

studiVEMINT-Kurs Mathematik

© studiVEMINT Team - Paderborn

FG Didaktik der Mathematik, Institut für Mathematik - Universität Paderborn

orca.nrw

studiVEMINT ist ein Teil des VEMINT Projektverbundes und damit ein Projekt des khdm.

LE 8 - Höhere Funktionen

8.6 Umgang mit Funktionen

Im Folgenden finden Sie die Abschnitte:

Übersicht	S. 1
Hinführung	S. 2
Inhalte mit Erklärungen	S. 3
Aufgaben	S. 16

Übersicht

- Umkehrfunktionen
- Operationen mit Funktionen

Hinführung

Die bisher betrachteten Funktionsvorschriften können dazu dienen, reale Zusammenhänge zwischen zwei Größen mathematisch zu beschreiben. Ein Beispiel aus der Wirtschaft ist die Nachfragefunktion. Diese gibt zu einem gegebenen Preis (p) für ein Gut an, welche Menge (N) davon nachgefragt wird. Der Preis stellt also das Argument, und die Nachfrage den Wert der Funktion dar. Die hier angenommene Nachfragefunktion lautet $N(p) = -10 \cdot p + 100$. Daraus ergeben sich die Wertpaare

p	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00
N	80	75	70	65	60

Mit Hilfe der Funktion $N(p)$ kann diese Tabelle für gegebene Preise beliebig ergänzt werden.

Aus Kapazitätsgründen ist in der Praxis allerdings auch die Fragestellung relevant, welcher Preis verlangt werden muss damit eine gewisse Menge nachgefragt wird. Eine mögliche Lösung wäre es, in der obigen Tabelle nachzusehen und bei einer gegebenen Nachfrage den entsprechenden Preis abzulesen. Welche Herangehensweisen gibt es aber, wenn die gesuchte Nachfragemenge nicht in der Tabelle aufgeführt ist? Möchte man den Preis zu jeder beliebigen Nachfrage berechnen, so benötigt man eine Funktion, die die Nachfrage als Argument und den Preis als Wert hat, aber bei der die Wertpaare von Preis und Nachfrage die gleichen sind wie bei der gegebenen Nachfragefunktion. Mit anderen Worten die obige Tabelle muss genauso gelten. Eine solche Funktion kehrt praktisch die Nachfragefunktion um. Diese Funktion erhält man hier, indem man die Nachfragefunktion als Gleichung betrachtet $N = -10 \cdot p + 100$ und diese nach dem Argument p auflöst. So erhält man $p(N) = -\frac{1}{10} \cdot N + 10$ als die gesuchte Funktion. Zumindest für die obige Tabelle lässt sich schnell prüfen, dass die Funktion $p(N)$ für alle Einträge gilt. Man spricht bei diesem Vorgehen von der Umkehrung einer Funktion, in diesem Beispiel der Nachfragefunktion. Im ersten Teil von „Inhalte mit Erklärungen“ wird auf die Umkehrung von Funktionen, wann diese möglich ist und welche Bedingungen hierfür erfüllt sein müssen näher eingegangen.

Im zweiten Teil von „Inhalte mit Erklärungen“ wird gezeigt, wie das Spektrum der bisher betrachteten Funktionen erweitert werden kann, indem man zwei Funktionen, welche nicht vom gleichen Typ sein müssen, miteinander kombiniert. Funktionen werden dabei als Objekte betrachtet, mit denen man operieren kann. Eine gute Möglichkeit, sich dies vorzustellen ist es, Funktionen der Art $f : D \rightarrow Z$ als Maschinen zu betrachten, die aus jedem Input $x \in D$ einen Output $f(x) \in Z$ herstellen.

In dieser Lehreinheit lernen Sie, dass man Funktionen ...

... umkehren kann:	Umkehrfunktion f^{-1}
... addieren und subtrahieren kann:	$f + g, f - g$
... multiplizieren und dividieren kann:	$f \cdot g, \frac{f}{g}$
... hintereinander ausführen kann:	$f \circ g$

Dabei ist es wichtig zwischen der Funktion f und einem speziellen Funktionswert $f(x)$ zu unterscheiden.

Inhalte mit Erklärungen

Wiederholung: Funktionen

Funktionen werden definiert durch ihre Definitionsmenge D , ihre Zielmenge Z und ihre Zuordnungsvorschrift.

Definition 1:

Gegeben sei eine Menge D , genannt **Definitionsmenge**, und eine Menge Z , genannt **Zielmenge**. Eine **Funktion** f ordnet jedem Element $x \in D$ genau ein Element $f(x) \in Z$ zu. Man schreibt:

$$f : D \rightarrow Z, \quad x \mapsto f(x)$$

Als Graph einer Funktion bezeichnet man die Menge aller Paare $(x, f(x))$ mit $x \in D$. Um sich den Verlauf einer Funktion zu veranschaulichen, ist es häufig hilfreich, einen Ausschnitt aus dem Funktionsgraphen zu zeichnen. In der Schule wird meistens ein Ausschnitt aus dem Graphen bereits als „der“ Funktionsgraph bezeichnet, obwohl es nur ein Ausschnitt ist.

Weitere Definitionen und Erklärungen zu den Grundlagen von Funktionen finden Sie in der Lerneinheit *Elementare Funktionen*.

