

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn

FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Hinführung

In der Lerneinheit *Trigonometrie* werden die Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens zunächst anhand eines beliebigen rechtwinkligen Dreiecks eingeführt. Hierfür werden zunächst die Bezeichnungen der Seiten des Dreiecks erklärt:

Im rechtwinkligen Dreieck wird die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber liegt, als Hypotenuse bezeichnet. Die Seiten, die am rechten Winkel anliegen, heißen Katheten. Dabei liegt die Ankathete am Winkel α an und die Gegenkathete liegt dem Winkel α gegenüber.

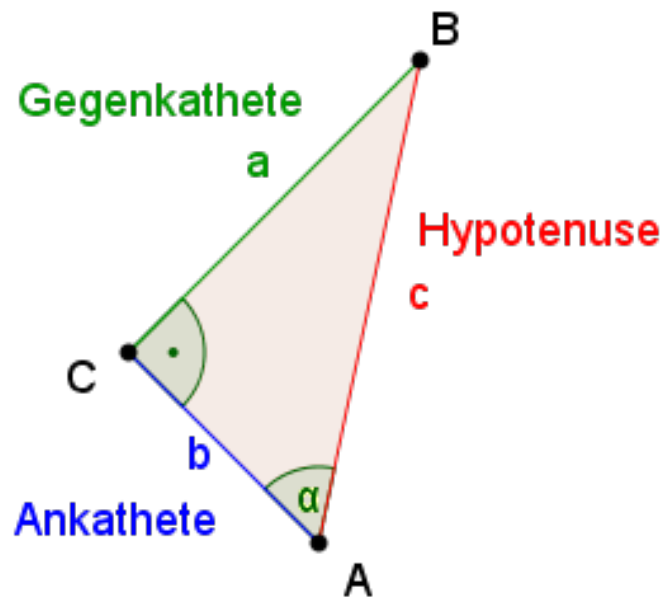


Bild 1

Die Winkelfunktionen werden mit diesen Bezeichnungen wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) &= \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \\ \cos(\alpha) &= \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \\ \tan(\alpha) &= \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}\end{aligned}$$

Auf diesen Definitionen werden wir in diesem Kapitel aufbauen, um die Funktionen auch für Winkel, die größer als 90° sind, zu verwenden.

Die folgende Abbildung zeigt eine Kreisscheibe (Draufsicht und Seitenansicht), auf der am Rand ein Korken befestigt ist ($r = 1 \text{ dm}$).

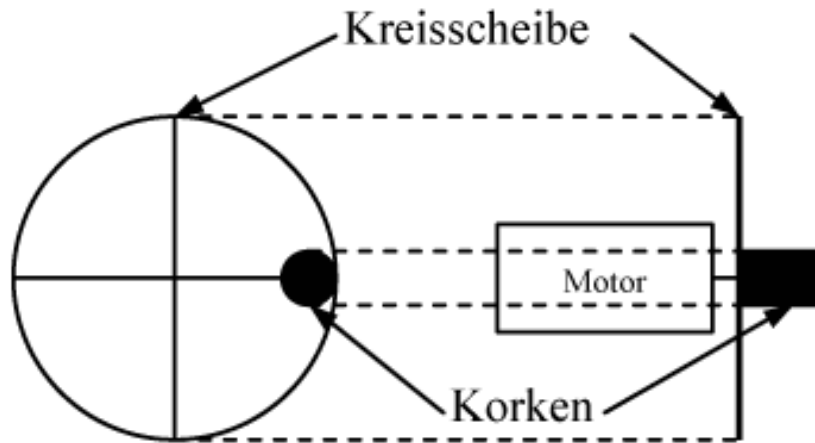


Bild 2 Kreisscheibe mit Korken (Draufsicht und Seitenansicht)

Die Kreisscheibe wird nun, mithilfe des Motors, gleichmäßig gegen den Uhrzeigersinn gedreht. Gleichzeitig wird die Bewegung des Korkens mit den Lichtstrahlen zweier Lampen zu einem auf eine senkrecht stehende und zum anderen auf eine waagrecht liegende Wand projiziert.

Diese Projektionen der Schatten werden in zwei Koordinatensystemen aufgezeichnet. Dabei wird auf der x -Achse die Zeit und auf der y -Achse der Abstand d des Korkens von der Mittellage aufgetragen.

