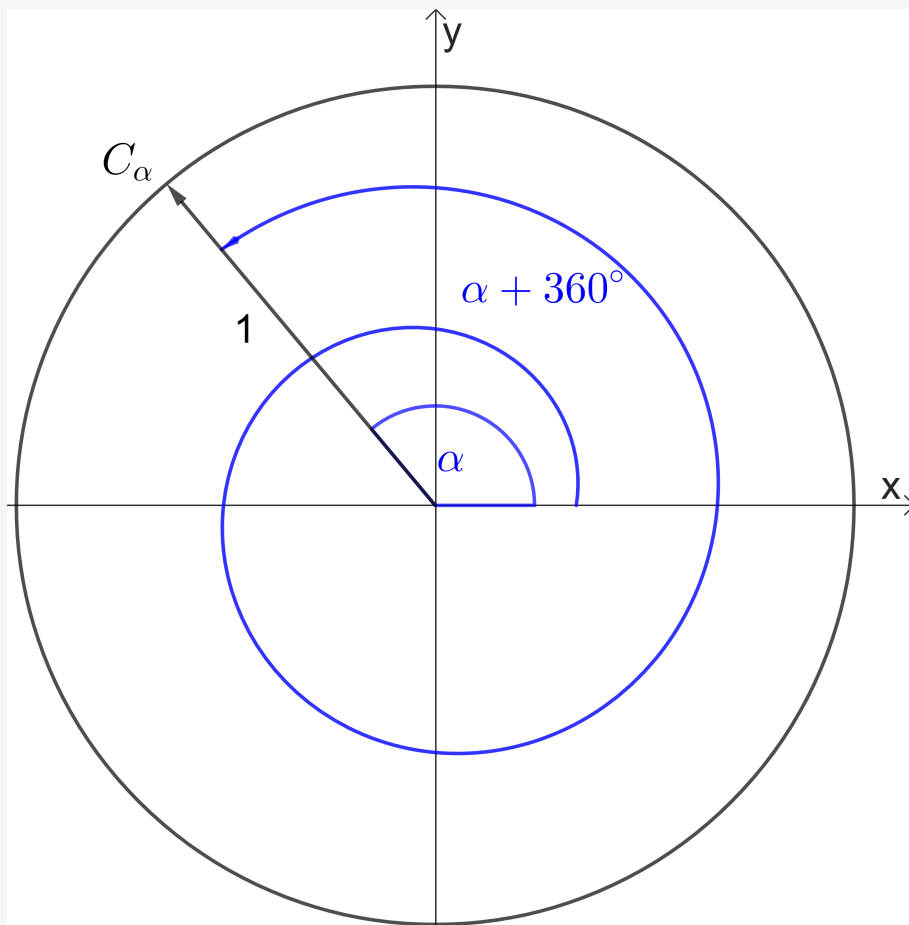


Bild 11 Periodizität der Sinus - und Cosinusfunktion

Es gilt somit für $k \in \mathbb{Z}$ und $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \sin(\alpha + 360^\circ) \\ &= \sin(\alpha + 2 \cdot 360^\circ) \\ &= \sin(\alpha + 3 \cdot 360^\circ) \\ &= \dots \\ &= \sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \cos(\alpha + 360^\circ) \\ &= \cos(\alpha + 2 \cdot 360^\circ) \\ &= \cos(\alpha + 3 \cdot 360^\circ) \\ &= \dots \\ &= \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ). \end{aligned}$$

Sinus- und Cosinusfunktionen im Bogenma"ss

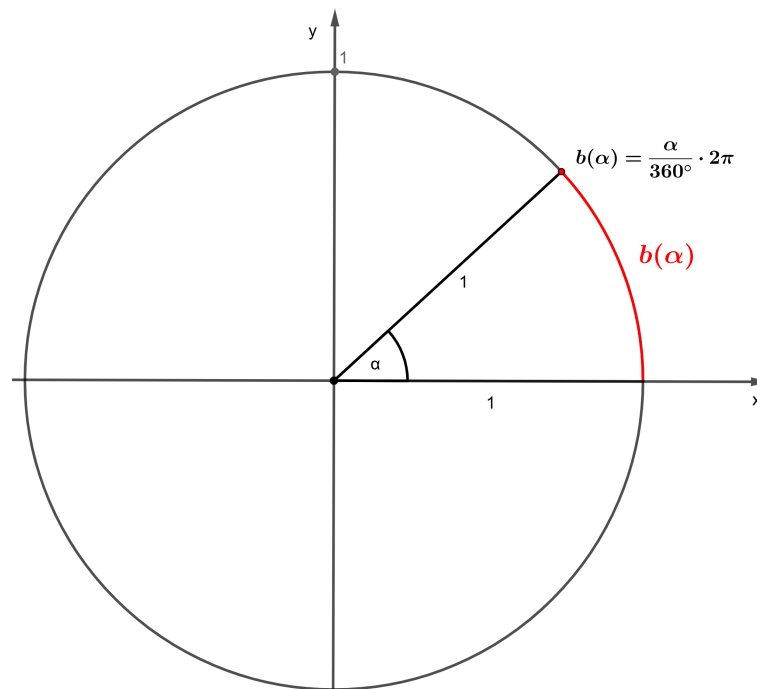


Bild 12 $b(\alpha)$ = Bogenl"ange zu α am Einheitskreis

In der Lerneinheit *Trigonometrie* wird erkl"art, dass man einen Winkel auch im Bogenma"ss angeben kann, d. h. α eindeutig durch die Bogenl"ange $b(\alpha)$ angegeben werden kann, wobei $b(\alpha)$ f"ur negative α auch negativ zu nehmen ist und z.B. $b(360^\circ + 30^\circ) = 2\pi + b(30^\circ)$. Es gilt folgende Umrechnung:

$$b(\alpha) = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi$$

und f"ur die Umkehrung:

$$\alpha(b) = \frac{b}{\pi} \cdot 180^\circ$$

Typische Winkel im Grad - und Bogenma"ss (*Aufklapptext*)

Die nachfolgende Tabelle stellt die typischen Winkel im Grad- und Bogenma"ss gegen"uber.

Gradma"ss	-90°	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°	720°
Bogenma"ss	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2} \cdot \pi$	$2 \cdot \pi$	$4 \cdot \pi$

Sinus- und Cosinusfunktionen im Bogenma"ss

Man definiert den Sinus und den Cosinus im Bogenma"ss, indem man die bekannten Funktionen *sin* und *cos* benutzt und das Bogenma"ss zuvor in das Gradma"ss umrechnet. Um das mathematisch korrekt zu machen, gibt man den neuen Funktionen f"ur das Bogenma"ss zun"achst einen anderen Namen, hier werden nun Gro"buchstaben am Anfang genutzt:

Definition 2:

Für Winkel $x \in \mathbb{R}$ im Bogenmaß wird definiert:

$$\begin{aligned}\text{Sin}(x) &:= \sin\left(\frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ\right), \\ \text{Cos}(x) &:= \cos\left(\frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ\right).\end{aligned}$$

Bemerkung

- Die Funktionen Sinus und Cosinus unterscheiden sich von $\sin$ und $\cos$, denn die Variablen haben andere Bedeutungen. Da aber normalerweise klar ist, ob man das Gradmaß oder das Bogenmaß verwendet, werden im Folgenden auch Sinus und Cosinus mit Kleinbuchstaben geschrieben.

Satz 2: (Periodizität von Sinus- und Cosinusfunktionen im Bogenmaß)

Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\begin{aligned}\sin(x) &= \sin(x + k \cdot 2\pi), \\ \cos(x) &= \cos(x + k \cdot 2\pi).\end{aligned}$$

Die Periodenlänge beträgt 2π .

Bemerkung:

Diese Aussage entspricht dem weiter oben angegebenen Satz zur Periodizität von Sinus und Cosinus im Gradmaß, da 2π genau 360° entsprechen.

Satz 3:

Die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus besitzen die folgenden Nullstellen:

$$\begin{aligned}\text{Sinusfunktion:} \quad & x = k \cdot \pi, \\ \text{Cosinusfunktion:} \quad & x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \\ & \text{für jedes } k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Im Gradmaß sind das die folgenden Nullstellen:

$$\begin{aligned}\text{Sinusfunktion:} \quad & x = k \cdot 180^\circ, \\ \text{Cosinusfunktion:} \quad & x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ. \\ & \text{für jedes } k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Begründung (Aufklapptext)

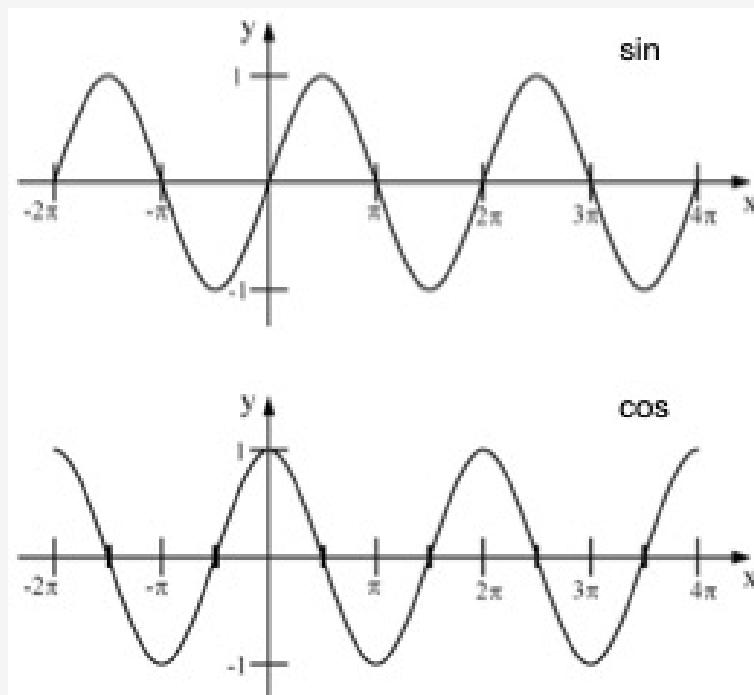


Bild 13 Nullstellen der Sinusfunktion (oben) und der Cosinusfunktion (unten)