Definition 2:

Seien D und Z Mengen. Sei $f : D \rightarrow Z$ eine Funktion. Als **Wertemenge** $f(D)$ von f bezeichnen wir die Menge aller y aus Z , die als Funktionswert angenommen werden:

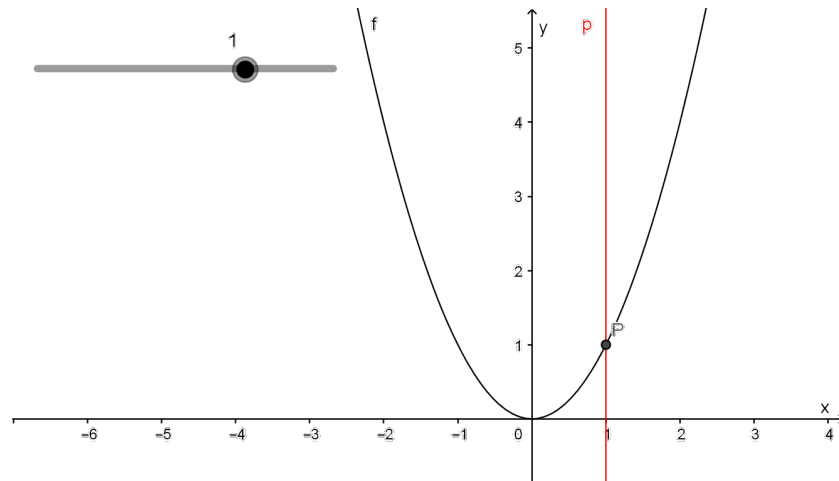
$$f(D) := \{y \in Z \mid \text{es gibt ein } x \in D \text{ mit } f(x) = y\}.$$

Definition 3:

Seien D und Z Mengen. Sei $f : D \rightarrow Z$ eine Funktion. Sei $x \in D$. Dann nennt man $y = f(x) \in Z$ das **Bild** von x . Umgekehrt sei $y \in f(D)$ mit $y = f(x)$ für ein $x \in D$. Dann nennt man x das **Urbild** von y .

Die Wertemenge ist eine Teilmenge der Zielmenge: Er besteht aus allen Funktionswerten, die die Funktion in der Zielmenge tatsächlich annimmt.

Für einen Funktionsgraphen einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt, dass jede Parallele zur y -Achse den Graphen in genau einem Punkt schneidet. Dies können Sie sich im nachfolgenden Applet durch Variation der x -Koordinate des Punktes P , der auf dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ liegt, veranschaulichen:



Interaktion 1 (nur in digitaler Version)

Achtung: Die Tatsache, dass Werte aus der Wertemenge (Bilder) einer Funktion mindestens ein Urbild besitzen, schließt folgende Möglichkeiten ein: Es kann genau ein Urbild geben oder es können mehrere Urbilder auftreten.

Beispiel: Bei der Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ besitzt der Funktionswert $f(x) = 4$ zwei Urbilder: $x = 2$ und $x = -2$, da sowohl $f(2) = 2^2 = 4$ als auch $f(-2) = (-2)^2 = 4$ gilt.

Nun betrachten wir diejenigen Funktionen, deren Zuordnung umkehrbar ist, d.h. bei denen es zu jedem Bild genau ein Urbild gibt.

Umkehrfunktionen

Definition 4:

Seien D und Z Mengen. Sei $f : D \rightarrow Z$ eine Funktion. Dann heißt die Funktion f umkehrbar, wenn es zu jedem Funktionswert $y \in Z$ **genau ein** Urbild gibt, d.h. genau ein $x \in D$ mit $f(x) = y$.

Bemerkung

- Bei einer umkehrbaren Funktion $f : D \rightarrow Z$ sind Werte- und Zielmenge gleich, d.h. $Z = f(D)$.

Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bedeutet das, dass jede Parallele zur x -Achse den Graphen genau einmal schneiden muss.

Beispiel 1:

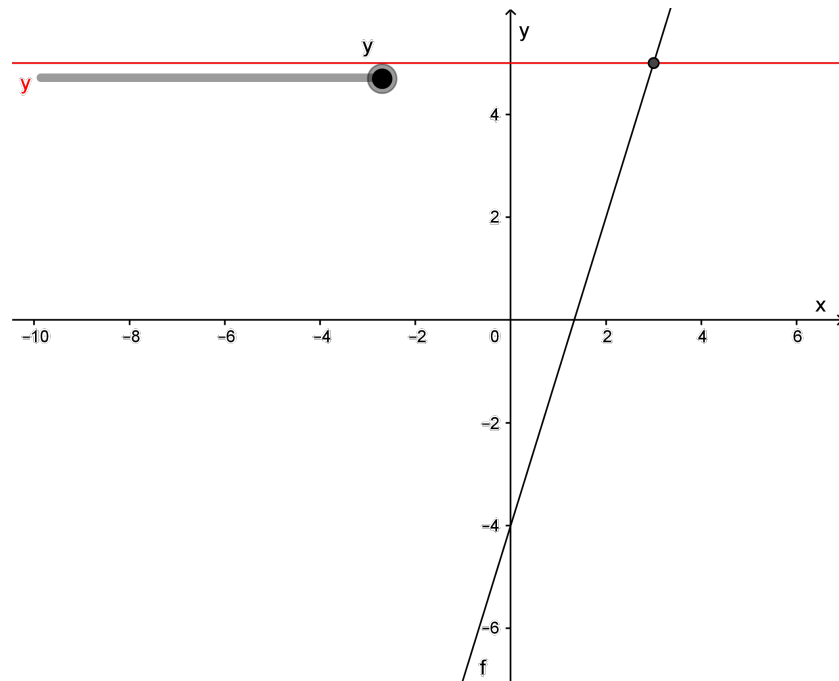
Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = 4x - 3$$

ist umkehrbar, denn jeder Wert y aus der Zielmenge $\mathbb{R}$ besitzt genau ein Urbild:

$$y = 4x - 3 \iff x = \frac{y + 3}{4}.$$

Variieren Sie zur Veranschaulichung dieser Tatsache im folgenden Applet, das den Graphen der Funktion $y = 4x - 3$ zeigt, den Wert von y .