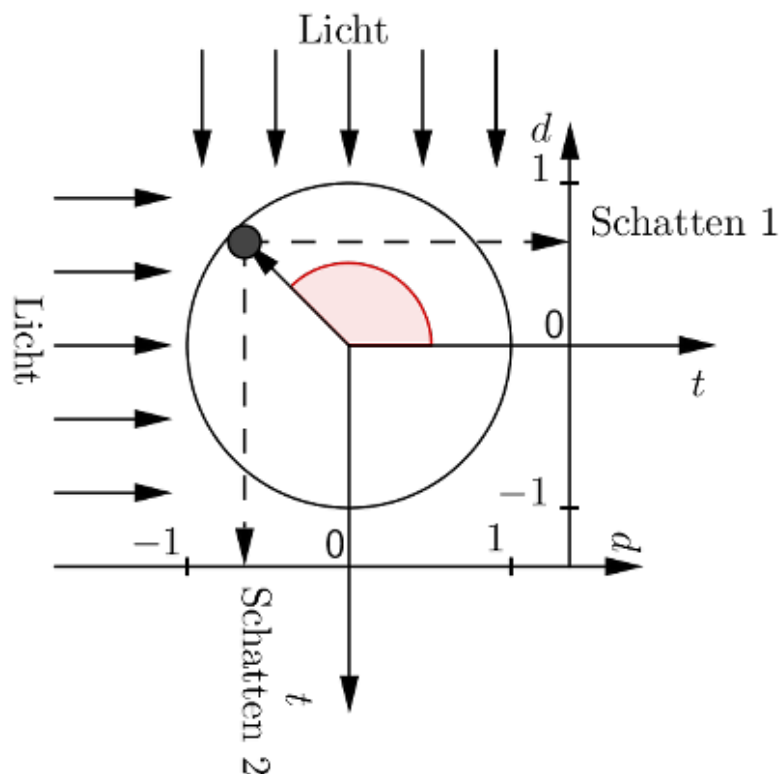


Bild 3 Schematische Darstellung der Korkenbewegung

Wenn man sich den Verlauf des Korkens anschaut, kommt man zu folgender Tabelle:

Position Korken	Winkel	Schatten 1	Schatten 2
Rechts	0°	0	1
Oben	90°	1	0
Links	180°	0	-1
Unten	270°	-1	0