Aus der geometrischen Definition der Funktionen am Einheitskreis ergibt sich, dass der Sinus im halboffenen Intervall $[0; 2\pi)$ an den Stellen 0 und π Nullstellen hat. Durch die 2π -Periodizität gibt es dann auch Nullstellen bei 2π und 3π und weiter bei 4π und 5π und so weiter. Weitere Nullstellen bekommt man, indem man jeweils um 2π nach links geht. All diese Nullstellen lassen sich zusammenfassend schreiben als:

$$\text{Nullstellen Sinus: } x = k \cdot \pi \text{ für } k \in \mathbb{Z}.$$

Das Bogenmaß von π entspricht im Gradmaß 180° , also sind die Nullstellen im Gradmaß:

$$\alpha = k \cdot 180^\circ.$$

Ebenso ergibt sich aus der geometrischen Definition der Funktionen am Einheitskreis, dass der Cosinus im halboffenen Intervall $[0; 2\pi)$ an den Stellen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ Nullstellen hat. Durch die 2π -Periodizität gibt es dann auch Nullstellen bei $\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2} + 2\pi = \frac{7\pi}{2}$ und weiter bei $\frac{\pi}{2} + 4\pi = \frac{9\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2} + 4\pi = \frac{11\pi}{2}$ und so weiter. Weitere Nullstellen bekommt man, indem man jeweils um 2π nach links geht. Das lässt sich so zusammenfassen:

$$\text{Nullstellen Cosinus: } x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \text{ für } k \in \mathbb{Z}.$$

Im Gradmaß sind die Nullstellen der Cosinusfunktion:

$$\alpha = 90^\circ + k \cdot 180^\circ.$$

Satz 4:

Die Sinusfunktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung, es gilt:

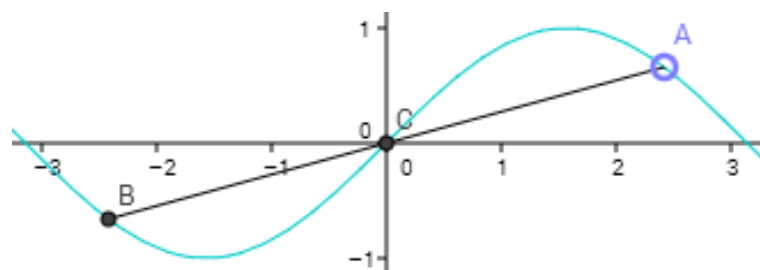
$$\sin(-x) = -\sin(x).$$

Die Cosinusfunktion ist achsensymmetrisch zur y -Achse, es gilt:

$$\cos(-x) = \cos(x).$$

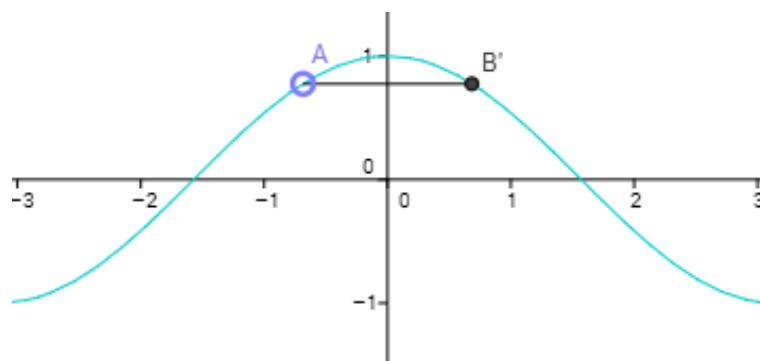
Anschauliche Begründungen:

Punktsymmetrie der Sinusfunktion:



Interaktion 3 (nur in digitaler Version)

Achsensymmetrie der Cosinusfunktion:



Interaktion 4 (nur in digitaler Version)

Die folgenden Abbildungen stellen diesen Zusammenhang noch einmal grafisch dar. Der Graph der Sinusfunktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung $O = (0; 0)$.

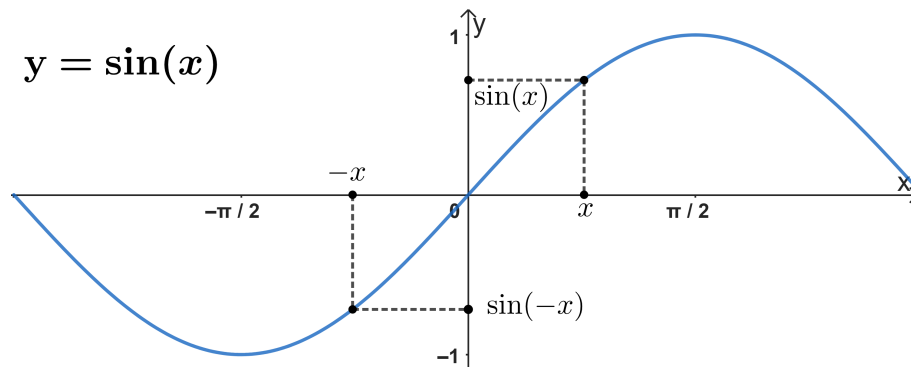


Bild 14 Symmetrie bei der Sinusfunktion

Es gilt also:

$$\sin(x) = -\sin(-x).$$

Der Graph der Cosinusfunktion ist achsensymmetrisch zur y -Achse.

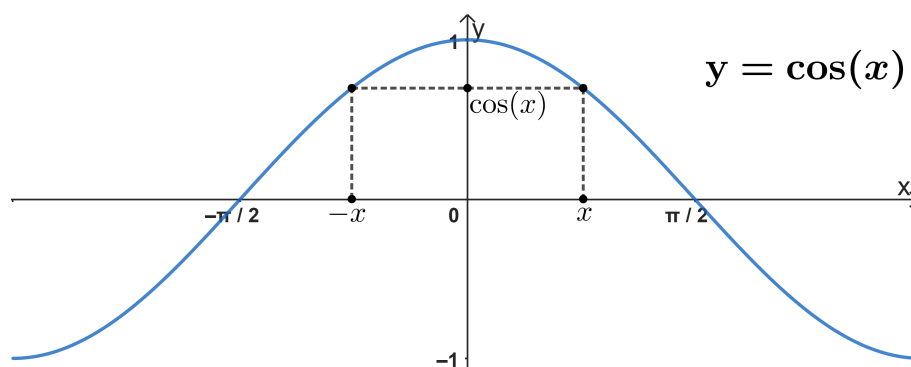


Bild 15 Symmetrie bei der Cosinusfunktion

Es gilt also:

$$\cos(x) = \cos(-x).$$

Info 2:

Es bestehen folgende Zusammenhänge zwischen Sinus und Cosinus:

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$		x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\frac{\pi}{2} + x$	$\cos(\alpha)$	$-\sin(\alpha)$		$\frac{\pi}{2} - x$	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$
$\pi + x$	$-\sin(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$		$\pi - x$	$\sin(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$
$\frac{3}{2}\pi + x$	$-\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$		$\frac{3}{2}\pi - x$	$-\cos(\alpha)$	$-\sin(\alpha)$
$2\pi + x$	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$		$2\pi - x$	$-\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$

Die Tangensfunktion

Der Tangens wird an rechtwinkligen Dreiecken ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) als Quotient aus Gegenkathete und Ankathete definiert:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Man kann diesen Bruch erweitern und erhält dabei den Quotienten aus Sinus und Cosinus:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}}{\frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Es liegt daher nahe ganz allgemein die Tangensfunktion als Quotient aus der Sinus- und der Cosinusfunktion definieren. Beachten muss man dabei, dass der Nenner nie den Wert Null annehmen darf, sodass die Nullstellen der Cosinusfunktion aus dem Definitionsbereich der Tangensfunktion ausgeschlossen werden müssen:

Definition 3:

Die Tangensfunktion $f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Da Sinus- und Cosinusfunktion 2π -periodisch sind, ist die Tangensfunktion auch 2π -periodisch. Tatsächlich ist die Periode der Tangensfunktion aber noch kleiner, nämlich π . Das lässt sich an folgender Rechnung sehen, für die du die Werte aus der Tabelle in Info 2 nutzen kannst:

$$\begin{aligned} \tan(x + \pi) &= \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} \\ &= \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} \\ &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ &= \tan(x). \end{aligned}$$

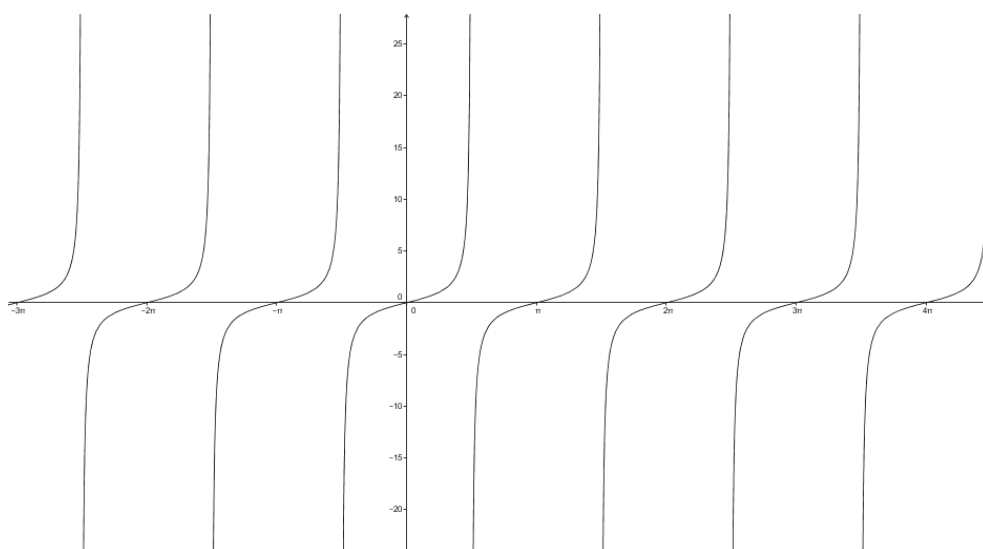


Bild 16 Der Graph der Tangensfunktion

Trigonometrische Funktionen mit Parametern

Definition 4:

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto a \cdot \sin(b(x + c)) + d$$

bezeichnen wir als **allgemeine Sinusfunktion**.

