

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn

FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

LE 8 - Höhere Funktionen

8.5 Polynomfunktionen (ganzrationale Funktionen)

Im Folgenden finden Sie die Abschnitte:

Übersicht	S. 1
Hinführung	S. 2
Inhalte mit Erklärungen	S. 5
Aufgaben	S. 8
Anwendung	S. 15
Ergänzungen	S. 17

Übersicht

- Definition und Grad von Polynomfunktionen
- Koeffizientenvergleich
- Polynomfunktionen

Hinführung

Ein Junge hat sich ein Geschenk für seine Großmutter ausgedacht: Aus durchsichtiger PVC-Folie möchte er einen Würfel basteln. In diesen Würfel möchte er mehrere Lagen aus bunt gefärbtem Sand gießen, bis er vollständig gefüllt ist.

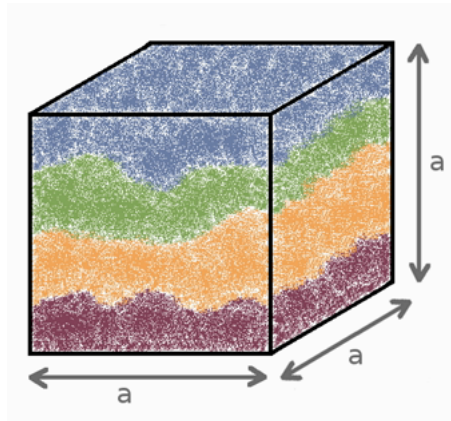


Bild 1

Da die Folie sehr stabil ist, kann er sie nicht knicken, sondern nur in Quadrate zerschneiden und die Kanten mit durchsichtigem Klebeband verschließen.

Klebeband und die Farben, mit denen er den Sand färben möchte, hat er bereits. Die Folie und den Sand muss er noch kaufen.

Nun überlegt er, wie groß der Würfel werden soll. Er möchte dazu ausrechnen, wie viel es ihn kostet, wenn der Würfel eine bestimmte Kantenlänge a besitzt.

- Der Speziands im Bastelbedarf kostet 8,90 EUR pro Liter.
- Die Folie kostet 2,35 EUR pro dm^2 .

Hinweis: „Liter“ ist eine Einheit für Volumen. Ein Liter entspricht einem dm^3 .
Ein Dezimeter (dm) ist ein Zehntel von einem Meter.

Aufgabe 1:

Was kostet es, wenn er einen Würfel der Kantenlänge 8 cm basteln möchte? Runden Sie alle Ergebnisse auf ganze Cent auf bzw. ab.

Es kostet .

Lösung:

8 cm entsprechen 0,08 m oder 0,8 dm.

Der Sand soll das Volumen des Würfels ausfüllen. Das Volumen eines Würfels mit Kantenlänge a beträgt $V = a^3$.

Der Würfel hätte in diesem Fall also ein Volumen von

$$a^3 = (0,8 \text{ dm})^3 = 0,512 \text{ dm}^3 = 0,512 \text{ Liter}$$

Für den Sand, mit dem er das Würfelvolumen füllen möchte, muss er daher

$$0,512 \cdot 8,90 \frac{\text{EUR}}{\text{Liter}} \approx 4,56 \text{ EUR}$$

bezahlen.

Mit der Folie muss die gesamte Oberfläche des Würfels abgedeckt werden. Diese besteht aus 6 quadratischen Flächen, die jeweils die Größe a^2 besitzen, also insgesamt $F = 6a^2$.

In diesem Fall beträgt die Fläche also

$$6a^2 = 6 \cdot (0,8 \text{ dm})^2 = 3,84 \text{ dm}^2$$

Für diese Fläche Folie muss er daher

$$3,84 \text{ dm}^2 \cdot 2,35 \frac{\text{EUR}}{\text{dm}^2} \approx 9,02 \text{ EUR}$$

bezahlen.

Insgesamt kostet ihn der Würfel also mindestens

$$4,56 \text{ EUR} + 9,02 \text{ EUR} = 13,58 \text{ EUR}.$$

Das ist nur ein Mindestpreis, denn es kann sein, dass der Sand nur in Tüten von bestimmter Größe vorhanden ist und er mehr kaufen muss, als er eigentlich braucht. Entsprechend kann es sein, dass es die Folie nur in bestimmten Breiten gibt und er mehr kaufen muss.

Man kann den Zusammenhang zwischen den Kosten, die für den Jungen anfallen, und der Kantenlänge a des Würfels auch mithilfe einer Funktion beschreiben. Diese Funktion bildet die Kantenlänge a auf den dazugehörigen Preis $P(a)$ ab.

Ihre Definitionsmenge besteht daher aus allen Werten, die für die Kantenlänge a zulässig sind. Dies sind reelle, nichtnegative Werte, also $\mathbb{R}_0^+$. In der Praxis gibt es eine Obergrenze für Werte von a . Da diese nicht genau bekannt ist, werden für a alle nichtnegativen Werte zugelassen. Negative Werte für die Kantenlängen ergeben keinen Sinn.

Die Wertemenge der Funktion besteht aus den Werten, die für den Preis $P(a)$ in Frage kommen. Auch diese Werte müssen positiv sein, sodass sich auch hier $\mathbb{R}_0^+$ ergibt und man insgesamt $P : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ erhält.

Die Zuordnungsvorschrift dieser Funktion soll nun aufgestellt werden.

Aufgabe 2:

Wie hoch ist der Preis, den der Junge für den Sand bezahlen muss, in Abhängigkeit von der Kantenlänge a des Würfels? (Die Kantenlänge sei in dm angegeben.)

$$P_{\text{Sand}} = \boxed{?}$$

Lösung:

Um den Preis zu ermitteln, den der Junge für den Sand bezahlen muss, muss man das Volumen des Würfels, also a^3 , mit dem Preis des Sandes pro Volumen, also $\frac{\text{EUR}}{\text{dm}^3}$ multiplizieren:

$$P_{\text{Sand}}(a) = 8,9 \cdot a^3$$

Wie hoch ist der Mindestpreis, den der Junge für die Folie bezahlen muss, in Abhängigkeit von der Kantenlänge a des Würfels? (Die Kantenlänge sei in dm angegeben.)

$$P_{\text{Folie}} = \boxed{?}$$

Lösung:

Um den Preis zu ermitteln, den der Junge für die Folie bezahlen muss, muss man die Oberfläche des Würfels, also $6a^2$, mit dem Preis der Folie pro Fläche, also $\frac{\text{EUR}}{\text{dm}^2}$ multiplizieren:

$$P_{\text{Folie}}(a) = 2,35 \cdot 6 \cdot a^2 = 14,1 \cdot a^2$$

Stellen Sie jetzt die Zuordnungsvorschrift der Funktion $P(a)$ auf, die den Gesamtmindestpreis in Abhängigkeit der Kantenlänge beschreibt.

$$\text{Es gilt } P : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \text{ mit } P(a) = \boxed{?}$$

Lösung:

Um den Gesamtpreis zu erhalten, muss man lediglich die beiden Teilpreise addieren und erhält:

$$P(a) = 8,9 \cdot a^3 + 14,1 \cdot a^2$$

Die Funktion, die man so erhalten hat, besteht also aus der Summe von zwei Termen, in denen die Variable a mit verschiedenen Potenzen auftritt. Solche Funktionen nennt man **Polynomfunktionen**.