Interaktion 2 (nur in digitaler Version)

Beispiel 2:

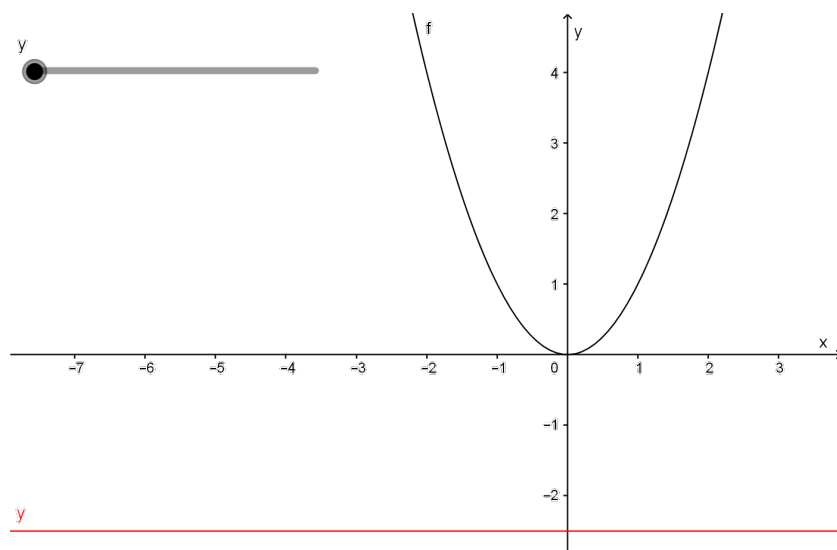
Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = x^2$$

ist nicht umkehrbar. Es würde eigentlich schon reichen zu sehen, dass es einen Wert in der Zielmenge gibt, der kein/ mehr als ein Urbild hat. Aber wir wollten uns die Situation für alle Werte in der Zielmenge anschauen. Denn nun können wir schauen, ob wir Definitions- und Zielmenge so einschränken können, dass wir eine umkehrbare Funktion bekommen. Jeder Wert $y > 0$ besitzt zwei Urbilder:

$$y = x^2 \iff x = \pm\sqrt{y}.$$

Zu allen Werten $y < 0$ existiert kein Urbild, für $y = 0$ gibt es genau ein Urbild $x = 0$. Dies können Sie durch Variation von y im nachfolgenden Applet, das den Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ zeigt, erkennen.



Interaktion 3 (nur in digitaler Version)

Die Funktion

$g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $g(x) = x^2$,

die also als Definitions- und Zielmenge nur die nichtnegativen reellen Zahlen besitzt, ist dagegen umkehrbar. Jeder Wert $y \in \mathbb{R}_0^+$ besitzt genau ein Urbild:

$$y = x^2 \iff x = \sqrt{y}.$$

H"aufg kann man Definitions- und Zielmenge so einschr"anken, dass eine umkehrbare Funktion entsteht. Durch diese Einschr"ankung erh"alt man eine neue Funktion.