Info 3: (Amplitude)

Es wird die Funktion

$$g(x) = a \cdot \sin(x)$$

für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ betrachtet. Hierbei nennt man a die Amplitude.

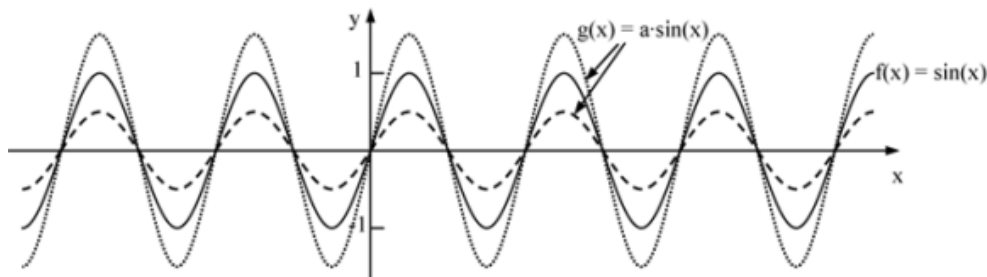


Bild 17

Die Funktion $g(x)$ entsteht aus der Funktion $f(x) = \sin(x)$ durch Multiplikation mit einem Faktor $a \in \mathbb{R}$. Sie hat dieselben Nullstellen wie $\sin(x)$ und schwankt zwischen den Werten a und $-a$ auf der y -Achse. Der Graph sieht für $a > 0$ so aus:

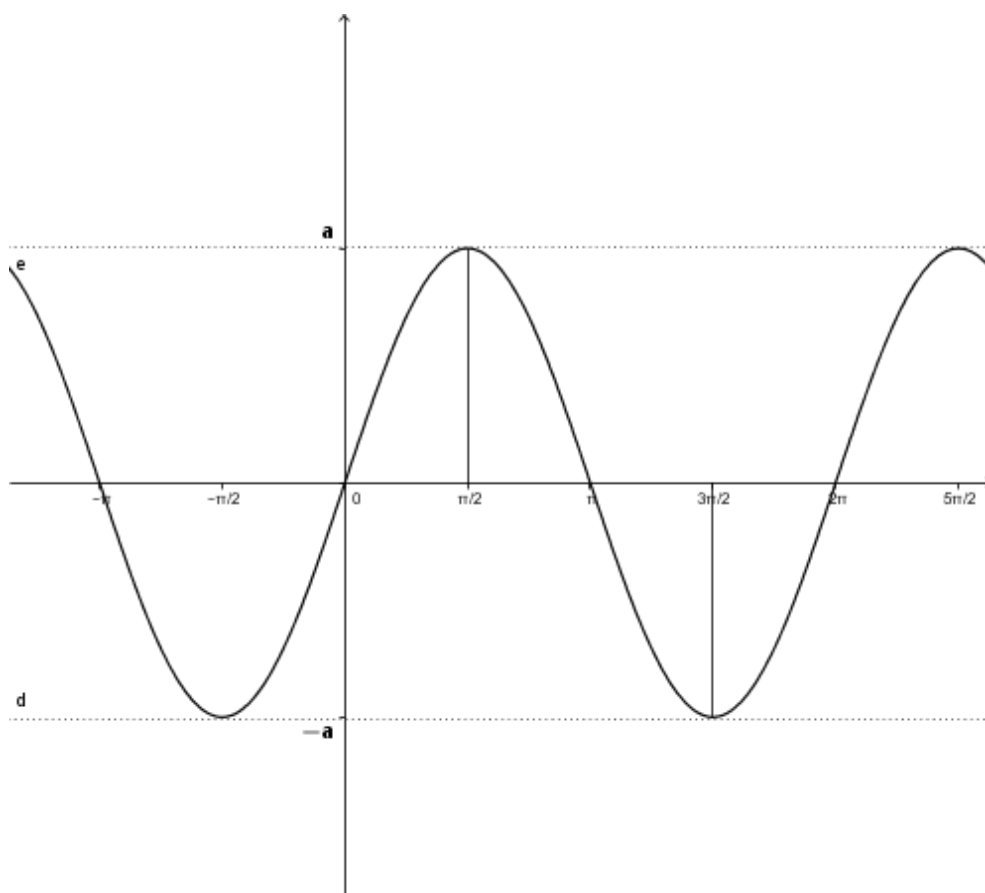


Bild 18 Der Graph der Funktion $a \cdot \sin(x)$ für $a > 0$

Für $a > 1$ wird der Graph von $f(x)$ in y -Richtung gestreckt, und für $0 < a < 1$ wird der Graph von $f(x)$ in y -Richtung gestaucht.

Ist der Parameter a negativ, also $a < 0$, schwankt die Funktion ebenfalls zwischen a (< 0) und

$-a$ (> 0).

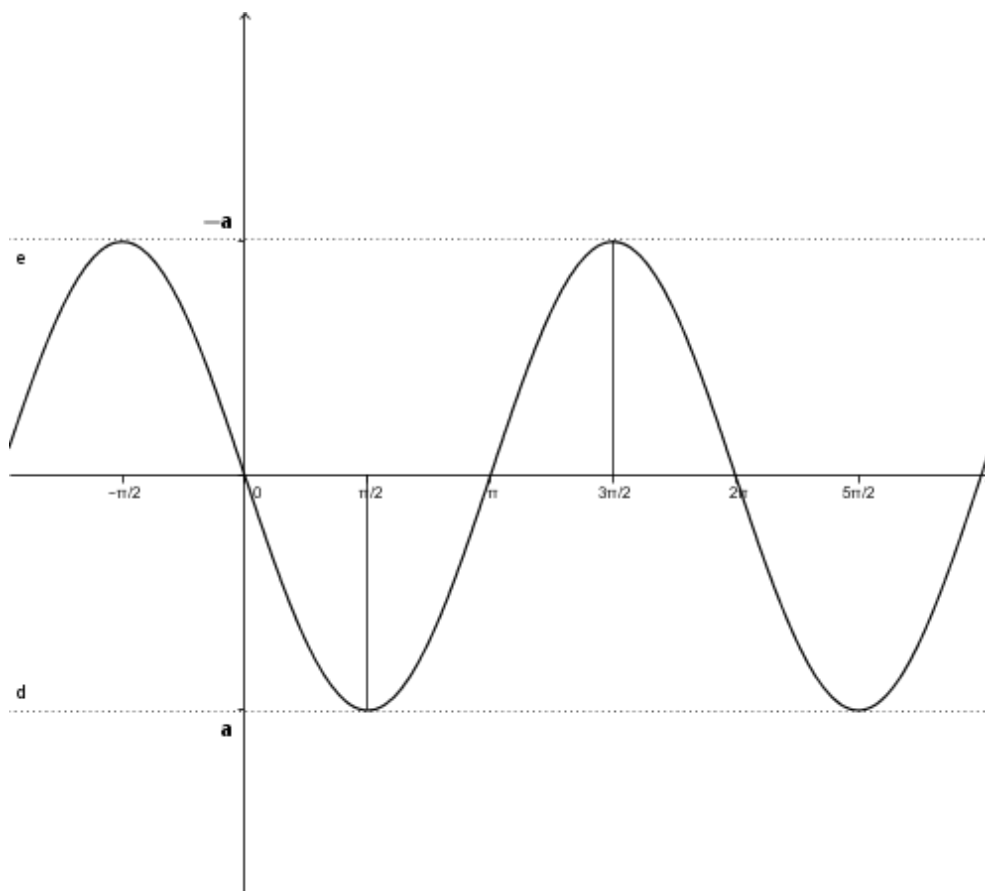


Bild 19 Der Graph der Funktion $a \cdot \sin(x)$ für $a < 0$

Für negative Werte von a wird der Graph (im Vergleich zum entsprechenden positiven Wert von a) entlang der x -Achse gespiegelt.

Analog zu oben wird für $a < -1$ der Graph von $f(x)$ in y -Richtung gestreckt, und für $-1 < a < 0$ in y -Richtung gestaucht.

Info 4: (Periodenlänge)

Die Funktion

$$g(x) = \sin(b \cdot x)$$

für einen Wert $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, entsteht aus der Funktion $f(x) = \sin(x)$, indem das Argument von f mit einem reellen Faktor multipliziert wird. Bei der Betrachtung der Graphen der Funktionen ist zu sehen, dass dies die Periodenlänge der jeweiligen Funktion beeinflusst:

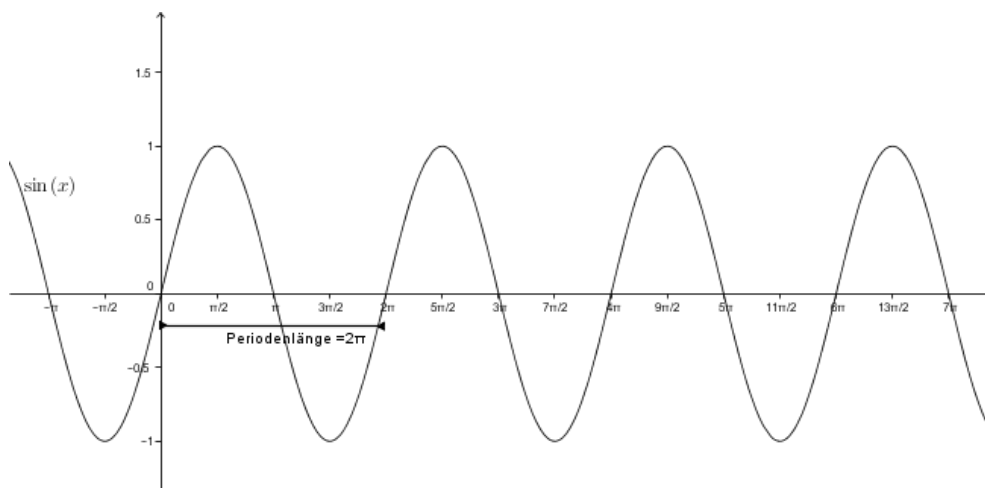


Bild 20 Der Graph der Funktion $\sin(x)$

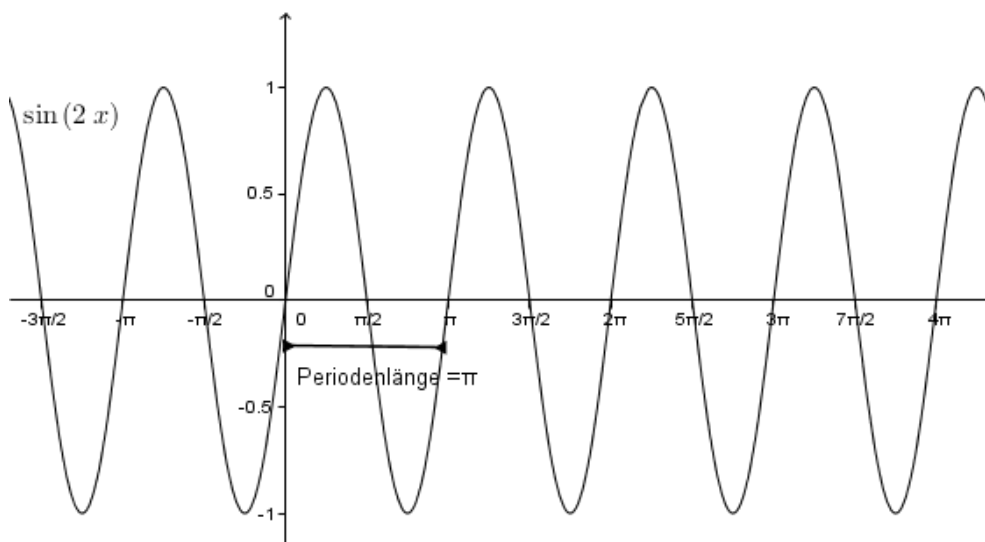


Bild 21 Der Graph der Funktion $\sin(2x)$

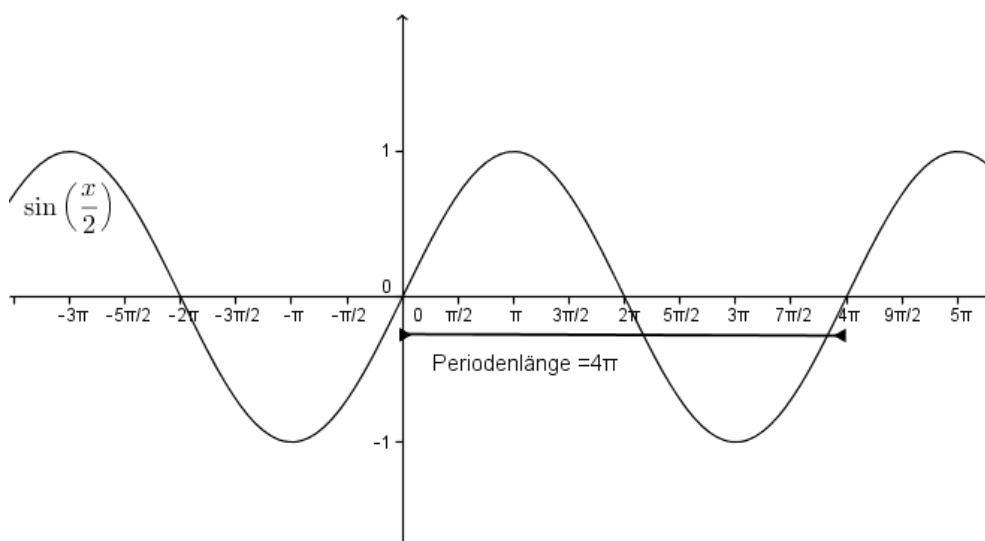


Bild 22 Der Graph der Funktion $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

Für $b > 1$ wird der Graph von $f(x)$ in x -Richtung gestaucht.

Für $0 < b < 1$ wird der Graph von $f(x)$ in x -Richtung gestreckt.

Allgemein gilt für Werte $b > 0$: die Periodenlänge der Funktion $g(x) = \sin(b \cdot x)$ ist $\frac{2\pi}{b}$, also zum Beispiel, wie in den obigen Abbildungen erkennbar: Die Periodenlänge für $b = 2$ beträgt $\frac{2\pi}{2} = \pi$, für $b = \frac{1}{2}$ beträgt sie $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$. Betrachtet man negative Werte für b , wie beispielsweise $b = -2$, so sieht man:

$$\sin(b \cdot x) = \sin(-2x) = -\sin(2x).$$

d.h. die Periodenlänge ist wie bei $\sin(2x)$ auch hier π , aber die Funktion ist an der x -Achse gespiegelt.

Für den oben beschriebenen Sachverhalt gibt es auch eine rechnerische Begründung:

$$\sin(bx) = \sin(bx + 2\pi) = \sin\left(b\left(x + \frac{2\pi}{b}\right)\right)$$

Die Periodenlänge ist also $\frac{2\pi}{b}$, d.h. für $b > 1$ verkleinert sie sich (Stauchung), für $b < 1$ vergrößert sie sich (Streckung).

Info 5: (Phasenverschiebung)

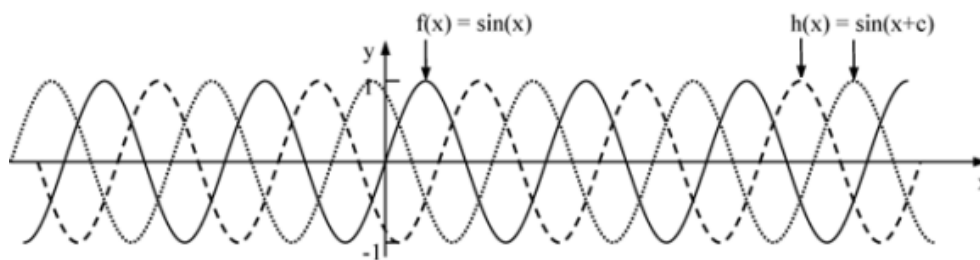


Bild 23

Hier wird die Funktion

$$h(x) = \sin(x + c)$$

für Werte $c \in \mathbb{R}$ betrachtet. Diese Funktion entsteht aus $f(x) = \sin(x)$ durch Verschiebung des Arguments entlang der x -Achse. Für $c > 0$ wird der Graph von $f(x)$ in x -Richtung nach links verschoben.

Für $c < 0$ wird der Graph von $f(x)$ in x -Richtung nach rechts verschoben.

Der Parameter c verschiebt den Graphen in x -Richtung und verändert damit die sogenannte „Phase“ der Sinusschwingung. Auf die Amplitude und Periodenlänge hat dieser Parameter keinen Einfluss.

Beispiel 1:

Am Beispiel $h(x) = \sin(x+2)$ lässt sich erkennen, dass der Graph der Sinusfunktion im Vergleich zu $f(x) = \sin(x)$ um 2 entlang der x -Achse nach links verschoben ist und die Funktion daher für $x = -2$ eine Nullstelle hat.

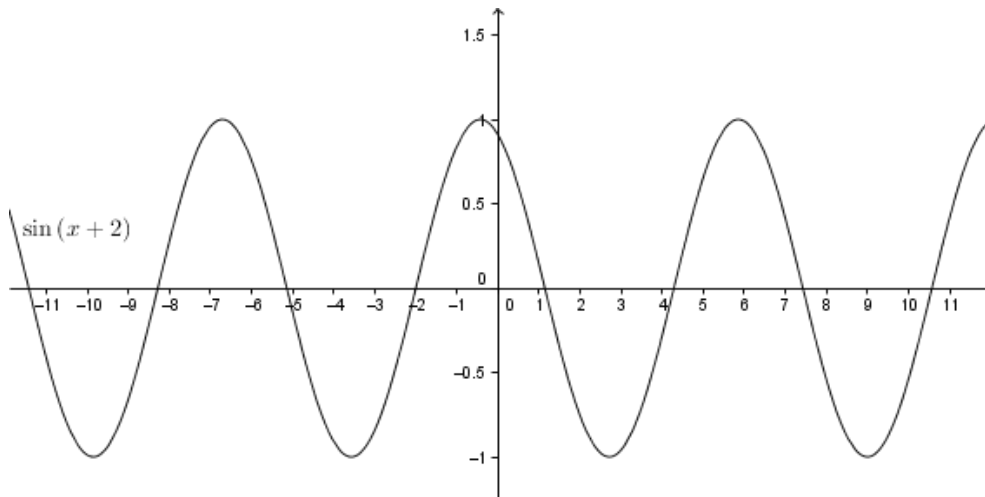


Bild 24 Der Graph der Funktion $\sin(x + 2)$

Info 6: (Verschiebung in y - Richtung)

Hier werden Funktionen der Form

$$g(x) = \sin(x) + d$$

für $d \in \mathbb{R}$ betrachtet. Diese Funktionen entstehen aus der Funktion $f(x) = \sin(x)$ durch Addieren des Parameters d , wodurch der Graph entlang der y -Achse verschoben wird.

Für $d > 0$ wird der Graph von $f(x)$ in y -Richtung nach oben verschoben.

Für $d < 0$ wird der Graph von $f(x)$ in y -Richtung nach unten verschoben.

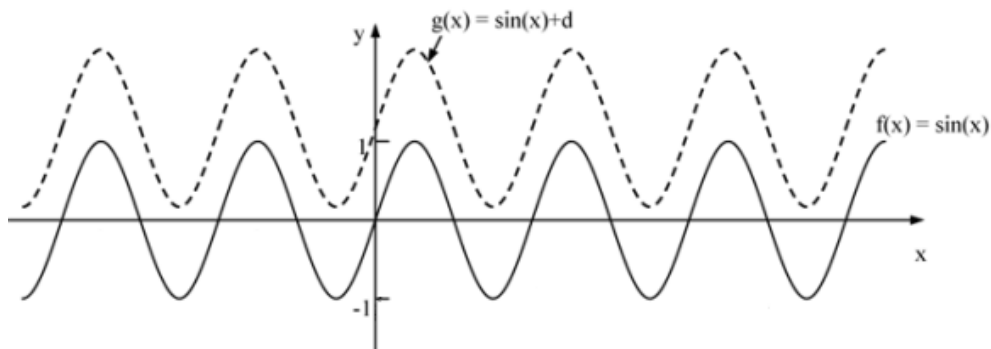


Bild 25 Die Graphen von $\sin(x)$ und $\sin(x) + d$ für $d > 0$

Auf die Amplitude und die Periodenlänge hat dieser Parameter keinen Einfluss.