Inhalte mit Erklärungen

Polynomfunktionen

Definition 1:

Eine **Polynomfunktion** oder **ganzrationale Funktion** ist eine Funktion

$$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

wobei $n \in \mathbb{N}_0$ der **Grad** des Polynoms ist und $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$ die Koeffizienten sind.

Bemerkungen

- $\mathbb{N}_0$ bezeichnet die natürlichen Zahlen mit 0.
- $\mathbb{N}$ bezeichnet die natürlichen Zahlen ab der 1.

Beispiel 1:

Die konstante Polynomfunktion $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$p(x) = 5$$

ist eine Polynomfunktion vom Grade 0.

Beispiel 2:

Die Polynomfunktion $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$p(x) = 3x^2 - \frac{7}{2}x^4 + 12x$$

besitzt den Grad 4, da als höchste Potenz x^4 auftritt. Man kann sie auch nach Potenzen geordnet schreiben, um die Koeffizienten besser ablesen zu können:

$$p(x) = -\frac{7}{2}x^4 + 0 \cdot x^3 + 3x^2 + 12x + 0$$

Die Koeffizienten lauten also:

$$a_4 = -\frac{7}{2}, a_3 = 0, a_2 = 3, a_1 = 12 \text{ und } a_0 = 0.$$

Die folgende Abbildung zeigt beispielhaft die Graphen einiger Polynomfunktionen:

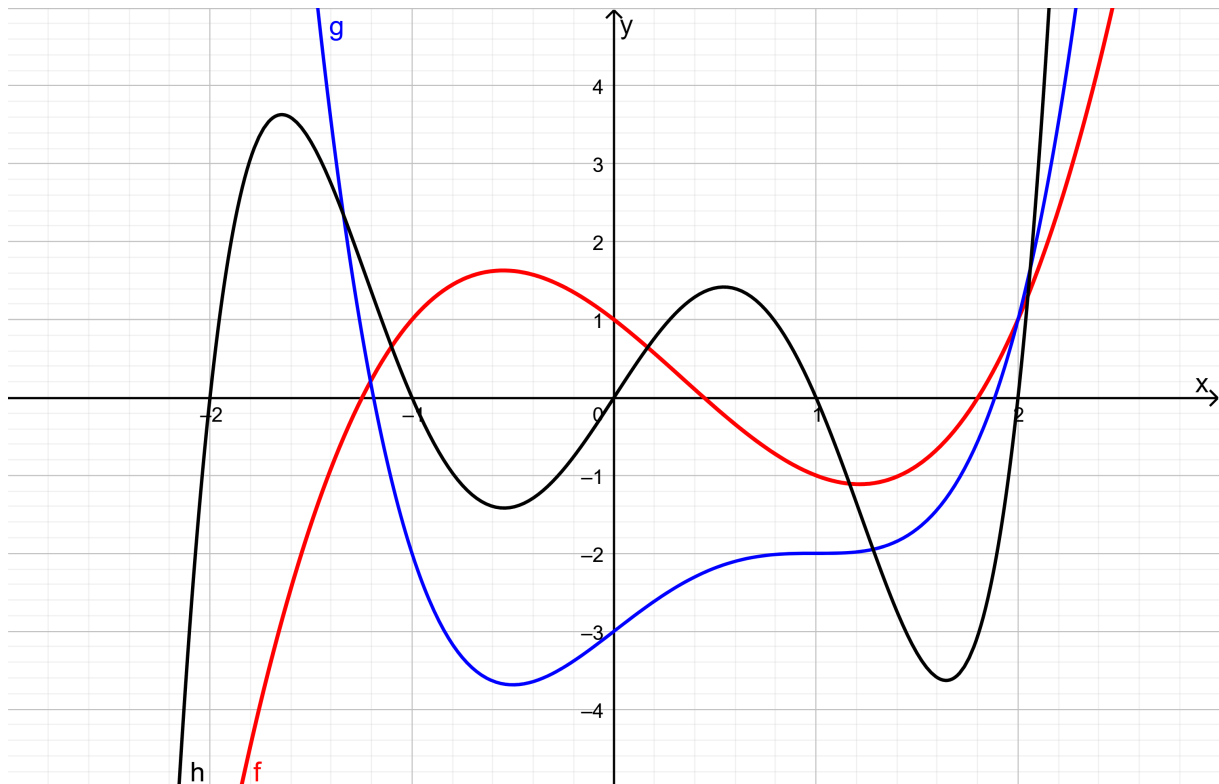


Bild 2 Graphen der Polynomfunktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ (rot), $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^4 - 2x^3 + 2x - 3$ (blau) und $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$ (schwarz).

Gleichheit von Polynomfunktionen

Satz 1:

Seien $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ q(x) &= b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

mit $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$ und $b_n \neq 0$ zwei Polynomfunktionen vom Grad $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $p(x) = q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn alle Koeffizienten übereinstimmen, also wenn $a_j = b_j$ für alle $j = 0, \dots, n$.

Durch **Koeffizientenvergleich** kann demnach die Gleichheit zweier Polynomfunktionen "überprüft" werden. Insbesondere können Polynomfunktionen verschiedenen Grades nicht gleich sein.

Begründung (Aufklapptext)

Wenn die Koeffizienten gleich sind, dann sieht man sofort, dass $p(x) = q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Die Umkehrung „Falls $p(x) = q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann sind alle Koeffizienten gleich“ ist mathematisch wesentlich schwerer zu begründen. Auf einen Beweis wird an dieser Stelle verzichtet. In der Schule hat man diesen Sachverhalt intuitiv vorausgesetzt, z.B. dass zu einem Graph einer Parabel genau eine Gleichung gehört, wenn man sie in der Form $y = ax^2 + bx + c$ aufschreibt.

Nullstellen von Polynomfunktionen

Definition 2:

Sei $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion vom Grad $n \in \mathbb{N}$ (d.h. $n \geq 1$). Eine Zahl $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt Nullstelle von p , falls $p(x_0) = 0$.

