

# studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn

FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

## Aufgaben

### Aufgabe 2:

Berechnen Sie die folgenden Sinuswerte ohne Taschenrechner, indem Sie die Periodizität und Symmetrie-Eigenschaften der Sinusfunktion benutzen:

$$\sin(143^\circ), \sin(217^\circ), \sin(323^\circ)$$

**Hinweis:**  $\sin(37^\circ) \approx 0,6018$

### Lösung:

$$\begin{aligned} \sin(143^\circ) &= \sin(180^\circ - 143^\circ) \\ &= \sin(37^\circ) \approx 0,6018 \\ \sin(217^\circ) &= \sin(180^\circ - 217^\circ) \\ &= \sin(-37^\circ) \\ &= -\sin(37^\circ) \approx -0,6018 \\ \sin(323^\circ) &= \sin(180^\circ - 323^\circ) \\ &= \sin(-143^\circ) \\ &= -\sin(143^\circ) \approx -0,6018 \end{aligned}$$

### Aufgabe 3:

Begründen Sie am Einheitskreis:  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$ .

### Lösung:

Betrachtet man folgende Abbildung, so ist ersichtlich, dass  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$  gilt.

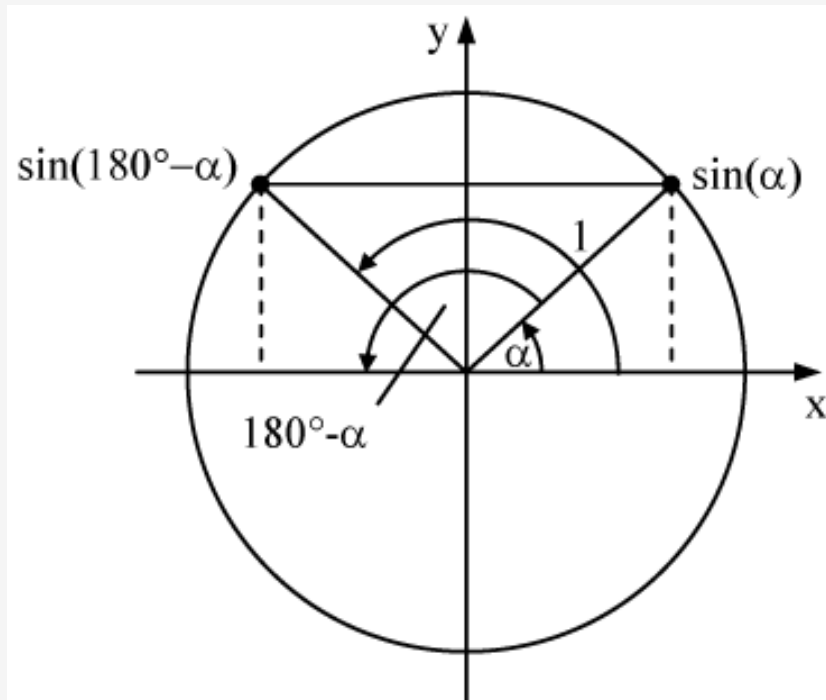


**Bild 27** Skizze zur Begründung von  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$

#### Aufgabe 4:

Bestimmen Sie ohne Taschenrechner alle möglichen Lösungen für  $x$  (im Bogenmaß's) mit  $0 \leq x \leq 2\pi$  für diese Gleichungen:

1.  $\sin(x) = \frac{1}{2}$
2.  $\cos(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$

#### Lösung:

1.  $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$
2.  $\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

#### Aufgabe 5:

Einem Studenten wird die Aufgabe gestellt:

*Aufgabe:* Berechnen Sie  $\sin(-30^\circ)$ .

Seine Lösung lautet:  $\sin(-30^\circ) = \sin(30^\circ) = 0,5$ .

Ist diese Lösung korrekt?

### Lösung:

Bei dieser Lösung wurden die Symmetrieeigenschaften der Sinus - und Cosinusfunktion miteinander vertauscht. Hier liegt vielleicht ein Fehler im Grundverständnis von Punkt - und Achsensymmetrie vor.