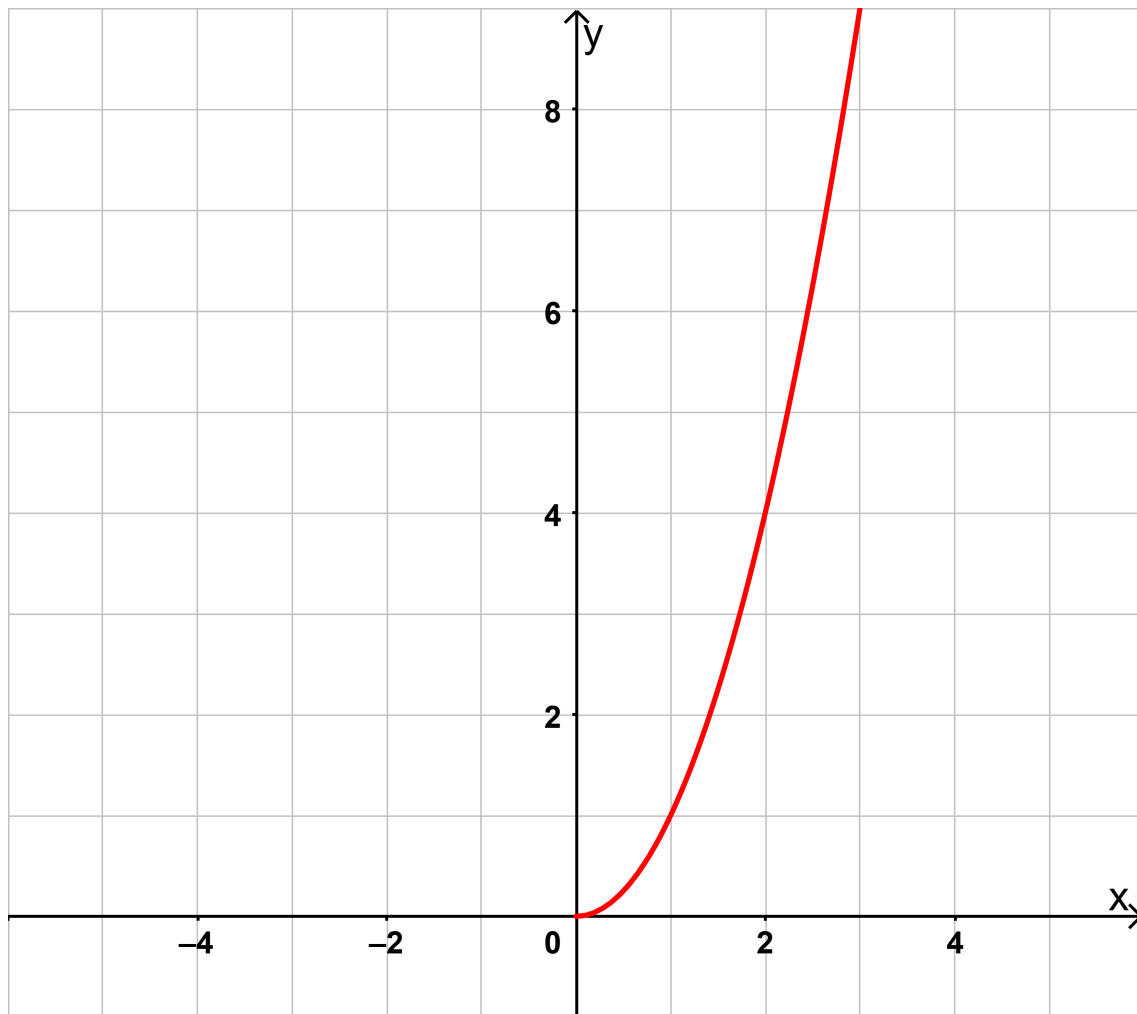


Bild 1 Die Funktion $g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $g(x) = x^2$

Bei der Umkehrfunktion spielen mehrere Aspekte eine Rolle. Die Umkehrung der Zuordnung, das Lösen von Gleichungen und die Verkettung.

Definition 5:

Seien D und Z Mengen. Sei $f : D \rightarrow Z$ eine umkehrbare Funktion. Dann heißt die Funktion $f^{-1} : Z \rightarrow D$, die jedem $y \in Z$ ihr Urbild $x \in D$ unter f zuordnet, **Umkehrfunktion** von f .

Bemerkungen

- Die Bezeichnung $f^{-1}(y)$ bedeutet nicht „mit -1 potenzieren“, also **nicht** $\frac{1}{f(y)}$, sondern man bezeichnet damit die Umkehrfunktion von f .
- Die Definitionsmenge der Umkehrfunktion ist Z , also die Zielmenge der ursprünglichen Funktion. Man schreibt auch $D_{f^{-1}} = Z = f(D_f)$.

Satz 1:

Wenn $f : D \rightarrow Z$ eine umkehrbare Funktion ist, dann gilt für alle x aus der Definitionsmenge D der Funktion f

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

und für alle y aus der Zielmenge Z von f

$$f(f^{-1}(y)) = y.$$

Anschaulich kann man sich f als eine Maschine vorstellen, die x in $f(x)$ überführt. Dann ist f^{-1} eine Maschine, die diesen Prozess rückgängig macht.

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{f^{-1}} x$$

$$y \xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}(y) \xrightarrow{f} y$$

Beispiel 3:

Wir betrachten die Funktion

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x - 4$.

Für gegebenes $y \in \mathbb{R}$ besitzt die Gleichung $y = 3x - 4$ genau eine Lösung:

$$x = \frac{1}{3}(y + 4).$$

Also erhält man die Umkehrfunktion:

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{3}(y + 4)$$

Um diese Funktion ins gleiche Koordinatensystem einzuzeichnen, geht man dazu über, die Variable der Umkehrfunktion mit x statt y zu bezeichnen und erhält die Umkehrfunktion

$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x + 4)$.