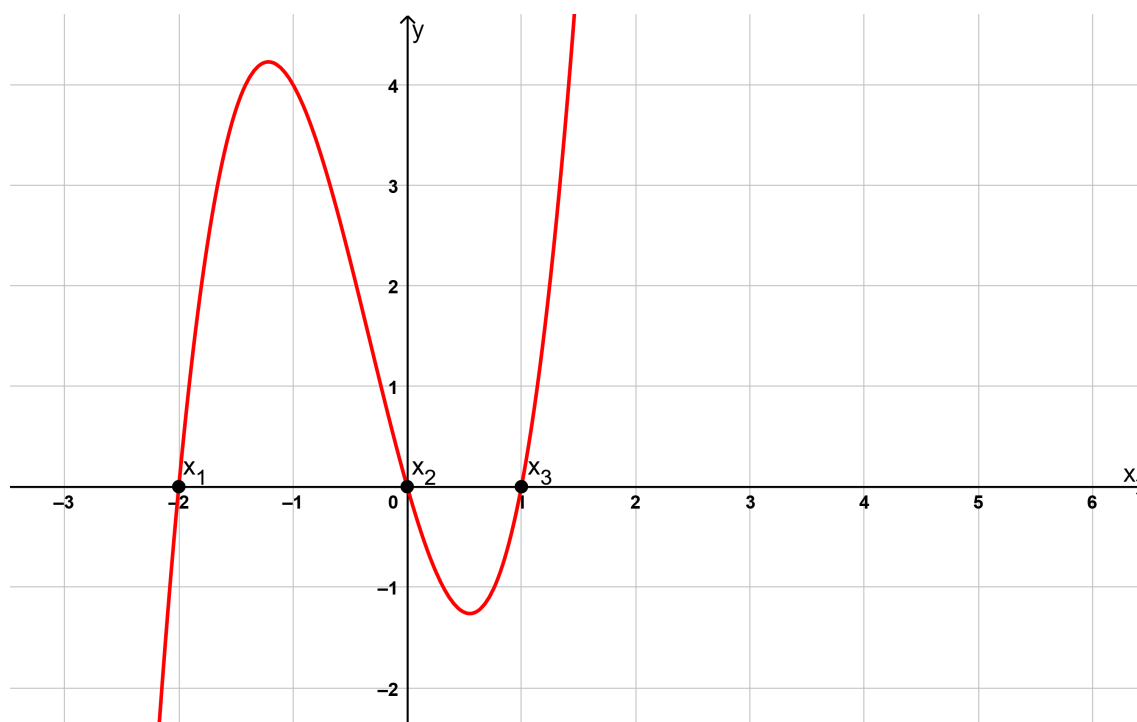


Bild 3 Graph der Polynomfunktion dritten Grades mit drei Nullstellen bei $x_1 = -2$; $x_2 = 0$ und $x_3 = 1$. Es gilt: $P(x) = 2 \cdot (x + 2) \cdot (x - 1) \cdot x$

Die Polynomfunktionen vom Grad 0, also diejenigen $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die durch $p(x) = a_0$ mit $a_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert sind, haben keine Nullstellen.

Aufgaben

Aufgabe 3:

Wie müssen die Koeffizienten a, b, c gewählt werden, damit die beiden folgenden Polynomfunktionen übereinstimmen?

$$p(x) = 5x^3 - 7x^2 + 1, \quad q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$$

$$a = \boxed{?}$$

$$b = \boxed{?}$$

$$c = \boxed{?}$$

Lösung:

In der ausführlichen Darstellung der Polynomfunktion $p(x) = 5x^3 - 7x^2 + 0x + 1$ lassen sich die Koeffizienten von $q(x)$ direkt ablesen. Demnach gilt $q(x) = p(x)$ für

$$a = 5 \quad b = -7 \quad c = 0.$$

Aufgabe 4:

Prüfen Sie, ob in den nachfolgenden Beispielen Polynomfunktionen vorliegen. Begründen Sie Ihre Antwort. Falls die Funktion eine Polynomfunktion ist, dann bestimmen Sie auch deren Grad sowie die Koeffizienten $a_n, \dots, a_0$.

- $f_1(x) = 4$
☐ Ja
☐ Nein

Lösung:

$f_1(x) = 4$ ist eine Polynomfunktion vom Grad 0 mit dem Koeffizienten $a_0 = 4$.

- $f_2(x) = 2^x + 3x^2 + 4$
☐ Ja
☐ Nein

Lösung:

$f_2(x) = 2^x + 3x^2 + 4$ ist keine Polynomfunktion, da die Exponentialfunktion 2^x als Summand enthalten ist.

- $f_3(x) = x + \frac{x^2}{4} + 3\frac{x^3}{x^4+2}$
☐ Ja
☐ Nein

Lösung:

$f_3(x) = x + \frac{x^2}{4} + 3\frac{x^3}{x^4+2}$ ist ebenfalls keine Polynomfunktion, da hier einer der Summanden die gebrochenrationale Funktion $\frac{3x^3}{x^4+2}$ ist.

- $f_4(x) = \frac{3x}{2} + \frac{2x}{4} - x^3$
☐ Ja
☐ Nein

Lösung:

$f_4(x) = \frac{3x}{2} + \frac{2x}{4} - x^3$ ist eine Polynomfunktion dritten Grades. Zur Bestimmung der Koeffizienten muss die Funktion allerdings noch vereinfacht werden. Mit

$$\begin{aligned} f_4(x) &= 3x : 2 + \frac{2x}{4} - x^3 \\ &= -x^3 + \frac{3}{2}x + \frac{2}{4}x \\ &= -x^3 + 2x \end{aligned}$$

ergeben sich schließlich die Koeffizienten

$$a_3 = -1, \quad a_2 = 0, \quad a_1 = 2 \quad \text{und} \quad a_0 = 0.$$

- $f_5(x) = 6x^3 - \frac{4x^2-64}{2x-8}$
☐ Ja
☐ Nein

Lösung:

Umformung ergibt:

$$\begin{aligned} f_5(x) &= 6x^3 - \frac{4x^2 - 64}{2x - 8} \\ &= 6x^3 - \frac{(2x + 8)(2x - 8)}{2x - 8} \\ &= 6x^3 - (2x + 8) \\ &= 6x^3 - 2x - 8 \end{aligned}$$

Das Endergebnis der Umformung sieht nach einer Polynomfunktion dritten Grades aus. Doch die Stelle $x = 4$ muss aus der Definitionsmenge ausgeschlossen werden, damit in der ursprünglichen Darstellung der Funktion nicht durch 0 geteilt wird. Aber nach Definition sind Polynomfunktionen immer auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, weshalb mit f_5 **keine** Polynomfunktion vorliegt.

- $f_6(x) = x^{\frac{4}{2}} + 2x^3$
☐ Ja
☐ Nein

Lösung:

f_6 ist mit $f_6(x) = x^{\frac{4}{2}} + 2x^3 = x^2 + 2x^3$ eine Polynomfunktion dritten Grades mit den Koeffizienten

$$a_3 = 2, \quad a_2 = 1, \quad a_1 = 0 \quad \text{und} \quad a_0 = 0.$$

- $f_7(x) = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^4 + 2x^3$
☐ Ja
☐ Nein

Lösung:

Es wird umgeformt:

$$\begin{aligned} f_7(x) &= \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^4 + 2x^3 \\ &= (\sqrt{x})^4 + 2x^3 \\ &= x^2 + 2x^3 \end{aligned}$$

Die Funktion f_7 kann in das Format einer Polynomfunktion gebracht werden. Allerdings ist $\sqrt{x}$ nur für $x \geq 0$ definiert. Die maximale Definitionsmenge von $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^4 + 2x^3$ ist $\mathbb{R}_0^+$. Deshalb würde man $f_7(x)$ nicht als Polynomfunktion im Sinne der Definition bezeichnen.

Aufgabe 5:

Durch Koeffizientenvergleich bestimme man a und b , sodass gilt:

$$a(x + 3) + b = 2x + 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} a &= \boxed{?} \\ b &= \boxed{?} \end{aligned}$$

Lösung:

Es wird zunächst ausmultipliziert:

$$a(x + 3) + b = ax + 3a + b.$$

Damit lässt sich die Gleichung schreiben als

$$ax + 3a + b = 2x + 1.$$

Hieraus folgt $a = 2$ und $3a + b = 1$.

$a = 2$ lässt sich nun direkt in $3a + b = 1$ einsetzen, sodass letztlich auch b berechnet werden kann:

$$3 \cdot 2 + b = 1 \quad \Leftrightarrow \quad b = 1 - 6 = -5$$

Insgesamt ist somit $a = 2$ und $b = -5$.

Aufgabe 6:

Durch Koeffizientenvergleich bestimme man a und b , sodass gilt:

$$a(x - 4) + b(x + 3) = 2x - 5 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

$$a = \boxed{?}$$

$$b = \boxed{?}$$

Lösung:

Aus

$$a(x - 4) + b(x + 3) = 2x - 5$$

folgt durch Ausmultiplizieren der linken Seite

$$ax - 4a + bx + 3b = 2x - 5.$$

Zusammenfassen der Koeffizienten von x -Termen gleicher Potenzordnung liefert die Gleichung

$$(a + b)x - 4a + 3b = 2x - 5,$$

aus der durch Koeffizientenvergleich die folgenden beiden Gleichungen abgelesen werden kann:

$$\begin{aligned} a + b &= 2 \\ -4a + 3b &= -5 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen bilden ein lineares Gleichungssystem, siehe hierzu auch die Lerneinheit *Lineare Gleichungssysteme*.