Beispiel 2:

In der nachfolgenden Abbildung lässt sich anhand der Funktionen $\sin(x)$, $\sin(x) + 2$, $\sin(x) - 2$ erkennen, wie sich der Graph einer Funktion durch die Verschiebung entlang der y -Achse verändert.

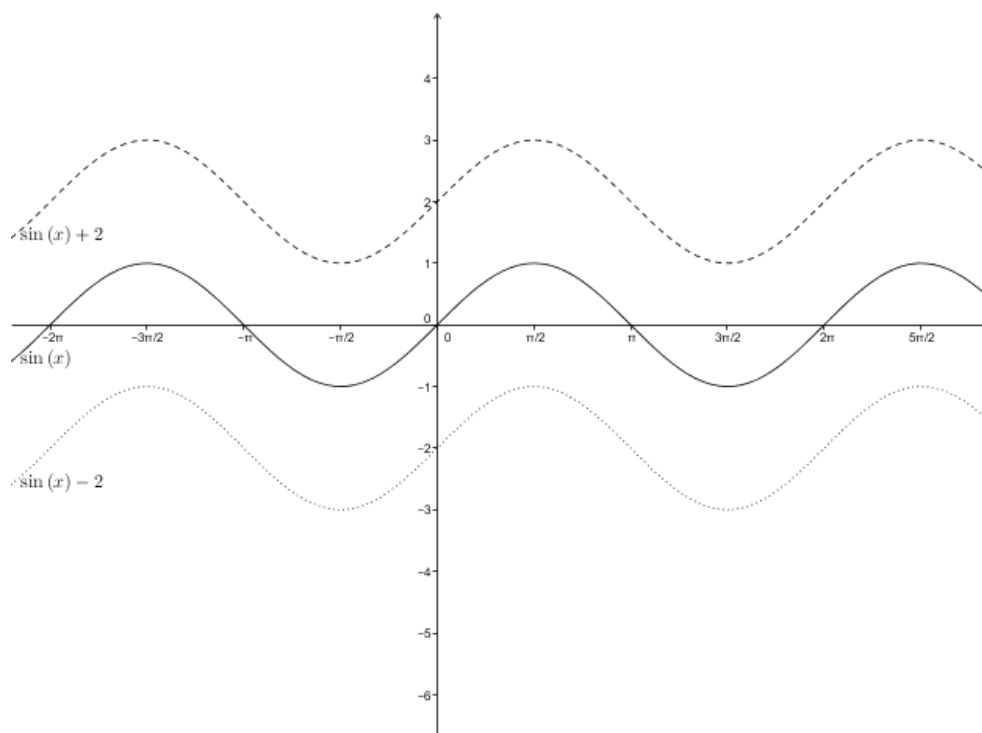


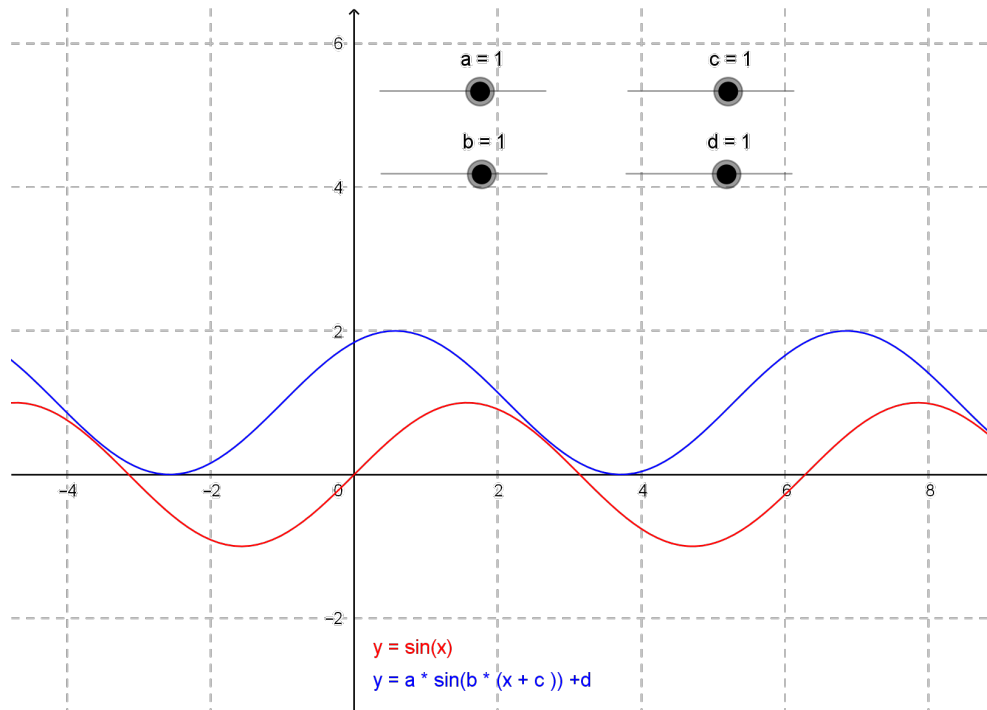
Bild 26 Die Graphen der Funktionen $\sin(x)$, $\sin(x) + 2$, $\sin(x) - 2$

Als Interpretation der allgemeinen Sinusfunktion betrachten wir die folgende Interaktion. Diese Interaktion stellt eine allgemeine Sinusfunktion der Form

$$y = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$$

dar und Sie haben bei dieser Interaktion die Möglichkeit, die Parameter a , b , c und d zu verändern. Die grafische Änderung wird unmittelbar am Graphen angezeigt.

Die allgemeine Sinusfunktion $y = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$ im Vergleich zu $\sin(x)$:



Interaktion 5 (nur in digitaler Version)

Aufgaben

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die folgenden Sinuswerte ohne Taschenrechner, indem Sie die Periodizität und Symmetrie-Eigenschaften der Sinusfunktion benutzen:

$$\sin(143^\circ), \sin(217^\circ), \sin(323^\circ)$$

Hinweis: $\sin(37^\circ) \approx 0,6018$

Lösung:

$$\begin{aligned} \sin(143^\circ) &= \sin(180^\circ - 143^\circ) \\ &= \sin(37^\circ) \approx 0,6018 \\ \sin(217^\circ) &= \sin(180^\circ - 217^\circ) \\ &= \sin(-37^\circ) \\ &= -\sin(37^\circ) \approx -0,6018 \\ \sin(323^\circ) &= \sin(180^\circ - 323^\circ) \\ &= \sin(-143^\circ) \\ &= -\sin(143^\circ) \approx -0,6018 \end{aligned}$$

Aufgabe 3:

Begründen Sie am Einheitskreis: $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$.

Lösung:

Betrachtet man folgende Abbildung, so ist ersichtlich, dass $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$ gilt.

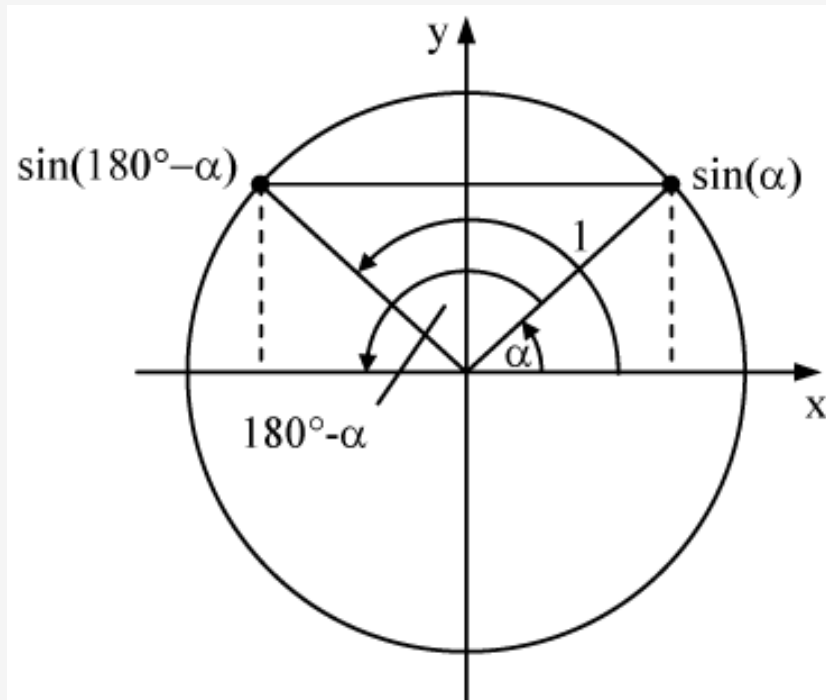


Bild 27 Skizze zur Begründung von $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie ohne Taschenrechner alle möglichen Lösungen für x (im Bogenmaß's) mit $0 \leq x \leq 2\pi$ für diese Gleichungen:

1. $\sin(x) = \frac{1}{2}$
2. $\cos(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$

Lösung:

1. $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$
2. $\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

Aufgabe 5:

Einem Studenten wird die Aufgabe gestellt:

Aufgabe: Berechnen Sie $\sin(-30^\circ)$.

Seine Lösung lautet: $\sin(-30^\circ) = \sin(30^\circ) = 0,5$.

Ist diese Lösung korrekt?

Lösung:

Bei dieser Lösung wurden die Symmetrieeigenschaften der Sinus - und Cosinusfunktion miteinander vertauscht. Hier liegt vielleicht ein Fehler im Grundverständnis von Punkt - und Achsensymmetrie vor.

Die richtige Lösung lautet:

$$\sin(-30^\circ) = -\sin(30^\circ) = -0,5.$$

Aufgabe 6:

Gegeben ist die Funktion $g : \{x \in \mathbb{R} \mid -2\pi \leq x \leq 2\pi\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Gleichung $g(x) = 2,5 \cdot \sin(3 \cdot x) + 0,5$. Zeichnen Sie den Graphen und beschreiben Sie, wie der Graph von $g(x)$ durch Transformation des Graphen der Funktion $f : \{x \in \mathbb{R} \mid -2\pi \leq x \leq 2\pi\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(x)$ erzeugt werden kann.