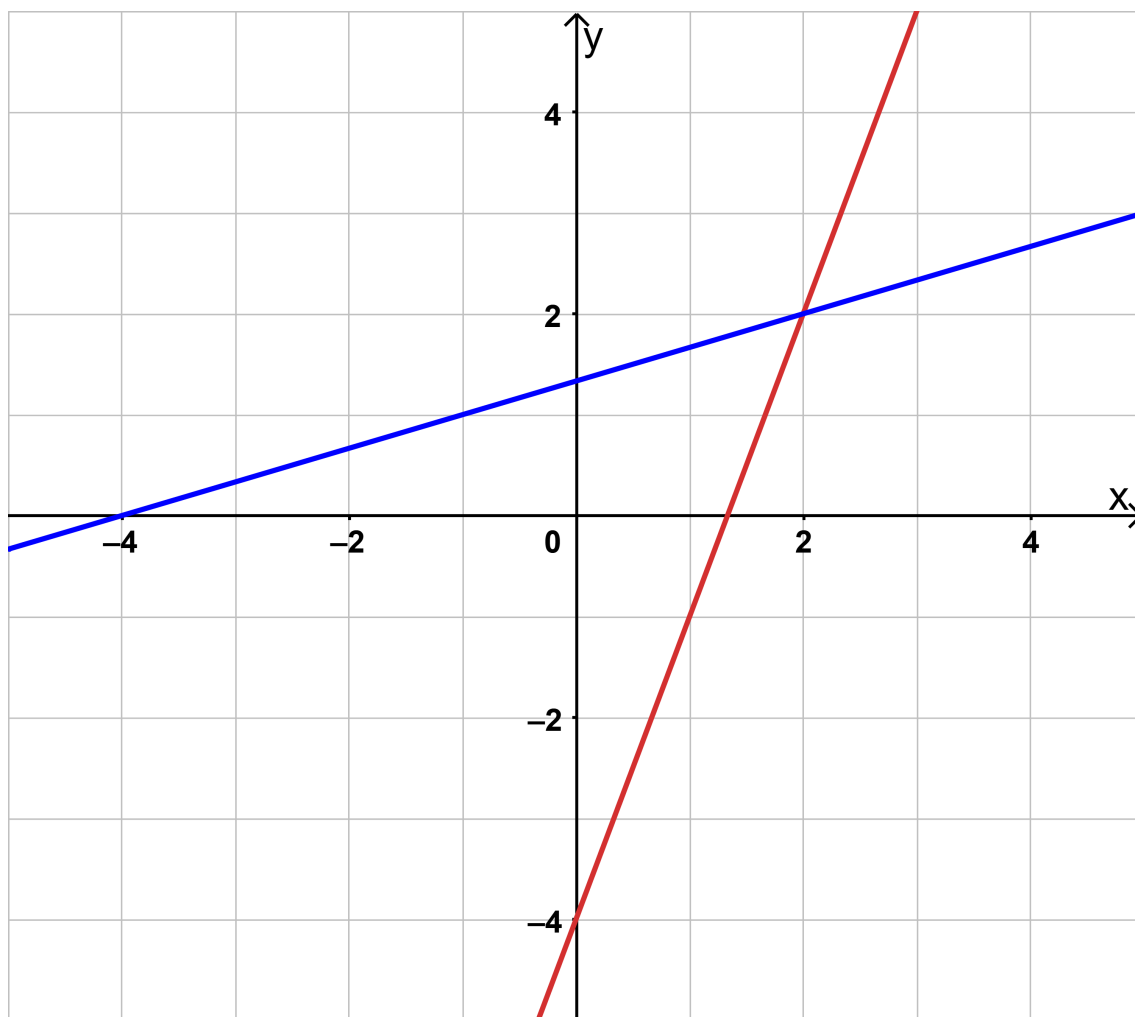


Bild 2 Die Funktion $f(x) = 3x - 4$ (rot) und ihre Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x + 4)$ (blau)

Beispiel 4:

Betrachten wir die Funktion:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = 3 \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{7}{4}.$$

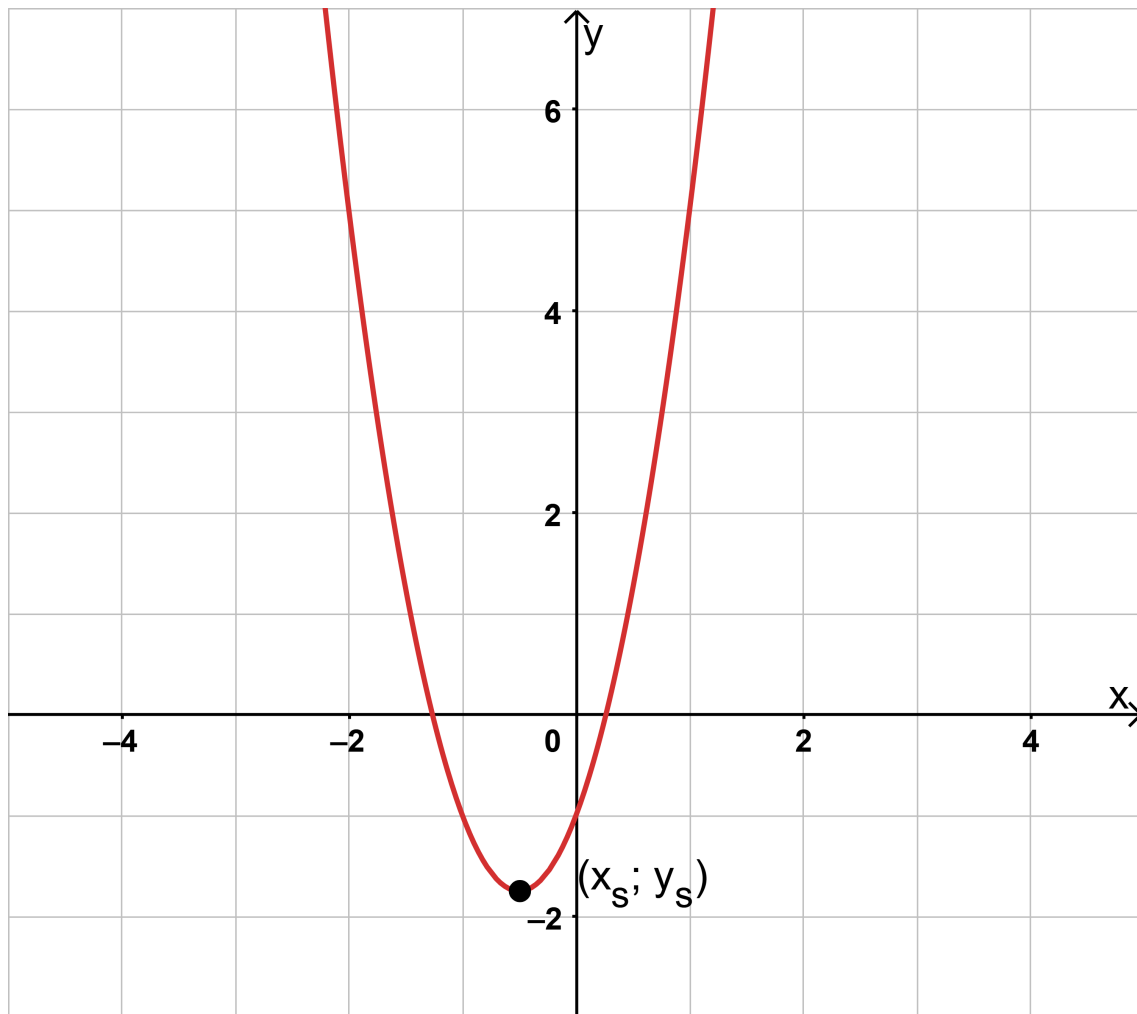


Bild 3 Die Parabel der Funktion $f(x) = 3x^2 + 3x - 1$

Der Scheitelpunkt der Parabel ist $S = (-\frac{1}{2}, -\frac{7}{4})$. Multipliziert man die Funktion aus, so erhält man $f(x) = 3x^2 + 3x - 1$. Anschaulich sieht man, dass man f nicht umkehren kann:

Für $y < -\frac{7}{4}$ gibt es keine Urbilder.

