

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn

FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

Anwendung

Anwendung finden die Sinus - und Cosinusfunktion z. B. in der Physik oder auch in der Elektrotechnik.

Beispiel 3:

Die folgende Abbildung zeigt einen Versuchsaufbau und den Schwingungsverlauf zum Federpendel.

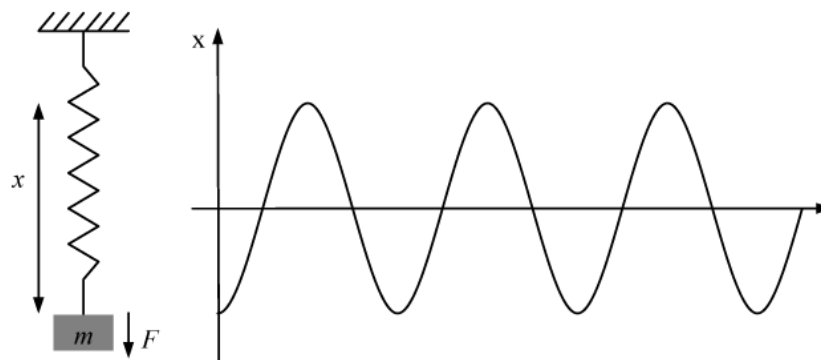


Bild 34 Funktionsverlauf beim ungedämpften Federpendel

Der Versuchsaufbau besteht aus einer Feder, an der die Masse m hängt. Wird die Feder nicht ausgelenkt, so wird der Punkt, an der sich die Masse befindet, als Nullpunkt der Auslenkung x bezeichnet. Die Feder wird nun von Hand um die Strecke x_0 ausgelenkt (die Masse wird nach unten gezogen).

Unter der Annahme, dass das Pendel ungedämpft ist, führt die Masse m nun eine Schwingung aus, die durch folgende Funktion beschrieben werden kann:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t).$$

Hierbei ist x die Auslenkung der Feder, x_0 die Amplitude, ω die Kreisfrequenz (die von den Eigenschaften des Pendels abhängt) und t die Zeit.

Herleitung:

Wird die Feder um x ausgelenkt, so ist hierfür die Kraft $D \cdot x$ nötig (Hookesches Gesetz). Die Feder setzt dieser die Rückstellkraft

$$F = -Dx$$

entgegen. Das Minuszeichen besagt, dass diese Kraft der Kraft $D \cdot x$ entgegen gerichtet ist. Die Kraft F gilt für alle x aus dem Intervall $[-x_0, x_0]$, wobei x_0 die anfängliche Auslenkung war. Beim Loslassen der Masse wirkt also nur noch die Kraft F auf die Masse. Diese Kraft erzeugt eine Beschleunigung a mit

$$a \cdot m = F(x).$$

Offensichtlich ist die Beschleunigung a abhängig von der Auslenkung x der Feder:

$$a = -\frac{D}{m} \cdot x.$$

Im Folgenden werden die aus der Physik bekannten Relationen

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t) \\ v(t) &= x'(t) \\ a(t) &= v'(t) = x''(t) \end{aligned}$$

verwendet.

Mit $a(t) = x''(t)$ können wir nun also schreiben:

$$x''(t) = -\frac{D}{m} \cdot x(t).$$

Um die Bewegung der Masse m zu beschreiben, muss also eine Funktion $x(t)$ gefunden werden, die die obige Gleichung erfüllt. Wir betrachten nun die bereits zu Beginn angegebene Funktion

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t)$$

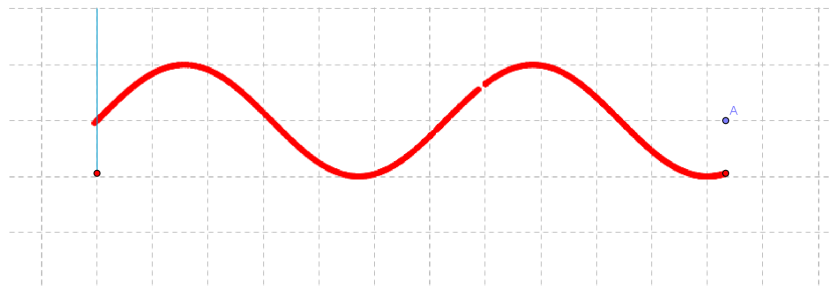
und können nun durch Ableiten verifizieren:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x_0 \omega \cdot \sin(\omega t), \\ x''(t) &= -x_0 \omega^2 \cdot \cos(\omega t). \end{aligned}$$