Lösung:

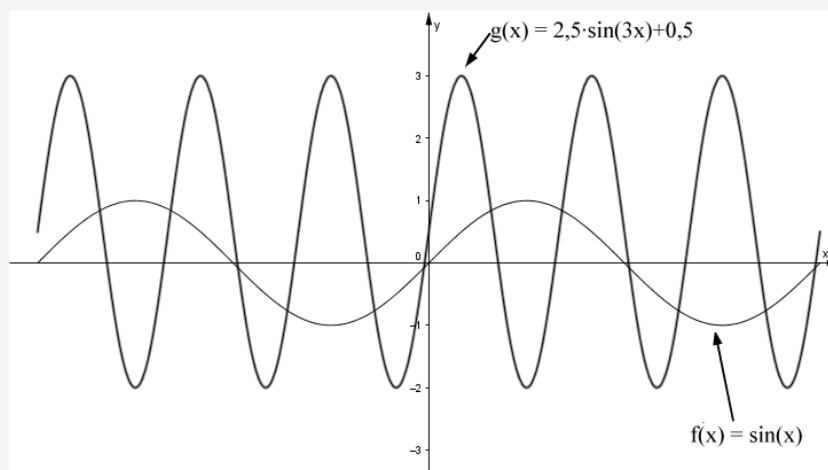


Bild 28 Graphen der Funktion $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = 2,5 \cdot \sin(3 \cdot x) + 0,5$

Der Graph der Funktion $g(x) = 2,5 \cdot \sin(3 \cdot x) + 0,5$ entsteht aus der Sinusfunktion $f(x)$, indem man:

- die Sinusfunktion mit dem Faktor 2,5 in Richtung der y -Achse streckt
- die Sinusfunktion mit dem Faktor 3 in Richtung der x -Achse staucht
- und den so entstandenen Graphen um 0,5 in Richtung der y -Achse verschiebt.

Aufgabe 7:

Geben Sie zu dem dargestellten Graphen die Funktionsgleichung an.

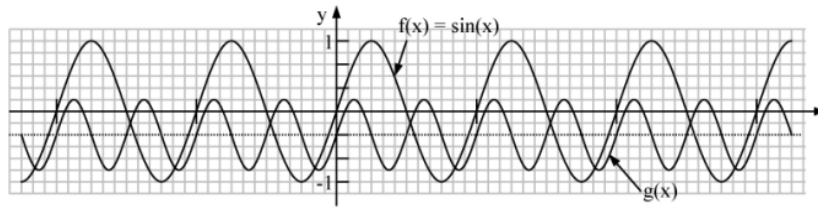


Bild 29 Aus der Sinusfunktion neu entstandener Graph

Lösung:

Im Vergleich zur Funktion $f(x) = \sin(x)$ entstand der neue Graph $g(x)$, indem:

- die Sinusfunktion mit dem Faktor 0,5 in Richtung der y -Achse gestaucht wurde
- die Sinusfunktion mit dem Faktor 2 in Richtung der x -Achse gestaucht wurde (während einer Periode der Funktion $f(x)$ durchläuft die Funktion $g(x)$ zwei Perioden)
- und der so entstandene Graph um $-\frac{1}{3}$ in Richtung der y -Achse verschoben wurde (der Graph der Funktion $g(x)$ wurde um $\frac{1}{3}$ in Richtung der y -Achse nach unten verschoben).

Die Funktionsgleichung des neuen Graphen lautet somit:

$$g(x) = 0,5 \cdot \sin(2 \cdot x) - \frac{1}{3}.$$

Aufgabe 8:

Begründen Sie die Aussage, dass man die Cosinusfunktion durch eine geeignete Sinusfunktion darstellen kann.

Lösung:

Wir betrachten hierzu die in der folgenden Abbildung dargestellte Sinusfunktion. Verschiebt man diese mit dem Parameter c um $\frac{\pi}{2}$ nach links, so erhält man die Cosinusfunktion.

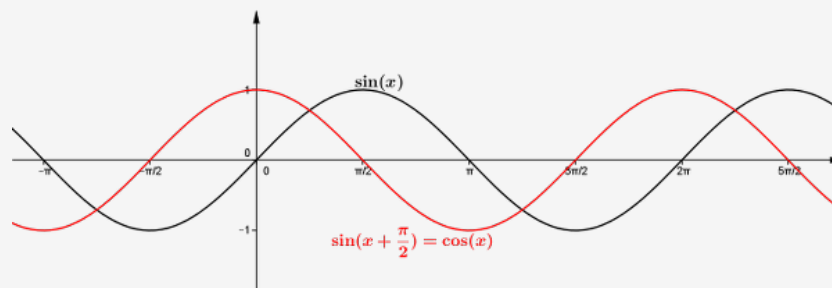


Bild 30 Sinus - und Cosinusfunktion

Aufgabe 9:

Angenommen die Veränderung der Tageslänge eines Jahres lässt sich mit einer Sinusfunktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d$ modellieren.

1. Finden Sie die geeigneten Parameter, wenn Sie von folgenden Voraussetzungen ausgehen:

- Die Periodenlänge ist 365 Tage (1 Jahr)
- Das Maximum der Tageslänge wird am 21.6. (172. Tag) angenommen und beträgt 16,5 Stunden
- Das Minimum der Tageslänge wird am 21.12. (355. Tag) angenommen und beträgt 8 Stunden
- Die durchschnittliche Tageslänge wird am 21.3. (80. Tag) und am 21.9. angenommen

2. Bestimmen Sie mithilfe der oben gefundenen Gleichung die Tageslänge am 10.7. (191. Tag).

Lösung:

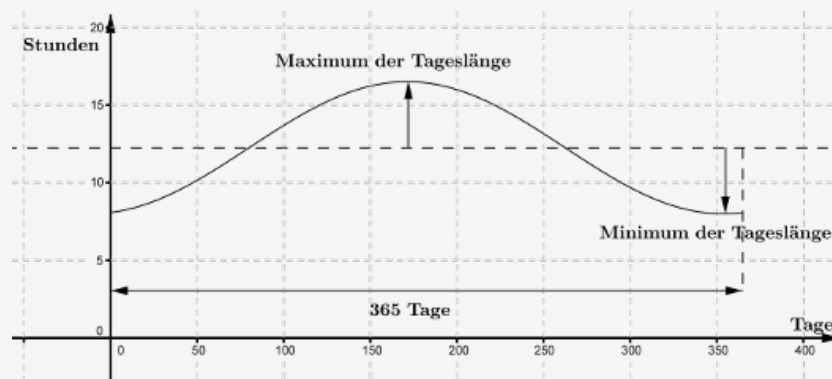


Bild 31 Funktionsgraph der Tageslänge

1. Die Periodenlänge beträgt 365 Tage. Somit folgt für den Parameter b :

$$b = \frac{2\pi}{365}$$

Das Maximum der Tageslänge wird am 21.6. (172. Tag) und das Minimum am 21.12. (355. Tag) angenommen.

Für die Amplitude a muss man die Differenz zwischen Maximum und Minimum nehmen und durch zwei teilen:

$$a = \frac{16,5 - 8}{2} = 4,25.$$

Die Verschiebung der Sinusfunktion in y-Richtung (Parameter d) wird durch die durchschnittliche Tageslänge eines Jahres beschreiben und beträgt somit:

$$d = \frac{16,5 + 8}{2} = 12,25.$$

Diese wird dabei ungefähr am 21.3. (dem 80. Tag) und 21.9. angenommen. Damit ist auch die Phase (Parameter c) festgelegt und wir erhalten insgesamt:

$$f(x) = 4,25 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot (x - 80)\right) + 12,25.$$

2. Der 10. *Juli* ist der 191. Kalendertag. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4,25 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot (191 - 80)\right) + 12,25 \\ &\approx 16,26. \end{aligned}$$

Der 10.7. hat eine Tageslänge von etwa 16 Stunden.

Aufgabe 10:

Einem Studenten wurde folgende Aufgabe gestellt:

Aufgabe: Zeichnen Sie den Graphen der Funktionen $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = \sin(2 \cdot x)$ in ein Koordinatensystem!

Seine Lösung sah folgendermaßen aus:

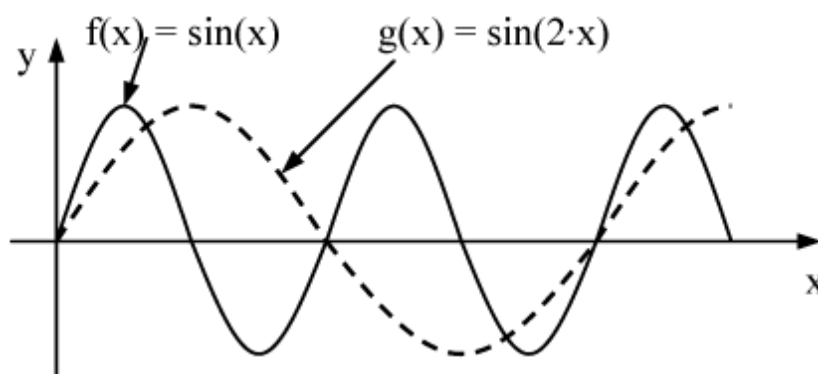


Bild 32 Studentenlösung/Falsche Zeichnung

Was ist an dieser Lösung falsch? Wie muss die korrekte Zeichnung aussehen?

Lösung:

Bei dieser Lösung wurde der Graph $g(x)$ nicht mit dem Faktor 2 gestaucht, sondern mit dem Faktor 2 gestreckt. Möglicherweise liegt hier eine Fehlvorstellung des Parameters b in der allgemeinen Gleichung

$$f(x) = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$$

vor. Die richtige Zeichnung sieht wie folgt aus:

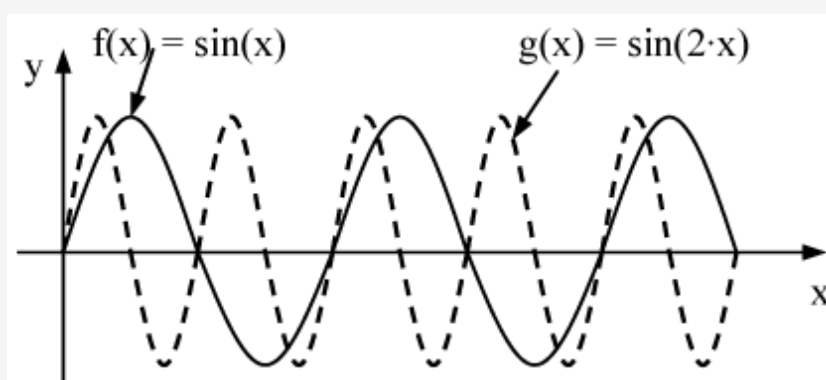


Bild 33 Korrekte Zeichnung

Anwendung

Anwendung finden die Sinus - und Cosinusfunktion z. B. in der Physik oder auch in der Elektrotechnik.