Für $y = -\frac{7}{4}$ gibt es genau ein Urbild.

Für $y > -\frac{7}{4}$ gibt es zwei Urbilder.

Diese anschaulichen Aussagen kann man rechnerisch verifizieren.

Um die Umkehrfunktion zu ermitteln, löst man zunächst die Gleichung $y = 3x^2 + 3x - 1$ nach x auf:

$$\begin{aligned}
 y &= 3x^2 + 3x - 1 & | -y \\
 0 &= 3x^2 + 3x - (1 + y) & | : 3 \\
 0 &= x^2 + x - \frac{1+y}{3} & | \text{p-q-Formel anwenden} \\
 x_{1,2} &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{3} \left(y + \frac{7}{4} \right)}
 \end{aligned}$$

Anhand dieser Lösung kann man die drei obigen anschaulichen Beobachtungen sehen:

1. Für $y < -\frac{7}{4}$ existiert keine Lösung, da der Term unter der Wurzel dann negativ wird.

2. Für $y = -\frac{7}{4}$ existiert genau eine Lösung $x = -\frac{1}{2}$.
3. Für $y > -\frac{7}{4}$ existieren immer zwei Lösungen x_1 und x_2 .

Teilt man die Definitionsmenge am Scheitelpunkt der Parabel in zwei Teile $D_1 = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -\frac{1}{2}\}$ und $D_2 = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -\frac{1}{2}\}$, so taucht in jedem der beiden Teile der Funktion jeder Funktionswert y nur einmal auf. Man erhält so zwei umkehrbare Funktionen. Deren Definitionsmengen und die Zuordnungsvorschriften werden nun genauer angegeben.

Die Lösung x_1 (mit dem Pluszeichen vor der Wurzel) liegt in D_1 , die Lösung x_2 (mit dem Minuszeichen vor der Wurzel) liegt in D_2 . Schränkt man die Definitionsmenge D_f auf entweder D_1 oder D_2 und zusätzlich die Zielmenge auf $Z = \{y \in \mathbb{R} | y \geq -\frac{7}{4}\}$ ein, entstehen also zwei neue, umkehrbare Funktionen:

$$f_1 : D_1 \rightarrow Z, \quad f_1(x) = 3x^2 + 3x - 1$$

und

$$f_2 : D_2 \rightarrow Z, \quad f_2(x) = 3x^2 + 3x - 1$$

mit den Umkehrfunktionen

$$f_1^{-1} : Z \rightarrow D_1, \quad f_1^{-1}(y) = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{3} \left(y + \frac{7}{4} \right)}$$

und

$$f_2^{-1} : Z \rightarrow D_2, \quad f_2^{-1}(y) = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{3} \left(y + \frac{7}{4} \right)}.$$

Um die Graphen dieser Funktionen in das gleiche Koordinatensystem einzeichnen zu können wie f , benennt man abschließend die Variable y in x um und schreibt:

$$f_1^{-1}(x) = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{3} \left(x + \frac{7}{4} \right)}$$

und

$$f_2^{-1}(x) = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{3} \left(x + \frac{7}{4} \right)}.$$

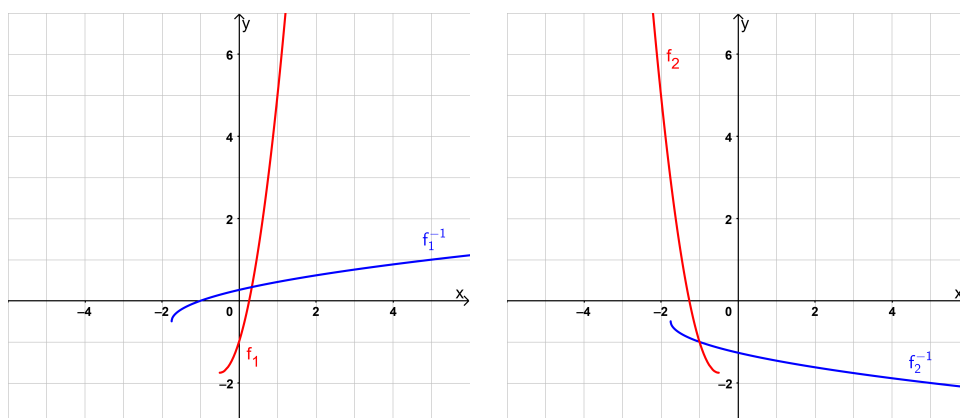


Bild 4 Die Funktionen (rot) $f_1(x) = 3x^2 + 3x - 1$, $x > -\frac{1}{2}$, und $f_2(x) = 3x^2 + 3x - 1$, $x < -\frac{1}{2}$, mit ihren Umkehrfunktionen (blau)

Anschaulich entsteht der Graph der Umkehrfunktion von f , indem man den Graphen der Funktion f an der ersten Winkelhalbierenden ($y = x$) spiegelt.

Wahrscheinlich sind dir schon weitere Umkehrfunktionen begegnet: Der natürliche Logarithmus $\ln(x)$ ist die Umkehrfunktion der e -Funktion e^x . Und die Umkehrfunktionen $\arcsin$, $\arccos$ und $\arctan$ von $\sin$, $\cos$ und $\tan$ hast du benutzt, um Winkel in Dreiecken zu berechnen.