Die Funktion erfüllt also die obige Gleichung unter der Bedingung, dass

$$\omega^2 = \frac{D}{m}.$$

Es kann außerdem gezeigt werden, dass $x(t) = x_0 \cdot \cos(\omega t)$ die einzige Funktion ist, die die Gleichung $x''(t) = -\frac{D}{m} \cdot x(t)$ erfüllt, und bei der $x(0) = x_0$ ist.



Interaktion 6 (nur in digitaler Version)

Beispiel 4:

Die Wechselspannung ändert ihre Richtung (Polarität) periodisch und hat meist einen sinusförmigen Verlauf, weshalb sie auch „sinusförmige Wechselspannung“ genannt wird. Und in der Tat stimmen die Momentanwerte der Wechselspannung mit denen der Sinusfunktion überein. Die Bevorzugung dieser Spannung in der Technik gegenüber anderen Spannungen liegt zum einen in der einfachen Erzeugung und zum anderen in der verlustarmen Fernübertragung. Obwohl ihr Verlauf relativ kompliziert ist, lässt sich diese Spannung erheblich einfacher herstellen als z. B. eine „Rechteck - Wechselspannung“. Rotiert eine Leiterschleife mit konstanter Geschwindigkeit in einem homogenen Magnetfeld, so durchlaufen beide Seiten der Leiterschleife das Magnetfeld und es wird eine Spannung induziert (elektromagnetische Induktion). Die so entstehende induzierte Spannung beschreibt den Verlauf einer Sinuskurve.

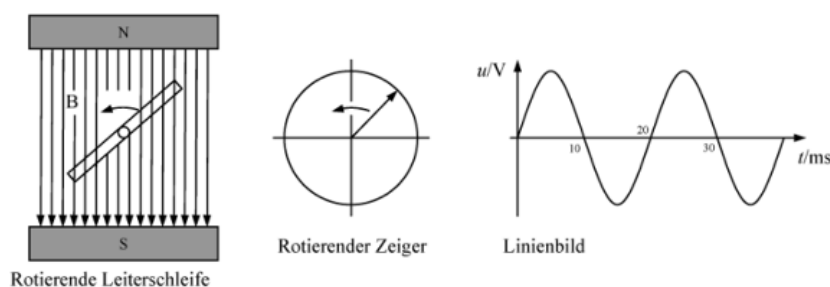


Bild 35 Erzeugung und Darstellung einer Wechselspannung

Die Abbildung stellt diesen Vorgang vereinfacht dar. Dabei ist links die mechanische Anordnung der rotierenden Leiterschleife im Magnetfeld dargestellt. Das Zeigerdiagramm (Mitte) vermittelt in abstrakter Form, dass die induzierte Spannung einem rotierenden Zeiger folgt. "Überträgt" man diese Zeigerbewegung in das rechts dargestellte Liniendiagramm, so erhält man den Verlauf der Spannung: eine Sinusfunktion. Dabei bezeichnet man die Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit (in diesem Fall eine Sekunde) als Frequenz, die in Hertz (Hz) angegeben wird. Wie im Liniendiagramm zu erkennen ist, wiederholt sich der Vorgang in regelmäßigen Zeitabständen. Und so bezeichnet man die Wiederholung gleicher Zustände als Periode. Bei der Wechselspannung ist dies je eine aufeinander folgende positive und negative Halbwelle. Die Länge einer Periode nennt man Periodendauer T . Für die Periodendauer und die Frequenz ergibt sich dabei der folgende Zusammenhang:

$$T = \frac{1}{f}$$

Wie in dem Liniendiagramm zu erkennen ist, beträgt die Länge einer Periode 20 ms.