Aus der ersten Gleichung ergibt sich $b = 2 - a$, was in die zweite eingesetzt werden kann, um dadurch a zu erhalten:

$$\begin{aligned} -4a + 3(2 - a) &= -5 && | \text{ausklammern} \\ \Leftrightarrow -4a + 6 - 3a &= -5 && | \text{zusammenfassen} \\ \Leftrightarrow -7a + 6 &= -5 && | -6 \\ \Leftrightarrow -7a &= -11 && | : (-7) \\ \Leftrightarrow a &= \frac{11}{7} \end{aligned}$$

Abschließend wird das Ergebnis $a = \frac{11}{7}$ noch in die Gleichung $b = 2 - a$ eingesetzt, und man erhält:

$$b = 2 - \frac{11}{7} = \frac{3}{7}.$$

Insgesamt ist demnach $a = \frac{11}{7}$ und $b = \frac{3}{7}$ zu wählen.

Aufgabe 7:

Suchen Sie bei den Lösungen von Studierenden zu folgender Aufgabe nach den Fehlern. Welche Ursachen können diesen zugrunde liegen? Geben Sie auch jeweils die korrekte Lösung an.

Aufgabenstellung:

Geben Sie bei den folgenden Polynomfunktionen $f_i(x)$ jeweils zunächst die allgemeine Darstellung $h_i(x)$ von Polynomfunktionen desselben Grades an und bestimmen Sie dann alle Koeffizienten so, dass gilt $f_i(x) = h_i(x)$.

- $f_1(x) = x^2 + 1$

Studierendenlösung: Die zugehörige Polynomfunktion hat allgemein die Darstellung $h_1(x) = a_1x + a_0$. Die Koeffizienten sind dementsprechend $a_1 = 1$ und $a_0 = 1$.

Lösung:

Die korrekte allgemeine Darstellung lautet $h_1(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ und die Koeffizienten sind $a_2 = 1$, $a_1 = 0$ und $a_0 = 1$.

Vermutlich hat der Studierende nur auf die Anzahl der Terme geachtet und somit übersehen, dass eine Polynomfunktion zweiten Grades vorliegt.

- $f_2(x) = x + 3$

Studierendenlösung: Es liegt eine Polynomfunktion ersten Grades vor. Dieses hat die allgemeine Funktionsvorschrift $h_2(x) = mx + n$. Damit gilt $f_2(x) = x + 3 = mx + n = h_2(x)$ für $m = 0$ und $n = 3$.

Lösung:

Die allgemeine Darstellung ist in dieser Lösung korrekt, allerdings gilt $m = 1$. Ursache für den Fehler ist der in f vor x „fehlende“ Koeffizient, der fälschlicherweise als Null interpretiert wurde.

- $f_3(x) = 3x^2 + 4x - 7$

Studierendenlösung: Es liegt eine Polynomfunktion zweiten Grades vor, das allgemein mit $h_3(x) = ax^2 + bx + c$ dargestellt werden kann. Mit $a = 3$, $b = 4$ und $c = 7$ gilt dann auch $f_3(x) = h_3(x)$

Lösung:

Die allgemeine Polynomfunktion ist erneut korrekt bestimmt, jedoch wurde beim letzten Koeffizienten das Vorzeichen vergessen, es gilt nämlich $c = -7$.

- $f_4(x) = 2x^2 + x^3 - x + 7$

Studierendenlösung: Es liegt eine Polynomfunktion dritten Grades mit $h_4(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ vor.

Für $a = 2$, $b = 1$, $c = -1$ und $d = 7$ gilt schließlich $h_4(x) = f_4(x)$.

Lösung:

Die Polynomfunktion 3. Grades wurde hier erkannt, die allgemeine Form richtig wiedergegeben, die Koeffizienten wurden jedoch vertauscht.

Der Studierende hat scheinbar übersehen, dass die Polynomfunktion nicht nach absteigenden Potenzen sortiert war und hat daher die Koeffizienten a und b falsch abgelesen. Richtig ist $a = 1$ und $b = 2$.

- $f_5(x) = 3$

Studierendenlösung: Diese Aufgabe ist nicht lösbar, da hier keine Polynomfunktion vorliegt.

Lösung:

In diesem Fall hat der Studierende nicht gewusst, dass $f(x) = a_0$ ebenfalls eine Polynomfunktion ist und dass der entsprechende Koeffizient $a_0 = 3$ lautet.

Aufgabe 8:

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$. Berechnen Sie die in der folgenden Skizze des Graphen eingezeichneten Nullstellen x_1 und x_2 .

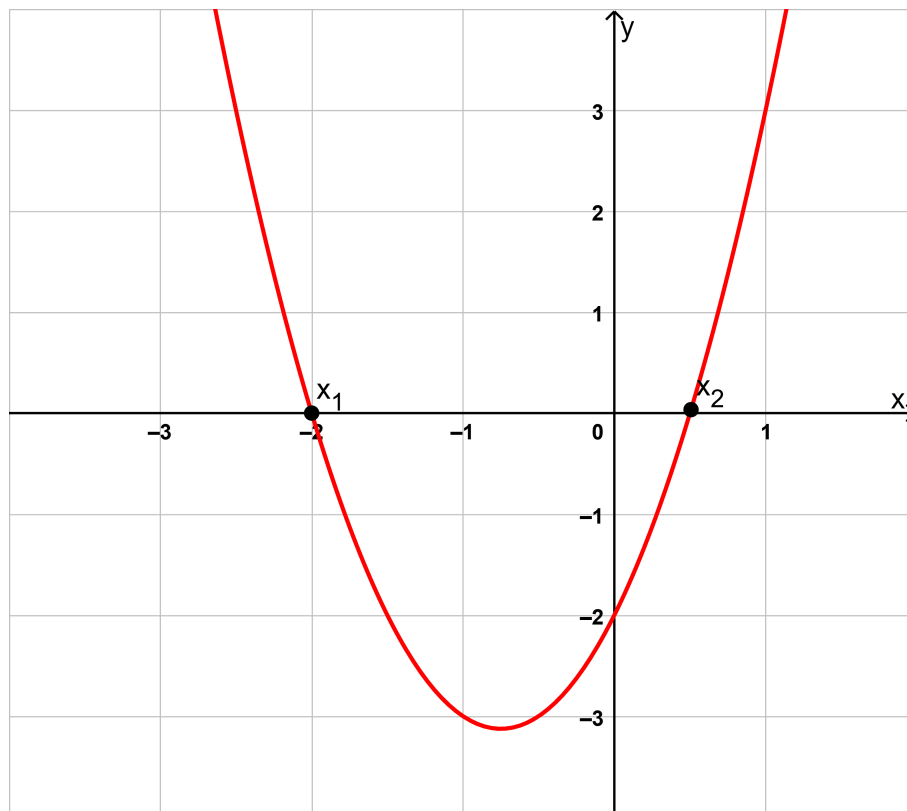


Bild 4 Graph von $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$ mit den beiden Stellen x_1 und x_2 .