Operationen mit Funktionen

Definition 6:

Sei $D \subset \mathbb{R}$. Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit der gleichen Definitionsmenge. Dann kann man die **Summe**, die **Differenz** und das **Produkt** der beiden Funktionen definieren durch:

$$\begin{aligned} f + g : D &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto (f + g)(x) := f(x) + g(x), \\ f \cdot g : D &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x), \\ f - g : D &\rightarrow \mathbb{R}, & x &\mapsto (f - g)(x) := f(x) - g(x). \end{aligned}$$

Gilt $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, dann kann man auch den **Quotienten** definieren als:

$$\frac{f}{g} : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Beispiel 5:

Gegeben seien die beiden Funktionen:

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x - 3$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = 2x$. Man bildet die Summen- und Produktfunktion, die ebenfalls als Definitions- und Zielmenge $\mathbb{R}$ besitzen:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x - 3 + 2x = 3x - 3$$

und

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x - 3)2x = 2x^2 - 6x.$$

Beispiel 6:

Gegeben seien die beiden Funktionen:

$f : \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{3}\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x^2 + 4$ und $g : \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{3}\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = 3x + 1$. Sie besitzen also die gemeinsame Definitionsmenge

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{3}\right\}.$$

Die Quotientenbildung ist möglich, da $g(x) \neq 0$ für alle Argumente x aus D gilt. Es ergibt sich folgende neue Funktion (Quotient) mit der Definitionsmenge D :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x^2 + 4}{3x + 1}.$$

Beispiel 7:

Ist eine der beiden Funktionen eine konstante Funktion, erhält man einen einfachen Spezialfall.

Gegeben seien die beiden Funktionen:

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 1,5$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = 2$. Bildet man die Summen- und Produktfunktion, die ebenfalls als Definitions- und Zielmenge $\mathbb{R}$ besitzen, so erhält man:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 1,5 + 2 = x^2 + 0,5$$

und

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 1,5) \cdot 2 = 2x^2 - 3.$$

Vergleicht man die dazugehörigen Graphen, so stellt man fest, dass die Addition einer Konstanten (hier: 2) einen Funktionsgraphen entlang der y -Achse verschiebt, während die Multiplikation mit einer Konstanten zu einer Streckung oder Stauchung führt.

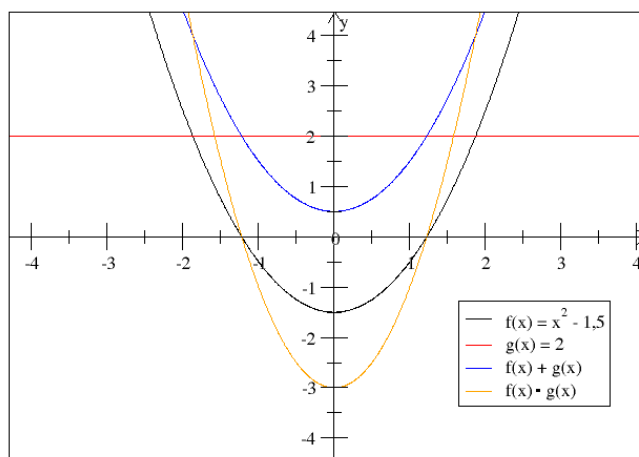


Bild 5

Man **verkettet** zwei gegebene Funktionen f und g zu einer neuen Funktion, indem man die Funktionswerte $f(x)$ als Argument für die Funktion g verwendet und $g(f(x))$ bildet. Die Funktionen f und g werden nacheinander ausgeführt. Das setzt voraus, dass man die Funktionswerte von f überhaupt in g einsetzen darf.

Definition 7:

Seien $D_f, D_g \subset \mathbb{R}$, seien $f : D_f \rightarrow Z_f, g : D_g \rightarrow Z_g$ Funktionen. Die Wertemenge $f(D_f)$ der Funktion f sei in der Definitionsmenge D_g der Funktion g enthalten. Dann kann man g nach f ausführen und erhält die **Verkettung** von f und g (sprich g verknüpft mit f). Man schreibt dafür:

$$(g \circ f) : D_f \rightarrow Z_g, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Es sind auch Verkettungen von mehr als zwei Funktionen möglich.

Zu beachten ist dabei, dass man bei einer Verknüpfung $g \circ f$ zuerst die Abbildung mit f durchführt und anschließend mit g abbildet, d. h. man setzt die Funktionswerte von f als Argumente von g ein und erhält so $g \circ f$. Insofern müssen Verkettungen in Bezug auf die Reihenfolge der Abbildungsschritte von rechts nach links gelesen werden.

Für $g \circ f$ werden neben „ g verknüpft mit f “ üblicherweise noch die Bezeichnungen „ g Kringle f “ und „ g komponiert mit f “ verwendet. Um die Reihenfolge der einzelnen Abbildungsschritte noch

einmal zu unterstreichen, werden manchmal auch die Sprechweisen „ g nach f “ oder „erst f , dann g “ eingesetzt.

Man kann sich das Hintereinanderausführen auch als Kombination von 2 Maschinen vorstellen:

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$$

Beispiel 8:

Man betrachte die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 3 \text{ und } g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x} + 1.$$

Hier ist also $D_f = \mathbb{R}$ und $D_g = \mathbb{R}_0^+$.

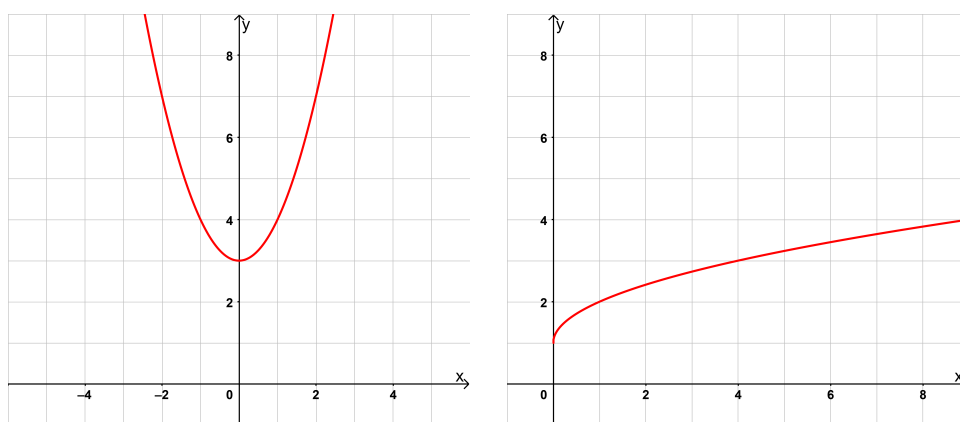


Bild 6 $f(x) = x^2 + 3$ (links), $g(x) = \sqrt{x} + 1$ (rechts)