Stellt man die obige Gleichung nach f um und setzt den Wert für T ein, so ergibt sich eine Frequenz von 50 Hz . Dieser Wert entspricht der in Deutschland üblichen Wechselspannung im Haushalt.

Beispiel 5:

Drehstrom ist der allgemein übliche Name für dreiphasigen Wechselstrom. Man versteht darunter ein System von drei Stromkreisen, deren Spannungen zeitlich um eine dritte Periode verschoben sind.

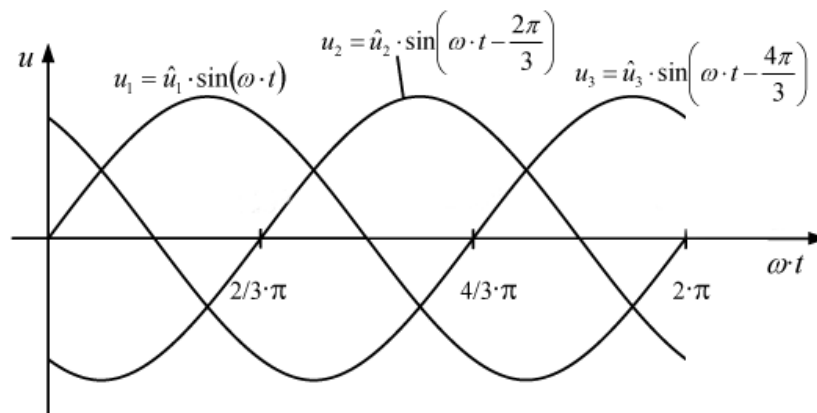


Bild 36 Spannungsverlauf im Dreiphasensystem

Beispiel 6:

Bei der Rundfunkübertragung lassen sich niederfrequente Signale (NF) (z.B. Sprache) über das Medium Luft nicht ausreichend weit übertragen. Um diese Signale dennoch über weite Entfernungen zum Rundfunkhörer übertragen zu können, verwendet man sog. Modulationsverfahren, die im Hochfrequenzbereich arbeiten. Dabei werden die Signalparameter des Trägersignals in Abhängigkeit von dem modulierenden Signal beeinflusst. Eines dieser Verfahren ist die sog. Amplitudenmodulation.