Lösung:

Da an diesen Stellen die x -Achse geschnitten wird, gilt hier $f(x_1) = 0$ und $f(x_2) = 0$. Somit lassen sich x_1 und x_2 nicht nur ungefähr ablesen, sondern genau berechnen:

$$\begin{aligned} 0 &= 2x^2 + 3x - 2 \\ 0 &= x^2 + \frac{3}{2}x - 1 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der p - q -Formel ergibt sich:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 1} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16}} = -\frac{3}{4} \pm \frac{5}{4} \\ &\Rightarrow x_1 = 0,5 \quad \text{und} \quad x_2 = -2 \end{aligned}$$

Aufgabe 9:

Gegeben ist die Polynomfunktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = (x - 1)(x + 1,5)x$. Bestimmen Sie die Schnittstellen des Graphen von g mit der x -Achse möglichst geschickt und erläutern Sie kurz Ihr Vorgehen.

Lösung:

Da auch hier für die Nullstellen (also für die Schnittstellen mit der x -Achse) gilt $0 = f(x) = (x - 1)(x + 1,5)x$ und da ein Produkt genau dann Null ergibt, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist, müssen nur die Nullstellen der einzelnen Faktoren bestimmt werden. Diese ergeben sich einfach durch Auflösen der linearen Gleichungen nach x .

So folgt:

$$1. \quad x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1$$

$$2. \quad x + 1,5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1,5$$

$$3. \quad x_3 = 0$$

Die Nullstellen sind demnach in dieser „faktorierten“ Darstellungsform der Polynomfunktion direkt ablesbar.

Aufgabe 10:

Für welche a ist $x = 2$ Nullstelle der Funktion $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $p(x) = 5x^3 - 3x^2 + 3x - \frac{1}{a}$?

Lösung:

Die Bedingung $p(2) = 0$ ergibt für a

$$\begin{aligned} 5 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - \frac{1}{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow 40 - 12 + 6 - \frac{1}{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{a} &= -34 \\ \Leftrightarrow a &= \frac{1}{34} \end{aligned}$$

Für eine Nullstelle bei 2 muss gelten $a = \frac{1}{34}$.

Umgekehrt liegt für $a = \frac{1}{34}$ dort wirklich eine Nullstelle vor, wie eine Probe oder die Umkehrung der Umformungskette zeigen würde.

Anwendung

Beispiel 3:

Lösen von Gleichungen:

Bei der graphischen Betrachtung der Gleichung $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 = 4$ stellt man fest, dass beim Auflösen nach x die x -Werte der Schnittpunkte der beiden Polynomfunktionen $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ und $f_2(x) = 4$ berechnet werden. Die folgende Grafik veranschaulicht dies:

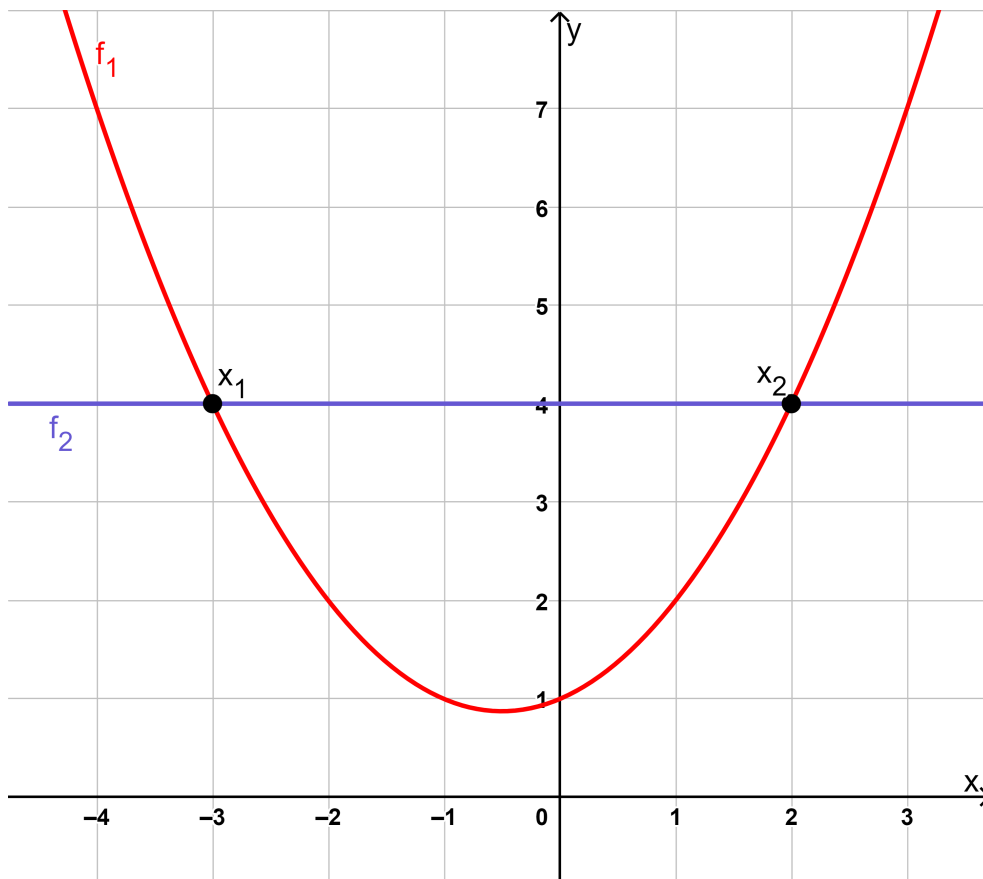


Bild 5 Die Graphen von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ und deren beide Schnittstellen x_1 und x_2 .

Nun wird die Differenzfunktion $f_3(x) = f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 3$ gebildet. Diese Funktion entsteht aus f_1 durch Verschiebung aller Punkte um 4 nach unten, sodass folgende Situation entsteht:

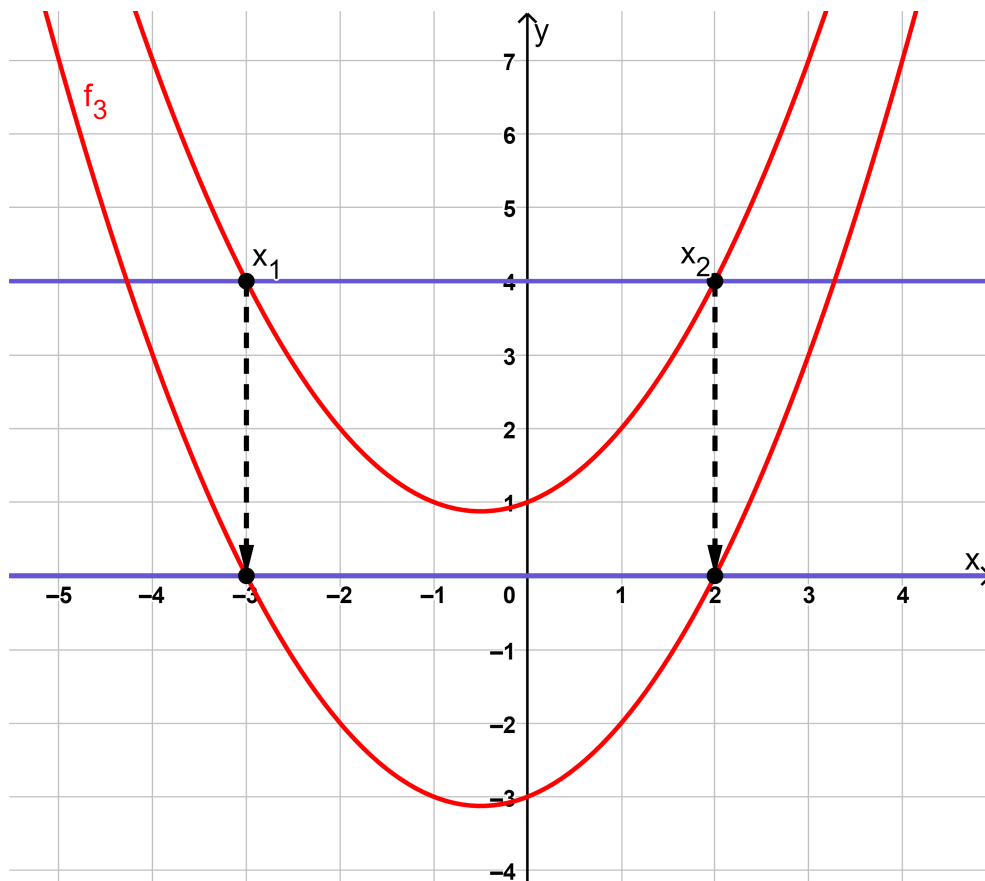


Bild 6 Graphische Darstellung des Subtraktionsprozesses, bei dem die neue Funktion $f_3(x) = f_1(x) - f_2(x)$ entsteht (roter Graph).

Die Bedingung $f_1(x) = f_2(x)$ ist äquivalent zu $f_3(x) = 0$. Die Nullstellen der neuen Polynomfunktion

$$f_3(x) = f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 3$$

liefern die Lösung der Gleichung. Allgemein lässt sich festhalten, dass das Lösen der Gleichung $f(x) = g(x)$ äquivalent ist zur Berechnung der Nullstellen der Differenz $f(x) - g(x)$ der beiden Funktionen.

Ergänzungen

Beispiel 4:

Spezialfälle bei der Nullstellenberechnung

Die Berechnung der Nullstellen einer Polynomfunktion höheren Grades ist oft nicht ohne weiteres durchführbar. In einigen Spezialfällen kann allerdings die Nullstellenberechnung durch geschickte Umformung erleichtert werden. Zwei dieser Spezialfälle werden hier vorgestellt.

Spezialfall 1: In jedem Summand der Polynomfunktion ist x^k mit $k \geq 1$ als Faktor enthalten.

Mit anderen Worten, es ist möglich x^k auszuklammern. Das nachstehende Beispiel zeigt, wie die Vereinfachung anzuwenden ist.

Sei $f(x) = 2x^5 + 6x^4 - 8x^3$ eine Polynomfunktion, deren Nullstellen berechnet werden sollen. In diesem Beispiel ist in jedem Summand x^3 als Faktor enthalten, sodass dieser Term zunächst ausgeklammert werden kann:

$$f(x) = x^3(2x^2 + 6x - 8).$$

Dies verkürzt die Nullstellenberechnung, da direkt $2x^2 + 6x - 8 = 0$ oder $x^3 = 0$ gefolgert werden kann. Damit wurde eine Nullstelle bei $x_1 = 0$ gefunden, und es müssen nun lediglich die Nullstellen der quadratischen Restpolynomfunktion berechnet werden:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 6x - 8 = 0 &\Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \\ \Rightarrow x_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4} &= -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \\ \Rightarrow x_2 = 1 \quad \text{und} \quad x_3 = -4. \end{aligned}$$

Spezialfall 2: Die Polynomfunktion enthält nur gerade Potenzen von x .

Beispiel: Es sollen die Nullstellen der Polynomfunktion $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 4$ bestimmt werden.

Da die Polynomfunktion nur gerade Potenzen von x enthält, kann durch eine Substitution (Ersetzung) hier effektiver gearbeitet werden.

Dazu ersetzt man x^2 durch $z := x^2$ in der Funktion $g(x) = \frac{1}{4}(x^2)^2 - 2x^2 + 4$. Dadurch entsteht die quadratische Funktion $g(z) = \frac{1}{4}z^2 - 2z + 4$. Jetzt kann man die Nullstellen von $g(z)$ berechnen, wofür in diesem Fall sogar eine binomische Formel angewendet werden kann:

$$0 = \frac{1}{4}z^2 - 2z + 4 \Rightarrow 0 = z^2 - 8z + 16 \Rightarrow 0 = (z - 4)^2$$

$$\Rightarrow z = 4.$$

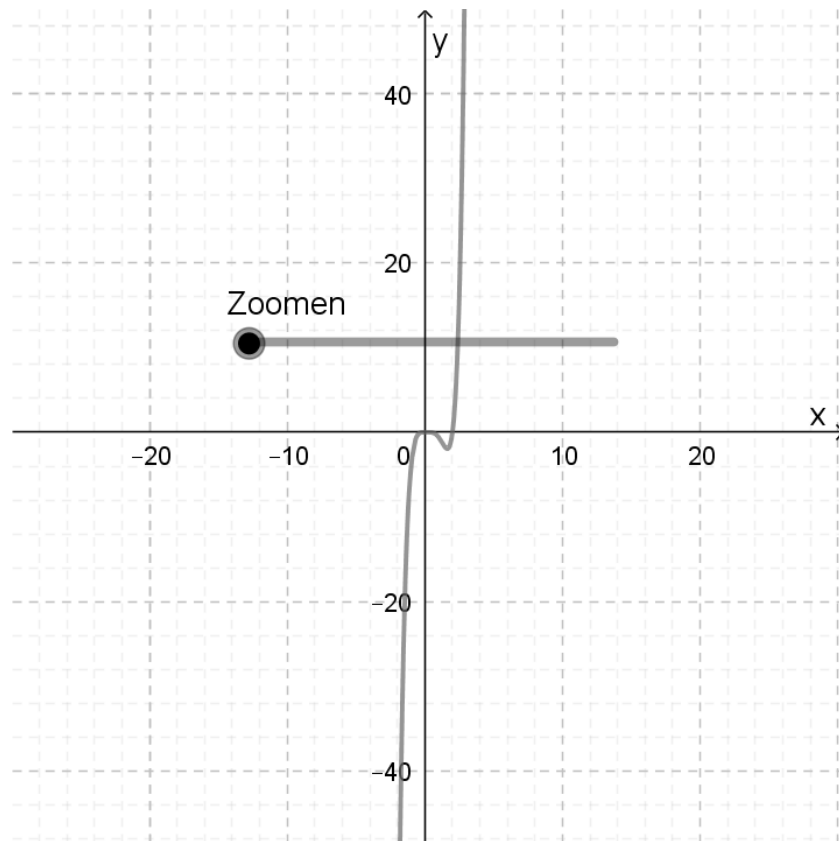
Damit kennt man die Nullstelle $z = 4$ von $g(z)$. Um letztlich die Nullstellen von $g(x)$ zu bestimmen, muss noch resubstituiert werden. Es ergibt sich damit:

$$z = x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = -2.$$

Missverständnisse bei Graphen von Polynomfunktionen

Manchmal verhindert ein großer Ausschnitt auch, dass Details erkannt werden können. Betrachten wir hierzu ebenfalls ein Beispiel:

Wir haben von einer Funktion den Graphen als Darstellung in einem Applet gegeben. Wie viele Nullstellen hat die Funktion? Beantworten Sie diese Frage zunächst ohne im Applet zu zoomen. Nutzen Sie anschließend die Zoom-Funktion und beantworten Sie die Frage erneut.