Beispiel 3:

Die folgende Abbildung zeigt einen Versuchsaufbau und den Schwingungsverlauf zum Federpendel.

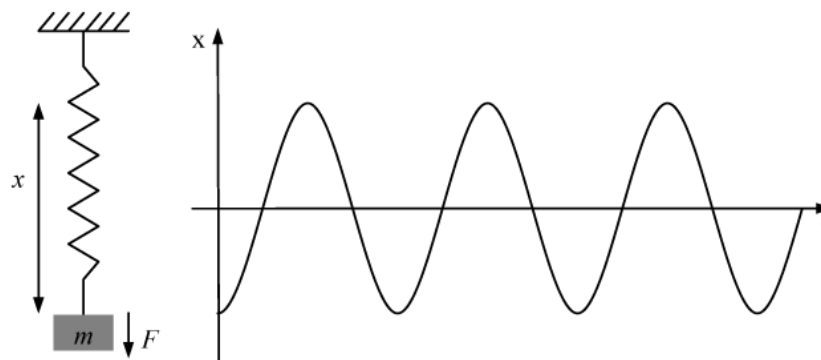


Bild 34 Funktionsverlauf beim ungedämpften Federpendel

Der Versuchsaufbau besteht aus einer Feder, an der die Masse m hängt. Wird die Feder nicht ausgelenkt, so wird der Punkt, an der sich die Masse befindet, als Nullpunkt der Auslenkung x bezeichnet. Die Feder wird nun von Hand um die Strecke x_0 ausgelenkt (die Masse wird nach unten gezogen).

Unter der Annahme, dass das Pendel ungedämpft ist, führt die Masse m nun eine Schwingung aus, die durch folgende Funktion beschrieben werden kann:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t).$$

Hierbei ist x die Auslenkung der Feder, x_0 die Amplitude, ω die Kreisfrequenz (die von den Eigenschaften des Pendels abhängt) und t die Zeit.

Herleitung:

Wird die Feder um x ausgelenkt, so ist hierfür die Kraft $D \cdot x$ nötig (Hookesches Gesetz). Die Feder setzt dieser die Rückstellkraft

$$F = -Dx$$

entgegen. Das Minuszeichen besagt, dass diese Kraft der Kraft $D \cdot x$ entgegen gerichtet ist. Die Kraft F gilt für alle x aus dem Intervall $[-x_0, x_0]$, wobei x_0 die anfängliche Auslenkung war. Beim Loslassen der Masse wirkt also nur noch die Kraft F auf die Masse. Diese Kraft erzeugt eine Beschleunigung a mit

$$a \cdot m = F(x).$$

Offensichtlich ist die Beschleunigung a abhängig von der Auslenkung x der Feder:

$$a = -\frac{D}{m} \cdot x.$$

Im Folgenden werden die aus der Physik bekannten Relationen

$$\begin{aligned} x(t) & \\ v(t) &= x'(t) \\ a(t) &= v'(t) = x''(t) \end{aligned}$$

verwendet.

Mit $a(t) = x''(t)$ können wir nun also schreiben:

$$x''(t) = -\frac{D}{m} \cdot x(t).$$

Um die Bewegung der Masse m zu beschreiben, muss also eine Funktion $x(t)$ gefunden werden, die die obige Gleichung erfüllt. Wir betrachten nun die bereits zu Beginn angegebene Funktion

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t)$$

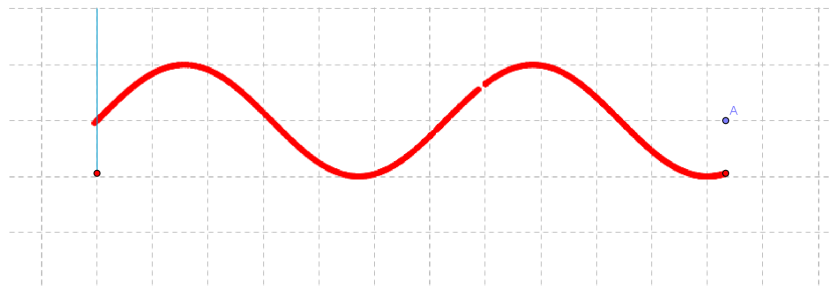
und können nun durch Ableiten verifizieren:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x_0 \omega \cdot \sin(\omega t), \\ x''(t) &= -x_0 \omega^2 \cdot \cos(\omega t). \end{aligned}$$

Die Funktion erfüllt also die obige Gleichung unter der Bedingung, dass

$$\omega^2 = \frac{D}{m}.$$

Es kann außerdem gezeigt werden, dass $x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t)$ die einzige Funktion ist, die die Gleichung $x''(t) = -\frac{D}{m} \cdot x(t)$ erfüllt, und bei der $x(0) = x_0$ ist.



Interaktion 6 (nur in digitaler Version)

Beispiel 4:

Die Wechselspannung ändert ihre Richtung (Polarität) periodisch und hat meist einen sinusförmigen Verlauf, weshalb sie auch „sinusförmige Wechselspannung“ genannt wird. Und in der Tat stimmen die Momentanwerte der Wechselspannung mit denen der Sinusfunktion überein. Die Bevorzugung dieser Spannung in der Technik gegenüber anderen Spannungen liegt zum einen in der einfachen Erzeugung und zum anderen in der verlustarmen Fernübertragung. Obwohl ihr Verlauf relativ kompliziert ist, lässt sich diese Spannung erheblich einfacher herstellen als z. B. eine „Rechteck - Wechselspannung“. Rotiert eine Leiterschleife mit konstanter Geschwindigkeit in einem homogenen Magnetfeld, so durchlaufen beide Seiten der Leiterschleife das Magnetfeld und es wird eine Spannung induziert (elektromagnetische Induktion). Die so entstehende induzierte Spannung beschreibt den Verlauf einer Sinuskurve.

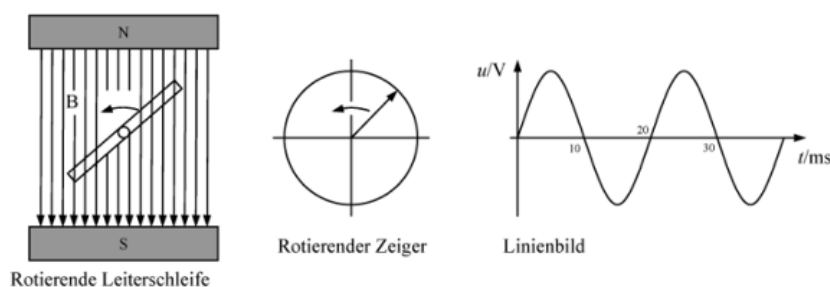


Bild 35 Erzeugung und Darstellung einer Wechselspannung

Die Abbildung stellt diesen Vorgang vereinfacht dar. Dabei ist links die mechanische Anordnung der rotierenden Leiterschleife im Magnetfeld dargestellt. Das Zeigerdiagramm (Mitte) vermittelt in abstrakter Form, dass die induzierte Spannung einem rotierenden Zeiger folgt. "Überträgt" man diese Zeigerbewegung in das rechts dargestellte Liniendiagramm, so erhält man den Verlauf der Spannung: eine Sinusfunktion. Dabei bezeichnet man die Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit (in diesem Fall eine Sekunde) als Frequenz, die in Hertz (Hz) angegeben wird. Wie im Liniendiagramm zu erkennen ist, wiederholt sich der Vorgang in regelmäßigen Zeitabständen. Und so bezeichnet man die Wiederholung gleicher Zustände als Periode. Bei der Wechselspannung ist dies je eine aufeinander folgende positive und negative Halbwelle. Die Länge einer Periode nennt man Periodendauer T . Für die Periodendauer und die Frequenz ergibt sich dabei der folgende Zusammenhang:

$$T = \frac{1}{f}$$

Wie in dem Liniendiagramm zu erkennen ist, beträgt die Länge einer Periode 20 ms.

Stellt man die obige Gleichung nach f um und setzt den Wert für T ein, so ergibt sich eine Frequenz von 50 Hz . Dieser Wert entspricht der in Deutschland üblichen Wechselspannung im Haushalt.

Beispiel 5:

Drehstrom ist der allgemein übliche Name für dreiphasigen Wechselstrom. Man versteht darunter ein System von drei Stromkreisen, deren Spannungen zeitlich um eine dritte Periode verschoben sind.

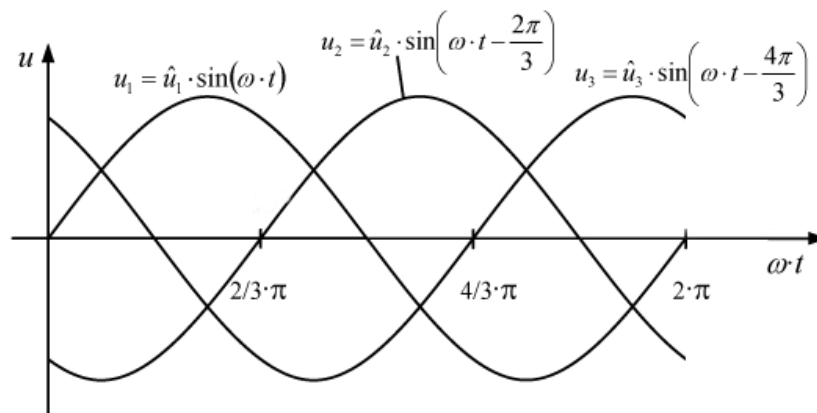


Bild 36 Spannungsverlauf im Dreiphasensystem

Beispiel 6:

Bei der Rundfunkübertragung lassen sich niederfrequente Signale (NF) (z.B. Sprache) über das Medium Luft nicht ausreichend weit übertragen. Um diese Signale dennoch über weite Entfernungen zum Rundfunkhörer übertragen zu können, verwendet man sog. Modulationsverfahren, die im Hochfrequenzbereich arbeiten. Dabei werden die Signalparameter des Trägersignals in Abhängigkeit von dem modulierenden Signal beeinflusst. Eines dieser Verfahren ist die sog. Amplitudenmodulation.