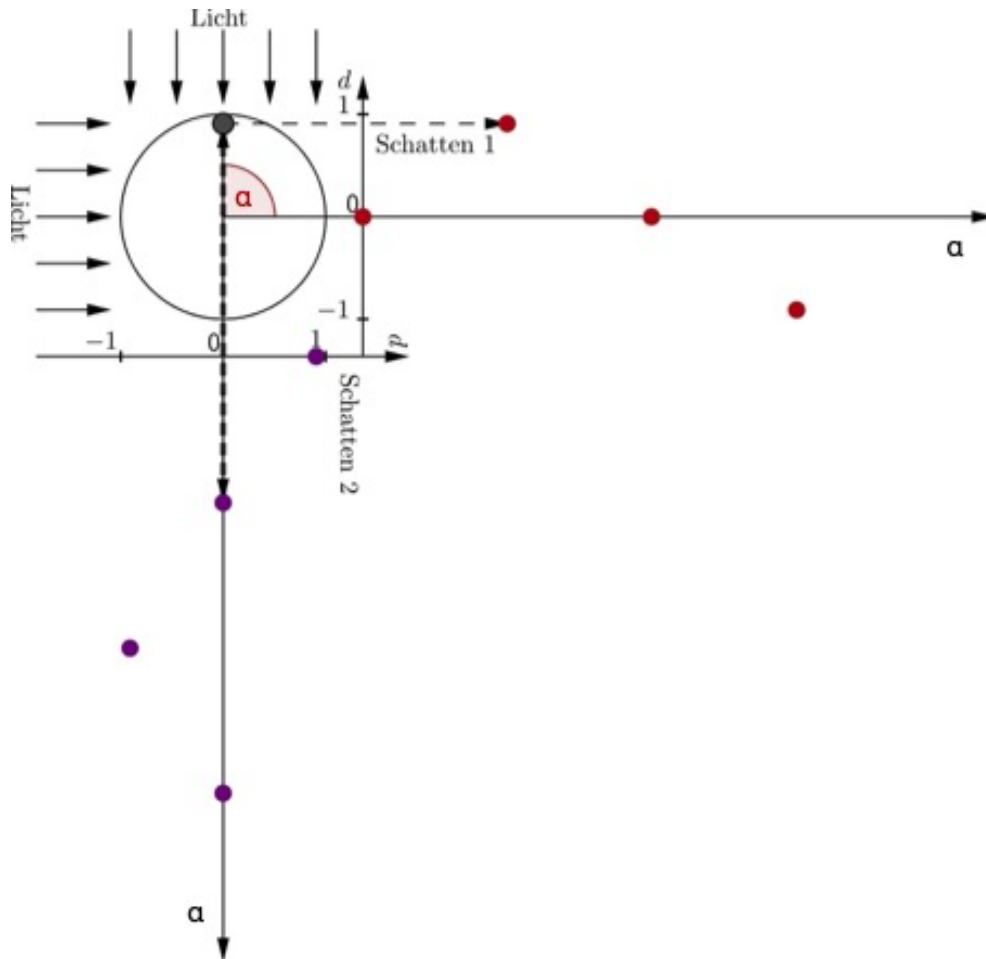


Bild 4

Wie der Verlauf zwischen diesen Höhen ist, lässt sich allerdings nicht so leicht vorstellen. Das folgende Video zeigt diesen Verlauf.

Preview fehlt:
h5p/Korkenbewegung

Video 1 (*nur in digitaler Version*)

Die oben beschriebenen Vorgänge wollen wir nun noch etwas näher untersuchen. Wir betrachten hierfür den in der folgenden Abbildung dargestellten Einheitskreis.

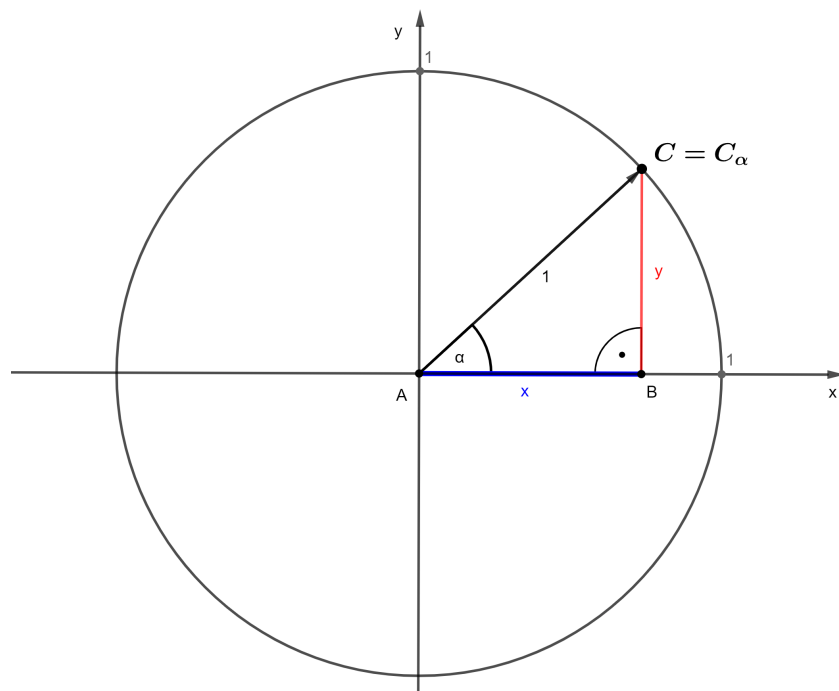


Bild 5 Einheitskreis

Mit dem Sinus und Cosinus folgt für das rechtwinklige Dreieck ABC und einen Winkel α von maximal 90° :

$$\sin(\alpha) = \frac{y}{1} \Rightarrow y = \sin(\alpha) \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \cos(\alpha)$$

Die Längen der Katheten entsprechen also im Einheitskreis dem Sinus - bzw. Cosinuswert zu einem bestimmten Winkel α . Da der Punkt C von α abhängt bezeichnen wir ihn auch mit C_α . Es ergibt sich also die Situation:

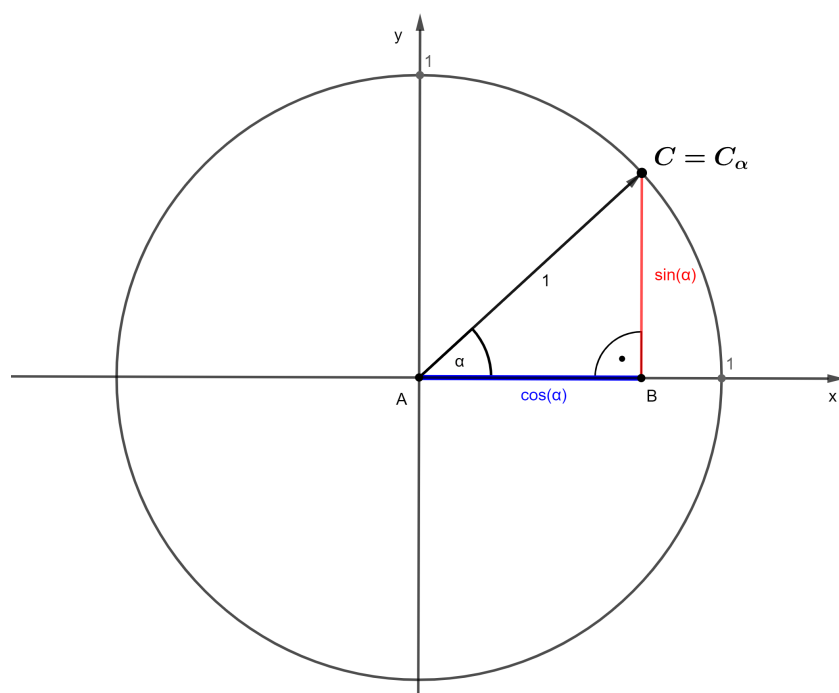


Bild 6 Darstellung von Sinus und Cosinus am Einheitskreis

Für $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ gilt: C_α hat die Koordinaten $(\cos(\alpha); \sin(\alpha))$.

Auf diesem Kreis lassen wir nun den Zeiger (Hypotenuse mit der Länge 1) im mathematisch positiven Drehsinn rotieren. Dabei erhalten wir für $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ die folgende Situation

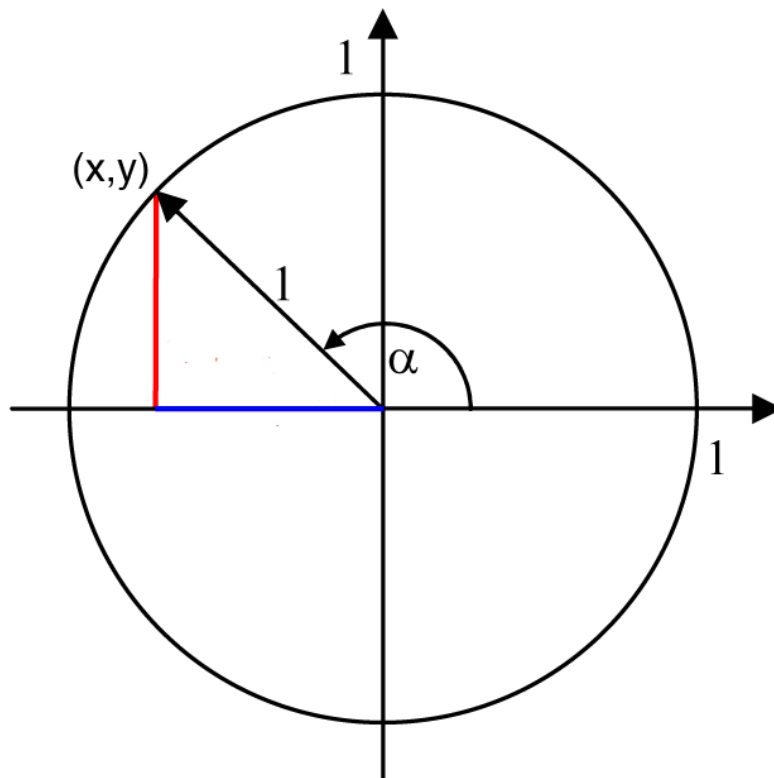


Bild 7 Sinus und Cosinus für $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$

Die Koordinaten des Punktes $(x; y)$ kann man mittels Sinus und Cosinus offenbar durch $(-\cos(180^\circ - \alpha); \sin(180^\circ - \alpha))$ darstellen.