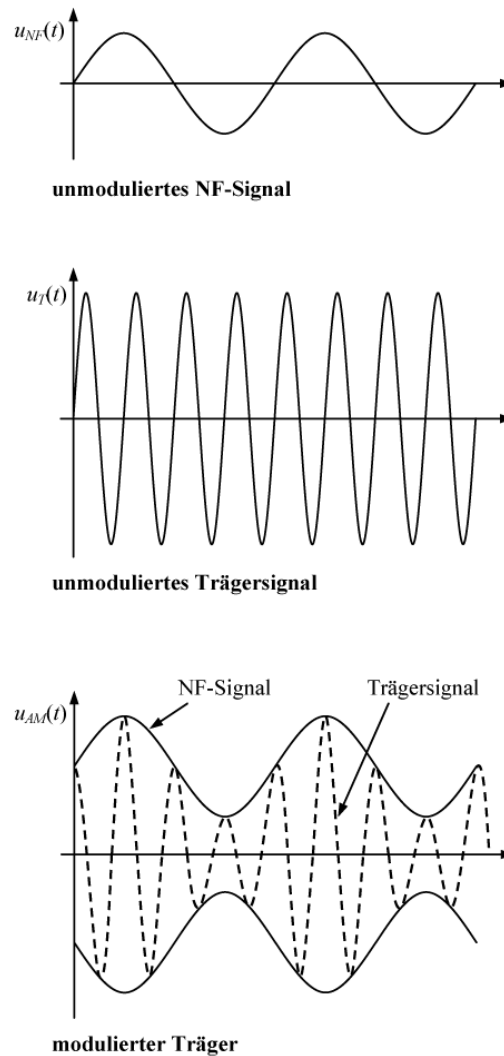


Bild 37 Beispiel zur Amplitudenmodulation

Die obige Abbildung stellt die einzelnen Signale bei einer AM dar. Dabei steht zu Beginn das NF - Signal (Nutzsignal), das "übertragen werden soll. Das Tr"agersignal dient dabei als „Transportmittel“. Mit Hilfe einer elektronischen Schaltung wird die Amplitude des Tr"agersignals durch das NF - Signal so beeinflusst, dass das daraus resultierende modulierte Signal sowohl das Tr"ager - als auch das NF - Signal enth"alt. Nach der "Übertragung l"asst sich das NF - Signal durch einen gegenl"aufigen Vorgang (Demodulation), wieder zur"uckerhalten.

Mathematisch l"asst sich dieser Vorgang wie folgt beschreiben:

F"ur das Nutzsignal erhalten wir $u_{NF} = \hat{u}_{NF} \cdot \cos(\omega \cdot t)$ und f"ur das Tr"agersignal ergibt sich $u_T = \hat{u}_T \cdot \cos(\Omega \cdot t)$. Dieses Nutzsignal wird nun mit der hochfrequenten Tr"agerschwingung $\cos(\Omega \cdot t)$ ($\Omega \gg \omega$) multipliziert und anschlie"send zum Tr"agersignal addiert.

F"ur das AM - Signal erhalten wir somit:

$$u_{AM} = \hat{u}_T \cdot \cos(\Omega \cdot t) + \hat{u}_{NF} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \cos(\Omega \cdot t).$$

Um direkt Ablesen zu können mit welchen Signalen das Tr"agersignal genau moduliert wird, kann dieser Ausdruck nun mithilfe des Additionstheorems

$$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

umgeformt werden und wir erhalten für das modulierte Trägersignal:

$$u_{AM} = \hat{u}_T \cdot \cos(\Omega \cdot t) + \frac{\hat{u}_{NF}}{2} \cdot [\cos((\Omega + \omega) \cdot t) + \cos((\Omega - \omega) \cdot t)].$$

Es enthält die unmodulierte Trägerschwingung mit $\hat{u}_T \cdot \cos(\Omega \cdot t)$ und zwei Schwingungen mit den Frequenzen $\Omega + \omega$ und $\Omega - \omega$ jeweils der Amplitude $\frac{\hat{u}_{NF}}{2}$.

Beispiel 7:

In der Schaltung der folgenden Abbildung wird ein Kondensator zunächst über den Schalter $S1$ in Stellung 1 mit einer Gleichspannungsquelle auf die Spannung U_0 aufgeladen. Anschließend wird der Schalter $S1$ in Stellung 2 gebracht und der Kondensator wird über die parallel geschaltete Spule entladen. Dabei sinkt die Kondensatorspannung nicht linear auf Null ab, wie man dies bei der Entladung über einen ohmschen Widerstand kennt, sondern die Spannung fällt sinusförmig ab. Beim Entladen eines Kondensators über eine Spule entsteht somit eine Schwingung. Diese Schaltung aus Kondensator und Spule wird daher Schwingkreis genannt. Bei dieser Schaltung hängt die Frequenz der entstehenden Schwingung allein von der Kapazität C und der Induktivität L ab.