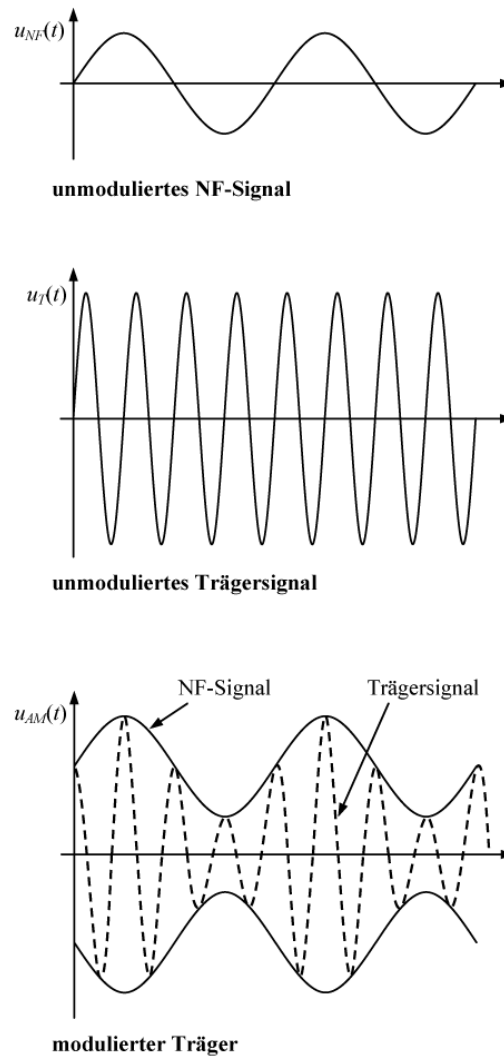


Bild 37 Beispiel zur Amplitudenmodulation

Die obige Abbildung stellt die einzelnen Signale bei einer AM dar. Dabei steht zu Beginn das NF - Signal (Nutzsignal), das "übertragen werden soll. Das Tr"agersignal dient dabei als „Transportmittel“. Mit Hilfe einer elektronischen Schaltung wird die Amplitude des Tr"agersignals durch das NF - Signal so beeinflusst, dass das daraus resultierende modulierte Signal sowohl das Tr"ager - als auch das NF - Signal enth"alt. Nach der "Übertragung l"asst sich das NF - Signal durch einen gegenl"aufigen Vorgang (Demodulation), wieder zur"uckerhalten.

Mathematisch l"asst sich dieser Vorgang wie folgt beschreiben:

F"ur das Nutzsignal erhalten wir $u_{NF} = \hat{u}_{NF} \cdot \cos(\omega \cdot t)$ und f"ur das Tr"agersignal ergibt sich $u_T = \hat{u}_T \cdot \cos(\Omega \cdot t)$. Dieses Nutzsignal wird nun mit der hochfrequenten Tr"agerschwingung $\cos(\Omega \cdot t)$ ($\Omega \gg \omega$) multipliziert und anschlie"send zum Tr"agersignal addiert.

F"ur das AM - Signal erhalten wir somit:

$$u_{AM} = \hat{u}_T \cdot \cos(\Omega \cdot t) + \hat{u}_{NF} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \cos(\Omega \cdot t).$$

Um direkt Ablesen zu können mit welchen Signalen das Tr"agersignal genau moduliert wird, kann dieser Ausdruck nun mithilfe des Additionstheorems

$$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

umgeformt werden und wir erhalten f"ur das modulierte Tr"agersignal:

$$u_{AM} = \hat{u}_T \cdot \cos(\Omega \cdot t) + \frac{\hat{u}_{NF}}{2} \cdot [\cos((\Omega + \omega) \cdot t) + \cos((\Omega - \omega) \cdot t)].$$

Es enth"alt die unmodulierte Tr"agerschwingung mit $\hat{u}_T \cdot \cos(\Omega \cdot t)$ und zwei Schwingungen mit den Frequenzen $\Omega + \omega$ und $\Omega - \omega$ jeweils der Amplitude $\frac{\hat{u}_{NF}}{2}$.

Beispiel 7:

In der Schaltung der folgenden Abbildung wird ein Kondensator zun"achst "uber den Schalter $S1$ in Stellung 1 mit einer Gleichspannungsquelle auf die Spannung U_0 aufgeladen. Anschlie"end wird der Schalter $S1$ in Stellung 2 gebracht und der Kondensator wird "uber die parallel geschaltete Spule entladen. Dabei sinkt die Kondensatorspannung nicht linear auf Null ab, wie man dies bei der Entladung "uber einen ohmschen Widerstand kennt, sondern die Spannung f"allt sinusf"ormig ab. Beim Entladen eines Kondensators "uber eine Spule entsteht somit eine Schwingung. Diese Schaltung aus Kondensator und Spule wird daher Schwingkreis genannt. Bei dieser Schaltung h"angt die Frequenz der entstehenden Schwingung allein von der Kapazit"at C und der Induktivit"at L ab.

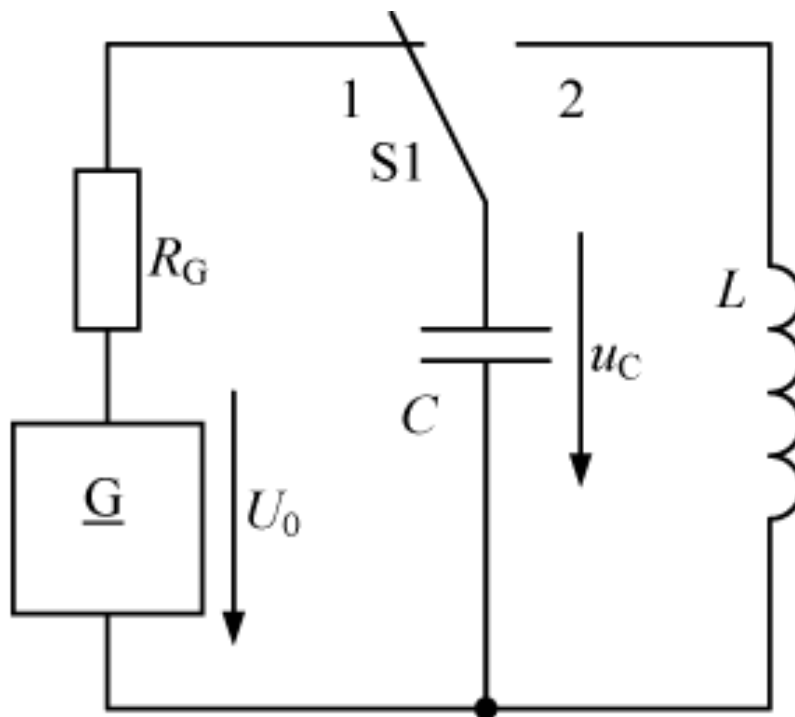


Bild 38 Elektrischer Schwingkreis

Die Entstehung der Schwingung im Schwingkreis beruht auf dem st"andigen Austausch von Energie zwischen dem Kondensator und der Spule. Durch die Entladung des Kondensators entsteht ein Magnetfeld, was den Kondensator mit umgekehrter Polung wieder aufl"adt. Dabei "andern sich die Stromst"arke i_L und die Spannung u_C sinusf"ormig. Die Schwingung verl"auft nur dann unged"ampft, wenn der Schwingkreis keinen ohmschen Widerstand (Wirkwiderstand) enth"alt. Die folgende Abbildung veranschaulicht diesen Vorgang.

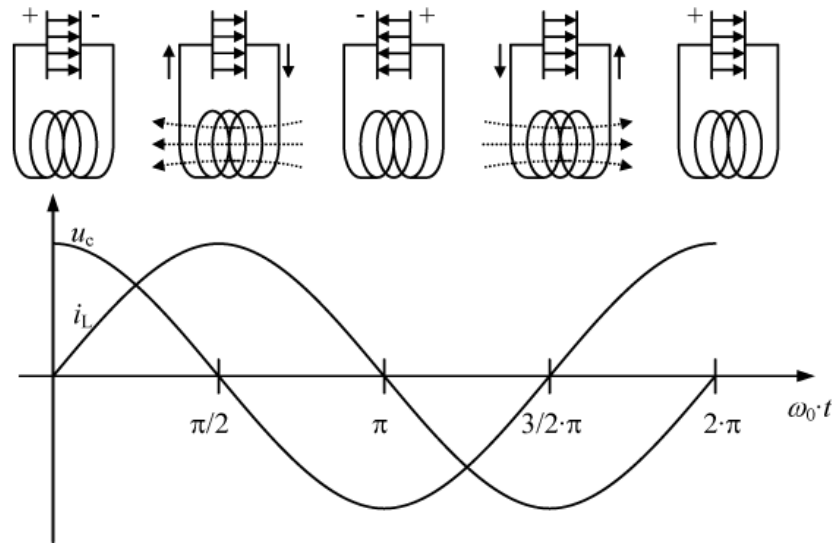


Bild 39 Darstellung des Strom- und Spannungsverlaufs bei einem elektrischen Schwingkreis

Die Momentanwerte von Spannung und Strom lassen sich dabei wie folgt berechnen:

$$i = \hat{i} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t), \quad u = \hat{u} \cdot \sin\left(\omega_0 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Dabei bedeuten:

- i : Momentanwert des Stromes
- $\hat{i}$: Amplitude des Stromes
- u : Momentanwert der Spannung
- $\hat{u}$: Amplitude der Spannung
($\hat{u} = U_0 = \text{Ladespannung von } C$)
- ω_0 : Eigenfrequenz, es gilt $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$
- t : Zeit