Interaktion 1 (nur in digitaler Version)

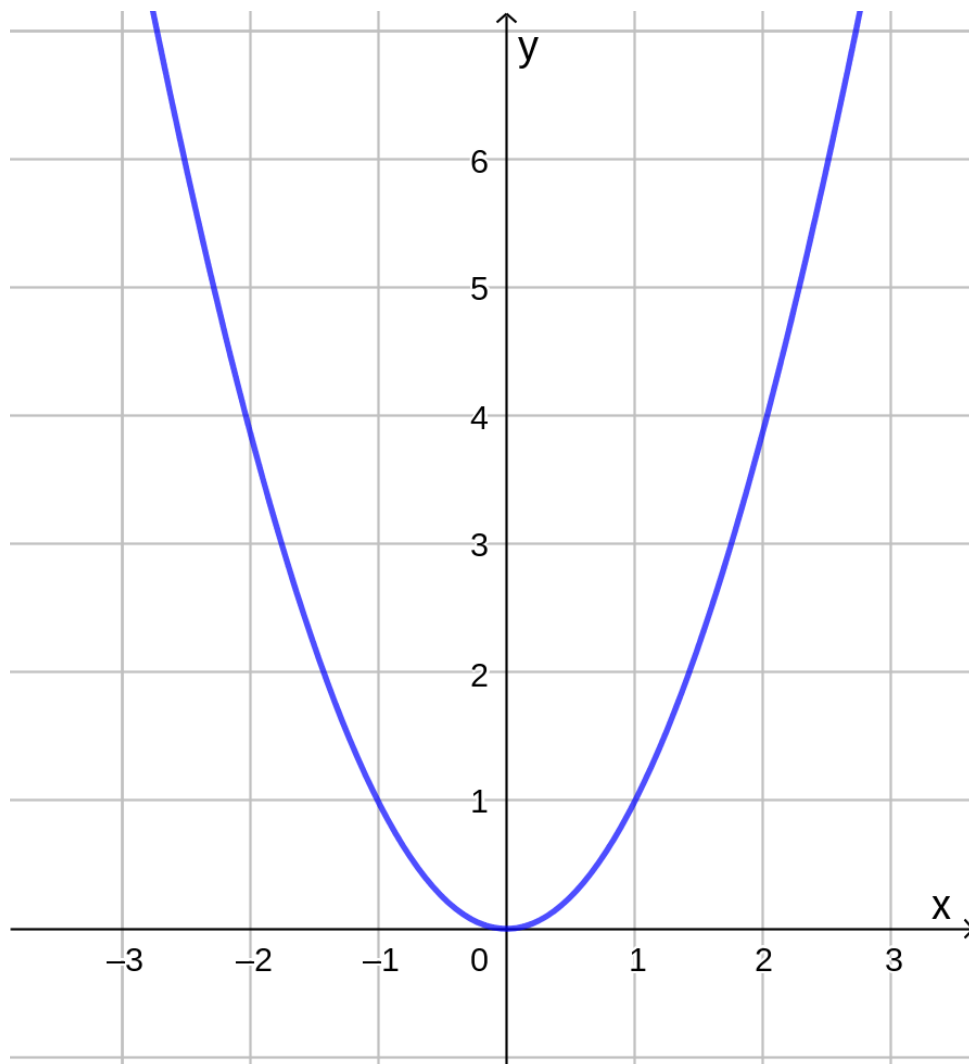


Bild 7 Zu diesem Graphen wird eine Funktionsgleichung gesucht.

Wir beschäftigen uns mit einem weiteren Beispiel und schauen uns den Graphen aus dem nebenstehenden Bild an. Wir versuchen nun die verwendete Funktionsvorschrift zu rekonstruieren.

Der Graph sieht wie eine Normalparabel aus.

Auch das (angenäherte) Ablesen der charakteristischen Punkte deutet daraufhin, dass es sich um eine Normalparabel handelt: Der Tiefpunkt liegt passend bei $(0;0)$. Der Graph verläuft durch die Punkte $(1;1)$ und $(2;4)$. Genauso passen auch die Punkt $(-1;1)$ und $(-2;4)$, weil der Graph achsensymmetrisch zur y -Achse ist. Zu den Punkten $(3;9)$ bzw. $(-3;9)$ haben wir keine Aussage, aber nach dem Verlauf am oberen Bildrand könnte der Graph die Punkte treffen.

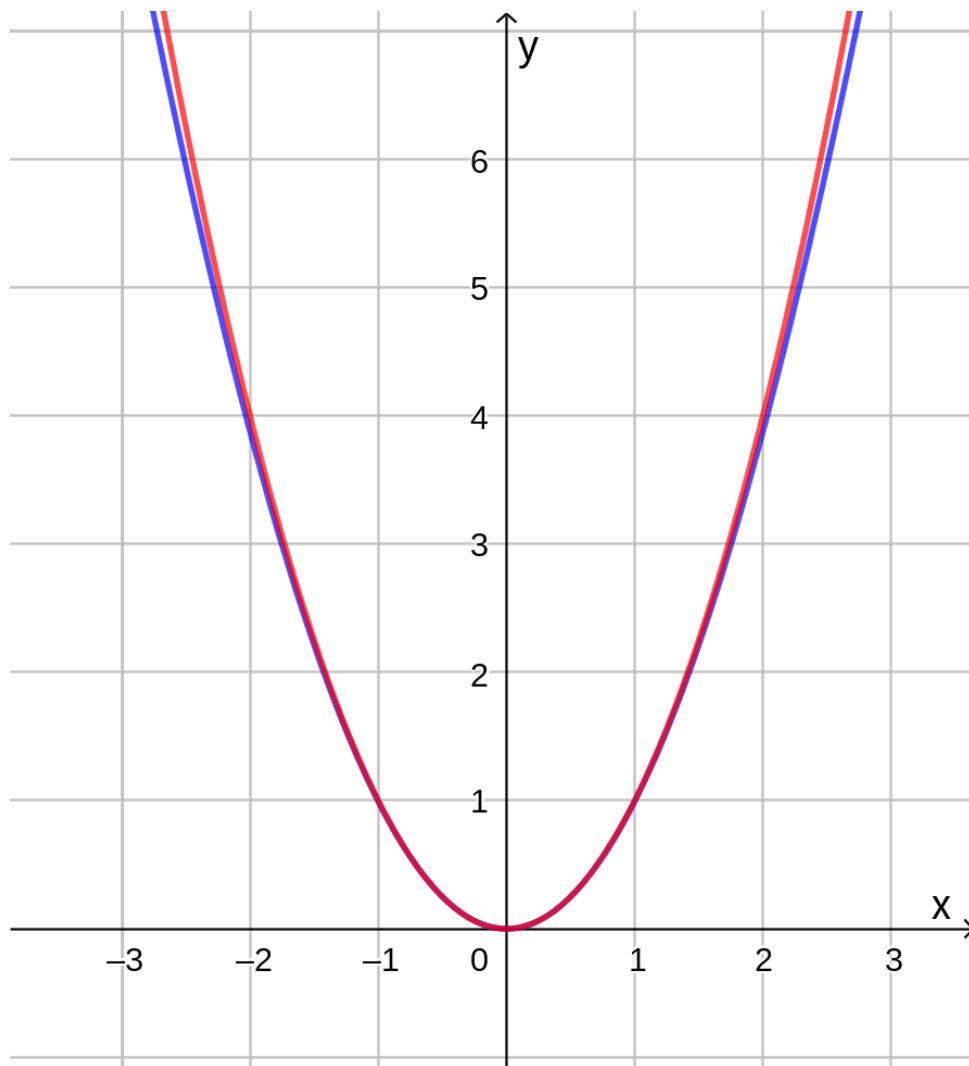
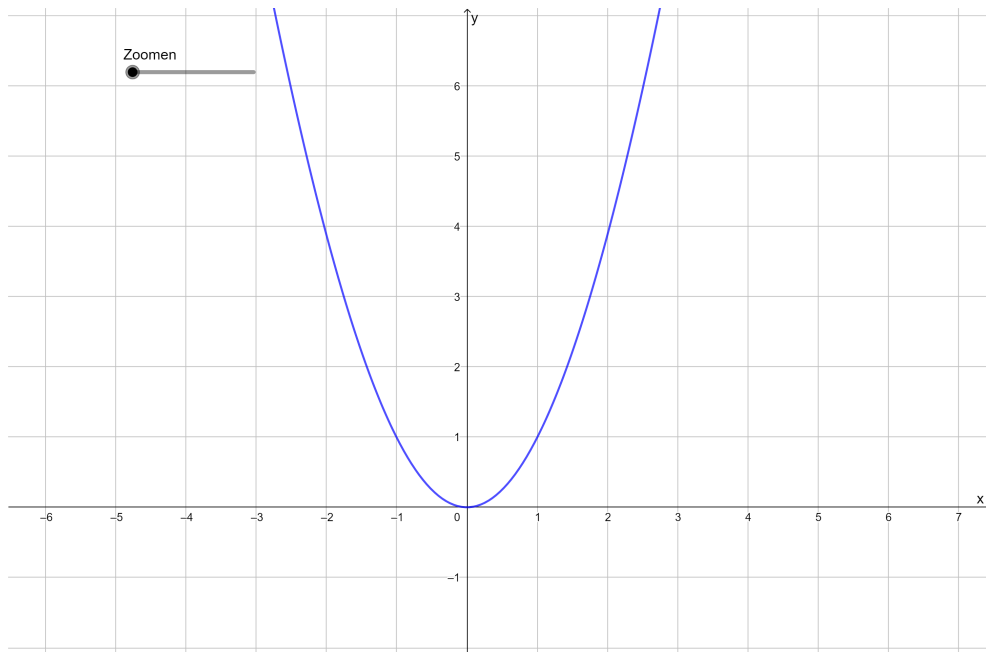