Die richtige Lösung lautet:

$$\sin(-30^\circ) = -\sin(30^\circ) = -0,5.$$

### Aufgabe 6:

Gegeben ist die Funktion  $g : \{x \in \mathbb{R} \mid -2\pi \leq x \leq 2\pi\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Gleichung  $g(x) = 2,5 \cdot \sin(3 \cdot x) + 0,5$ . Zeichnen Sie den Graphen und beschreiben Sie, wie der Graph von  $g(x)$  durch Transformation des Graphen der Funktion  $f : \{x \in \mathbb{R} \mid -2\pi \leq x \leq 2\pi\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \sin(x)$  erzeugt werden kann.

### Lösung:

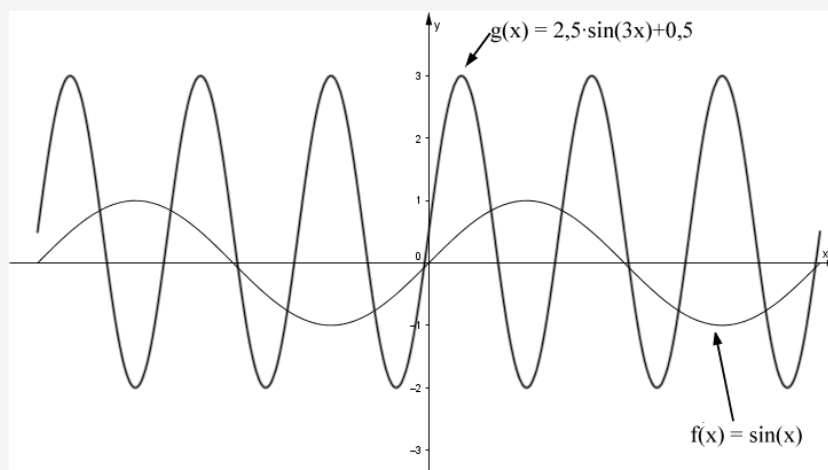


**Bild 28** Graphen der Funktion  $f(x) = \sin(x)$  und  $g(x) = 2,5 \cdot \sin(3 \cdot x) + 0,5$

Der Graph der Funktion  $g(x) = 2,5 \cdot \sin(3 \cdot x) + 0,5$  entsteht aus der Sinusfunktion  $f(x)$ , indem man:

- die Sinusfunktion mit dem Faktor 2,5 in Richtung der  $y$ -Achse streckt
- die Sinusfunktion mit dem Faktor 3 in Richtung der  $x$ -Achse staucht
- und den so entstandenen Graphen um 0,5 in Richtung der  $y$ -Achse verschiebt.

### Aufgabe 7:

Geben Sie zu dem dargestellten Graphen die Funktionsgleichung an.

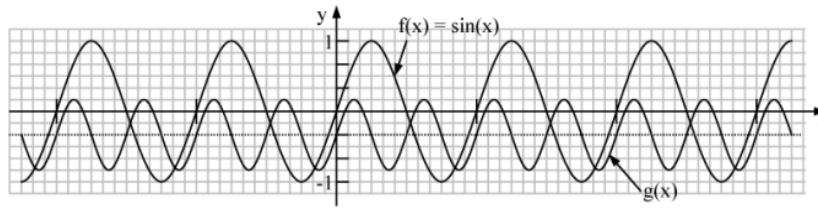


**Bild 29** Aus der Sinusfunktion neu entstandener Graph

### Lösung:

Im Vergleich zur Funktion  $f(x) = \sin(x)$  entstand der neue Graph  $g(x)$ , indem:

- die Sinusfunktion mit dem Faktor 0,5 in Richtung der  $y$ -Achse gestaucht wurde
- die Sinusfunktion mit dem Faktor 2 in Richtung der  $x$ -Achse gestaucht wurde (während einer Periode der Funktion  $f(x)$  durchläuft die Funktion  $g(x)$  zwei Perioden)
- und der so entstandene Graph um  $-\frac{1}{3}$  in Richtung der  $y$ -Achse verschoben wurde (der Graph der Funktion  $g(x)$  wurde um  $\frac{1}{3}$  in Richtung der  $y$ -Achse nach unten verschoben).