Der Sinus und der Cosinus wurden bisher nur für $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ definiert. Um für den Punkt $(x; y) = (-\cos(180^\circ - \alpha); \sin(180^\circ - \alpha))$ für $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ eine einfache Beschreibung aufrecht zu erhalten, sind die Mathematiker auf die Idee gekommen, folgendes für $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ zu definieren:

$$\sin(\alpha) := \sin(180^\circ - \alpha) \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) := -\cos(180^\circ - \alpha)$$

Dies ist eine sinnvolle Definition, denn für $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ gilt $0^\circ \leq 180^\circ - \alpha < 90^\circ$, also sind die Ausdrücke auf der rechten Seite bereits definiert. Für $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ gilt dann mit der neuen Definition auch:

$$(x; y) = (-\cos(180^\circ - \alpha); \sin(180^\circ - \alpha)) = (\cos(\alpha); \sin(\alpha))$$

Analog definiert man für $180^\circ < \alpha \leq 270^\circ$

$$\sin(\alpha) := -\sin(270^\circ - \alpha) \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) := -\cos(270^\circ - \alpha)$$

und für $270^\circ < \alpha \leq 360^\circ$

$$\sin(\alpha) := -\sin(360^\circ - \alpha) \quad \text{und} \quad \cos(\alpha) := \cos(360^\circ - \alpha)$$

Mit dieser Erweiterung der Definition von $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ auf Werte von α mit $90^\circ < \alpha \leq 360^\circ$ kann man eine einfache Beschreibung geben. Ein Punkt C_α zum Winkel α ($0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$) hat

immer die Koordinaten

$$C_\alpha = (\cos(\alpha); \sin(\alpha)).$$

Der Cosinus entspricht der x - Koordinate, der Sinus der y - Koordinate des Punktes.

Wir haben Sinus und Cosinus nun f"ur alle Winkel am Einheitskreis $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ definiert. Einen Punkt C_α auf dem Einheitskreis kann man auch f"ur $\alpha > 360^\circ$ (mehr als eine volle Drehung) oder auch f"ur $\alpha < 0$ (Drehung im Uhrzeigersinn) angeben. F"ur diese Winkel definiert man:

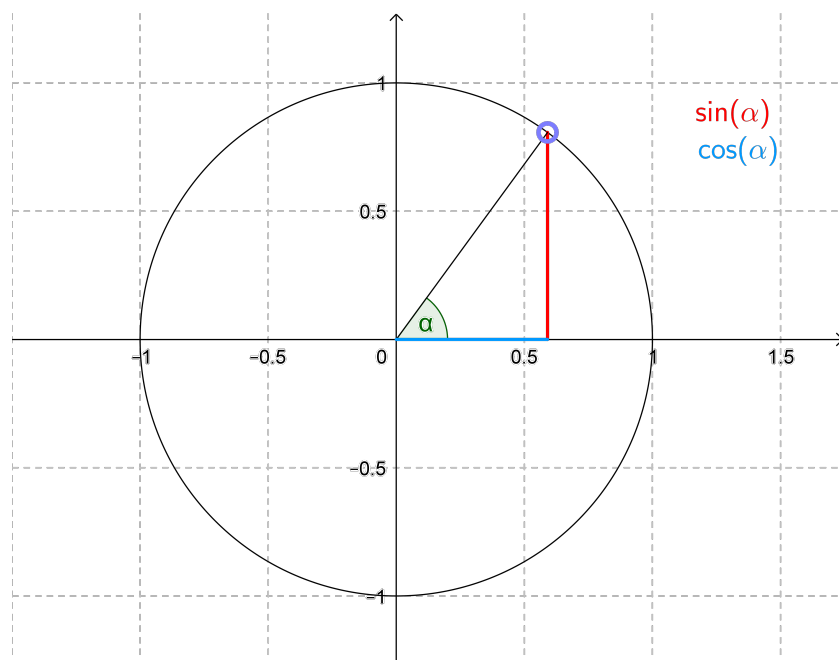
$$\cos(\alpha) := x\text{-Koordinate von } C_\alpha$$

$$\sin(\alpha) := y\text{-Koordinate von } C_\alpha$$

Somit ist klar, dass sich der Wert von Sinus und Cosinus periodisch unver"andert bleibt, wenn man 360° zu einem Winkel addiert. Es gilt f"ur alle Winkel α :

$$\sin(\alpha + 360^\circ) = \sin(\alpha) \quad \text{und} \quad \cos(\alpha + 360^\circ) = \cos(\alpha)$$

Sinus und Cosinus am Einheitskreis:



Interaktion 1 (nur in digitaler Version)

Insgesamt ergeben sich die in der n"achsten Abbildung dargestellten Funktionsverl"aufe.