Bild 8 Zwei Graphen im Vergleich.

Um das weiter zu überprüfen, zeichnen wir zusätzlich die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ in rot in das Koordinatensystem ein. Das ergibt das nebenstehende Bild; beide Funktionen unterscheiden sich im Rahmen der Zeichengenauigkeit nicht. In der obigen Abbildung wird jedoch der Plot eines Graphen, der mit GeoGebra hergestellt wurde und welchem eine andere Funktionsvorschrift zu Grunde liegt, dargestellt. Nur auf Grundlage des gewählten Abschnitts war es nicht möglich, den gezeigten Graphenausschnitt von einer Normalparabel zu unterscheiden. Die weiteren Eigenschaften der dargestellten Funktion können nur erkundet werden, wenn weitere Informationen oder Darstellungsausschnitte vorliegen.

Das folgende Applet zeigt noch einmal den ursprünglichen Graphenausschnitt, dessen Darstellungsausschnitt Sie nun mit dem Schieberegler verändern können.



Interaktion 2 (nur in digitaler Version)

Die zum gezeigten Graphenausschnitt zugehörige Funktion ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{128} \cdot x^4 + x^2$. Wir stellen fest, es gibt zwei Funktionen, die in einem Abschnitt (beinahe) identisch aussehen, mathematisch bzw. in anderen Abschnitten aber unterschiedliche Eigenschaften haben.

Aufgabe 11:

Gehen Sie davon aus, dass das obige Applet den entsprechenden Ausschnitt des Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{1}{128} \cdot x^4 + x^2$ darstellt. Finden Sie durch geeignetes Zoomen im Applet heraus, welche (lokalen) Hoch- und Tiefpunkte f hat und in welchen Bereichen sie monoton steigt bzw. fällt.

Lösung:

In der nachfolgenden Abbildung sind die monoton steigenden Abschnitte in rot und die monoton fallenden Abschnitte des Graphenausschnitts in blau dargestellt. Die (lokalen) Hochpunkte bzw. der (lokale) Tiefpunkt befinden sich genau an den Stellen, an denen die beiden Farben des Graphenausschnitts sich abwechseln.

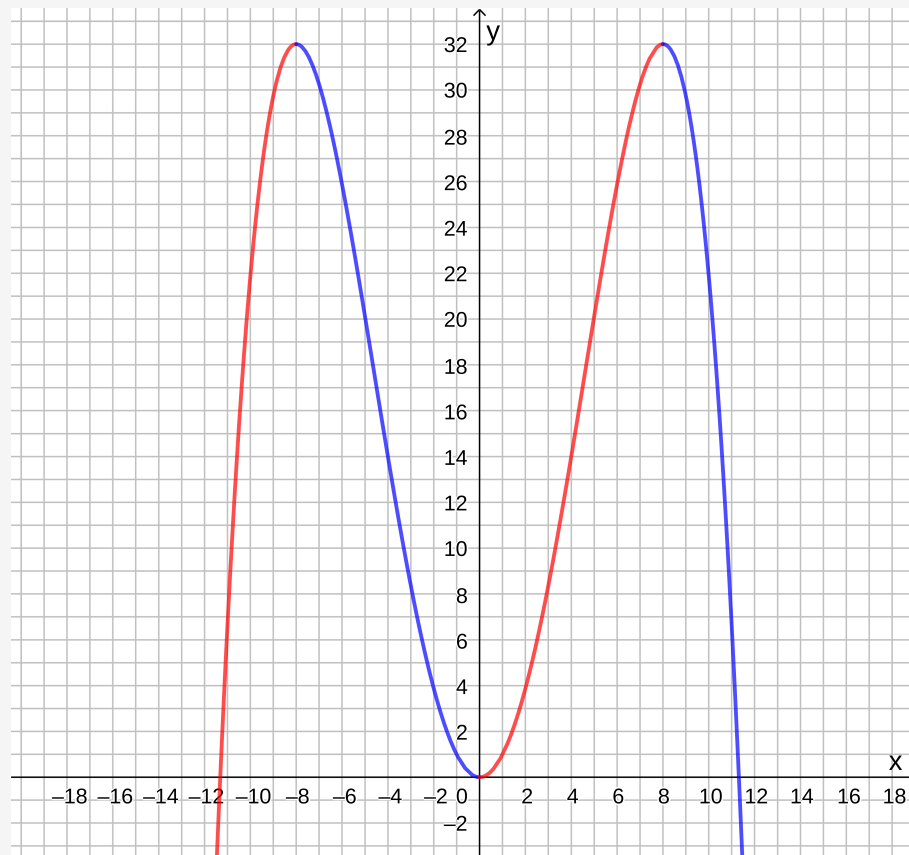


Bild 9

Durch (näherungsweise) Ablesen können diese Punkte bzw. Intervalle wie folgt angegeben werden:

- Die Hochpunkte sind $(-8; 32)$ und $(8; 32)$.
- Der Tiefpunkt ist $(0; 0)$.
- Der Graph steigt (streng) monoton für $x \leq -8$ sowie $0 \leq x \leq 8$.
- Der Graph fällt (streng) monoton für $-8 \leq x \leq 0$ sowie $8 \leq x$.

Für die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -\frac{1}{128} \cdot x^4 + x^2$ lässt sich berechnen, dass die obigen Angaben auf f exakt zutreffen.