Die Funktionsgleichung des neuen Graphen lautet somit:

$$g(x) = 0,5 \cdot \sin(2 \cdot x) - \frac{1}{3}.$$

### Aufgabe 8:

Begründen Sie die Aussage, dass man die Cosinusfunktion durch eine geeignete Sinusfunktion darstellen kann.

### Lösung:

Wir betrachten hierzu die in der folgenden Abbildung dargestellte Sinusfunktion. Verschiebt man diese mit dem Parameter  $c$  um  $\frac{\pi}{2}$  nach links, so erhält man die Cosinusfunktion.

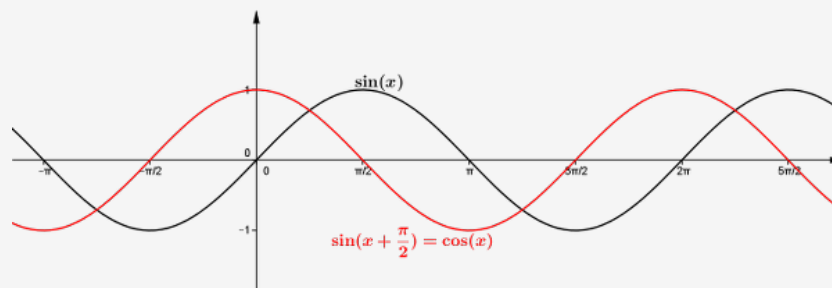


**Bild 30** Sinus - und Cosinusfunktion

### Aufgabe 9:

Angenommen die Veränderung der Tageslänge eines Jahres lässt sich mit einer Sinusfunktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d$  modellieren.

1. Finden Sie die geeigneten Parameter, wenn Sie von folgenden Voraussetzungen ausgehen:

- Die Periodenlänge ist 365 Tage (1 Jahr)
- Das Maximum der Tageslänge wird am 21.6. (172. Tag) angenommen und beträgt 16,5 Stunden
- Das Minimum der Tageslänge wird am 21.12. (355. Tag) angenommen und beträgt 8 Stunden
- Die durchschnittliche Tageslänge wird am 21.3. (80. Tag) und am 21.9. angenommen

2. Bestimmen Sie mithilfe der oben gefundenen Gleichung die Tageslänge am 10.7. (191. Tag).

**Lösung:**

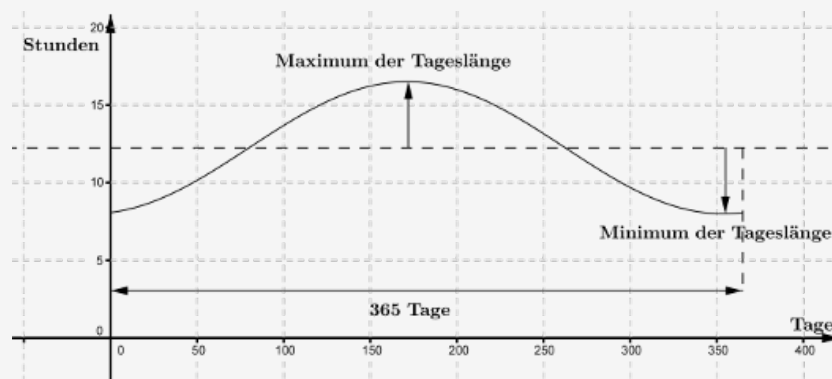


**Bild 31** Funktionsgraph der Tageslänge

1. Die Periodenlänge beträgt 365 Tage. Somit folgt für den Parameter  $b$ :

$$b = \frac{2\pi}{365}$$

Das Maximum der Tageslänge wird am 21.6. (172. Tag) und das Minimum am 21.12. (355. Tag) angenommen.