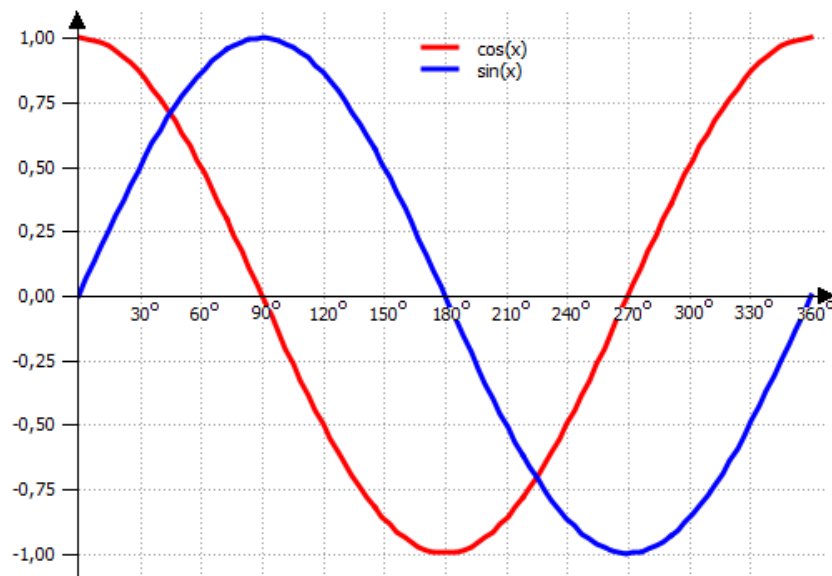


Bild 8 Graphen der Sinus - und Cosinusfunktion

Die beiden Kurvenverläufe zeigen anschaulich, dass beide Funktionen Werte aus dem Intervall $[-1; 1]$ annehmen, was auch aus der Definition folgt.

Info 1:

Es gilt für beliebige Winkel α und $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) &= \sin(\alpha + k \cdot 360^\circ), \\ \cos(\alpha) &= \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ).\end{aligned}$$

Die Sinus- und die Cosinusfunktion sind somit beide periodisch mit Periode 360° .

Bisher wurde also festgestellt, dass die Sinus - und die Cosinusfunktion periodisch sind. Im Folgenden wird untersucht, ob es bei diesen Funktionen noch weitere Zusammenhänge gibt.

Aufgabe 1:

Untersuchen Sie den Verlauf der Sinus - und Cosinusfunktion. Versuchen Sie Ihre Vermutungen allgemein in der folgenden Tabelle oder einer selbst aufgestellten Tabelle festzuhalten und gehen Sie dabei wie folgt vor:

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$		x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$-\alpha$						
$90^\circ + \alpha$				$90^\circ - \alpha$		
$180^\circ + \alpha$				$180^\circ - \alpha$		
$270^\circ + \alpha$				$270^\circ - \alpha$		
$360^\circ + \alpha$				$360^\circ - \alpha$		

1. Zeile der Tabelle: Untersuchung auf Symmetrie.
2. und 4. Zeile der Tabelle: Drücken Sie den Sinus durch den Cosinus und den Cosinus durch den Sinus aus.
3. Zeile der Tabelle: Stellen Sie die Terme $\sin(180^\circ \pm \alpha)$ und $\cos(180^\circ \pm \alpha)$ durch $\sin(\alpha)$ bzw. $\cos(\alpha)$ dar.
5. Zeile der Tabelle: Untersuchung auf Periodizität.

Lösung:

Untersucht man die beiden Kurvenverläufe, so kann man feststellen, dass die Sinusfunktion punktsymmetrisch zum Ursprung und die Cosinusfunktion achsensymmetrisch zur y -Achse sind. Außerdem sind die Sinus- und die Cosinusfunktion um 90° zueinander verschoben und beide Funktionen sind periodisch. Die Tabelle lässt sich wie folgt ausfüllen:

x	$\sin(x)$	$\cos(x)$			x	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$-\alpha$	$-\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$					
$90^\circ + \alpha$	$\cos(\alpha)$	$-\sin(\alpha)$			$90^\circ - \alpha$	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$
$180^\circ + \alpha$	$-\sin(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$			$180^\circ - \alpha$	$\sin(\alpha)$	$-\cos(\alpha)$
$270^\circ + \alpha$	$-\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$			$270^\circ - \alpha$	$-\cos(\alpha)$	$-\sin(\alpha)$
$360^\circ + \alpha$	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$			$360^\circ - \alpha$	$-\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$