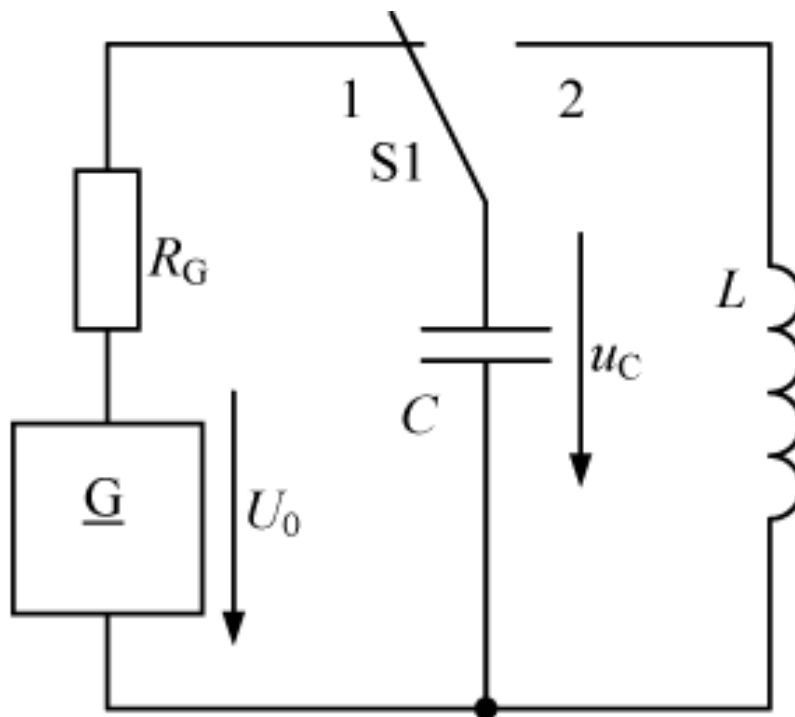


Bild 38 Elektrischer Schwingkreis

Die Entstehung der Schwingung im Schwingkreis beruht auf dem ständigen Austausch von Energie zwischen dem Kondensator und der Spule. Durch die Entladung des Kondensators entsteht ein Magnetfeld, was den Kondensator mit umgekehrter Polung wieder auflädt. Dabei ändern sich die Stromstärke i_L und die Spannung u_C sinusförmig. Die Schwingung verläuft nur dann ungedämpft, wenn der Schwingkreis keinen ohmschen Widerstand (Wirkwiderstand) enthält. Die folgende Abbildung veranschaulicht diesen Vorgang.

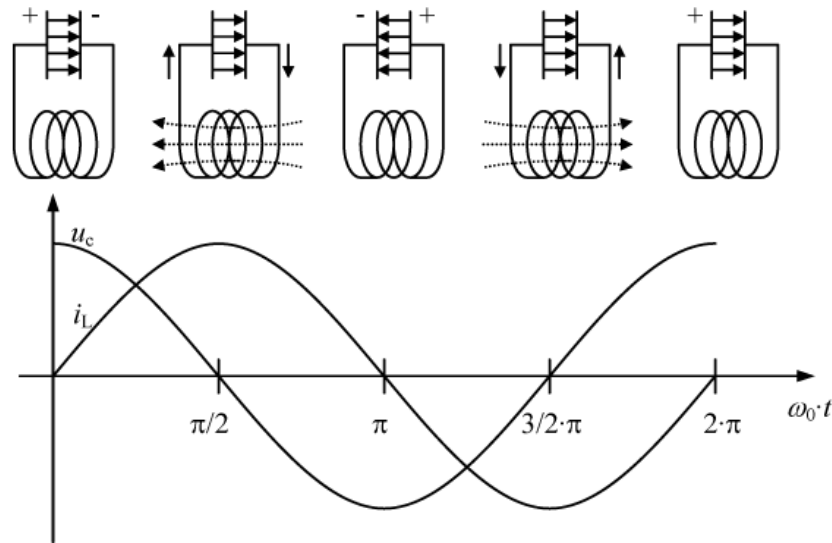


Bild 39 Darstellung des Strom- und Spannungsverlaufs bei einem elektrischen Schwingkreis

Die Momentanwerte von Spannung und Strom lassen sich dabei wie folgt berechnen:

$$i = \hat{i} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t), \quad u = \hat{u} \cdot \sin\left(\omega_0 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Dabei bedeuten:

- i : Momentanwert des Stromes
- $\hat{i}$: Amplitude des Stromes
- u : Momentanwert der Spannung
- $\hat{u}$: Amplitude der Spannung
($\hat{u} = U_0 = \text{Ladespannung von } C$)
- ω_0 : Eigenfrequenz, es gilt $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$
- t : Zeit