Für die Amplitude  $a$  muss man die Differenz zwischen Maximum und Minimum nehmen und durch zwei teilen:

$$a = \frac{16,5 - 8}{2} = 4,25.$$

Die Verschiebung der Sinusfunktion in y-Richtung (Parameter  $d$ ) wird durch die durchschnittliche Tageslänge eines Jahres beschreiben und beträgt somit:

$$d = \frac{16,5 + 8}{2} = 12,25.$$

Diese wird dabei ungefähr am 21.3. (dem 80. Tag) und 21.9. angenommen. Damit ist auch die Phase (Parameter  $c$ ) festgelegt und wir erhalten insgesamt:

$$f(x) = 4,25 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot (x - 80)\right) + 12,25.$$

2. Der 10. *Juli* ist der 191. Kalendertag. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4,25 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{365} \cdot (191 - 80)\right) + 12,25 \\ &\approx 16,26. \end{aligned}$$

Der 10.7. hat eine Tageslänge von etwa 16 Stunden.

### Aufgabe 10:

Einem Studenten wurde folgende Aufgabe gestellt:

*Aufgabe: Zeichnen Sie den Graphen der Funktionen  $f(x) = \sin(x)$  und  $g(x) = \sin(2 \cdot x)$  in ein Koordinatensystem!*

Seine Lösung sah folgendermaßen aus:

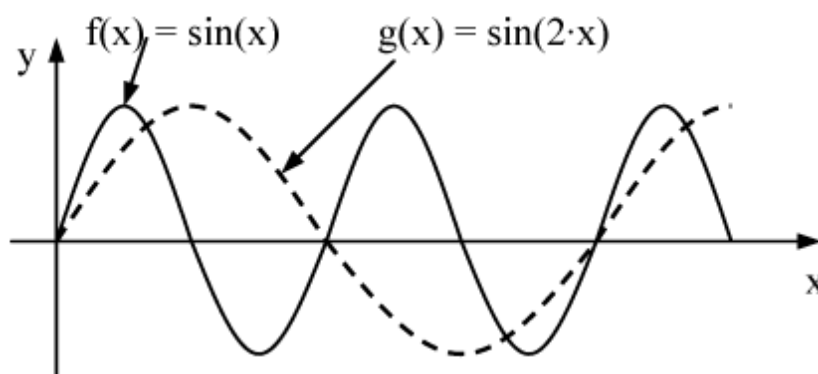


**Bild 32** Studentenlösung/Falsche Zeichnung

Was ist an dieser Lösung falsch? Wie muss die korrekte Zeichnung aussehen?

### Lösung:

Bei dieser Lösung wurde der Graph  $g(x)$  nicht mit dem Faktor 2 gestaucht, sondern mit dem Faktor 2 gestreckt. Möglicherweise liegt hier eine Fehlvorstellung des Parameters  $b$  in der allgemeinen Gleichung

$$f(x) = a \cdot \sin(b(x + c)) + d$$

vor. Die richtige Zeichnung sieht wie folgt aus:

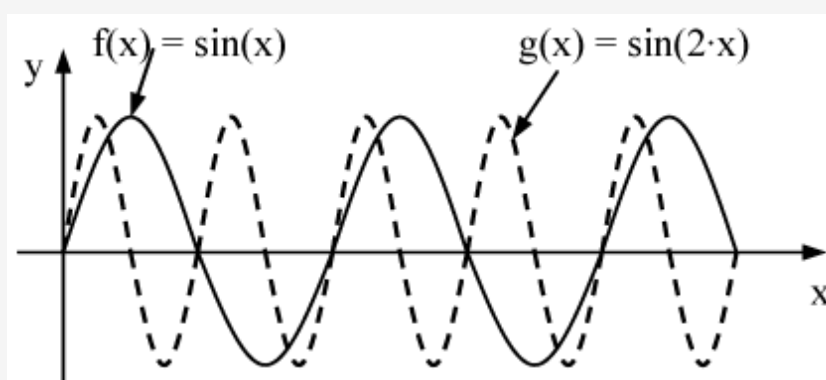


**Bild 33** Korrekte Zeichnung