Die Wertemenge von f ist $f(D_f) = \{y | y \geq 3\}$. Da das eine Teilmenge von $D_g = \mathbb{R}_0^+$ ist, ist eine Verkettung möglich und ergibt

$$(g \circ f) : D_f \rightarrow Z_g,$$

mit

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2 + 3) \\ &= \sqrt{x^2 + 3} + 1. \end{aligned}$$

Die Wertemenge von g ist $f(D_g) = \{y | y \geq 1\}$. Da das eine Teilmenge von $D_f = \mathbb{R}$ ist, ist eine Verkettung möglich und ergibt

$$(f \circ g) : D_g \rightarrow Z_f,$$

mit

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(\sqrt{x} + 1) \\ &= (\sqrt{x} + 1)^2 + 3 \\ &= x + 2\sqrt{x} + 4. \end{aligned}$$

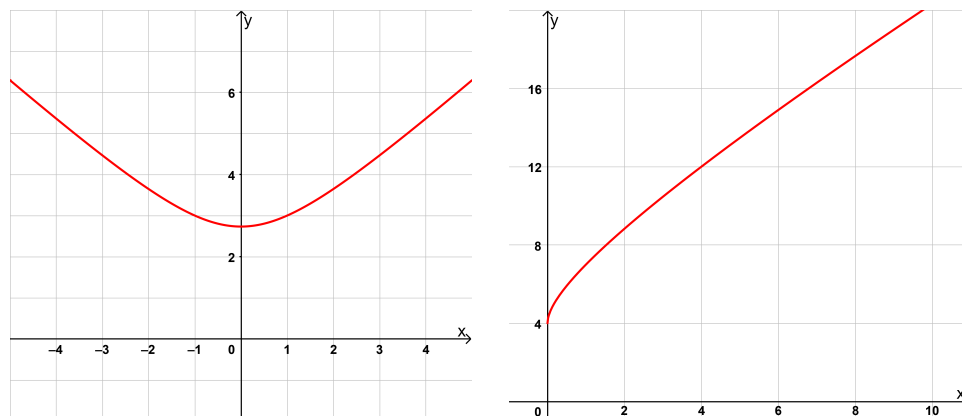


Bild 7 Die Verkettung der Funktionen f und g : Links $g \circ f$, rechts $f \circ g$

Bemerkung: Es ist zu beachten, dass $(g \circ f)$ und $(f \circ g)$ im Allgemeinen unterschiedliche Funktionen sind (siehe vorangehendes Beispiel).

Beispiel 9:

Als Beispiel für die Verkettung mehrerer Funktionen nehme man $f \circ (g \circ h)$ mit

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & f(x) &= x^2, \\ g &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & g(x) &= 3x \\ \text{und} & & h &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & h(x) &= x - 5. \end{aligned}$$

Da die Definitions- und Zielmengen aller Funktionen übereinstimmen, sind alle beliebigen Verkettungen möglich und man kann zunächst h in g einsetzen. Dabei erhält man

$$g \circ h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (g \circ h)(x) = 3 \cdot (x - 5).$$

Für die letzte Verkettung von f mit $g \circ h$ setzt man noch $g \circ h$ in f ein. Dies ergibt letztlich

$$f \circ (g \circ h) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$(f \circ (g \circ h))(x) = f(3 \cdot (x - 5)) = (3 \cdot (x - 5))^2.$$

Allgemein lässt sich darüber hinaus zeigen, dass bezüglich Verkettungen das Assoziativgesetz $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ für beliebige Funktionen f, g , und h gilt. Wir wollen die Gültigkeit dieser Aussage zwar hier nicht allgemein beweisen, aber zumindest anhand unserer obigen drei Funktionen prüfen:

So gilt $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, denn einerseits ist

$$f \circ (g \circ h) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f \circ (g \circ h))(x) = (3 \cdot (x - 5))^2.$$

Andererseits ergibt sich $(f \circ g) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = (3x)^2$, da zunächst $g(x) = 3x$ in f eingesetzt wird. Da letztlich noch $h(x) = x - 5$ in $f \circ g$ eingesetzt werden muss, ist damit insgesamt

$$(f \circ g) \circ h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad ((f \circ g) \circ h)(x) = (3 \cdot (x - 5))^2$$

und somit für diesen Fall gezeigt, dass $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ gilt. Wir können also die Klammern auch weglassen, schließlich ist $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) = f \circ g \circ h$.

Aufgaben

Umkehrfunktionen

Aufgabe 1:

Entscheiden Sie für jede der nachfolgenden Funktionen, ob sie umkehrbar sind, und wenn nicht, ob sie durch eine Einschränkung von Definitions- und/ oder Zielmenge zu einer umkehrbaren Funktion gemacht werden können.

a) $f(x) = x + 8$

Lösung:

Zur Berechnung der Umkehrfunktion wird die gegebene Funktion nach x aufgelöst:

$$\begin{aligned} y &= x + 8 \quad | -8 \\ \Leftrightarrow y - 8 &= x \end{aligned}$$

Die Variable der Umkehrfunktion soll wieder x sein, daher werden x und y vertauscht und es bezeichnet $f^{-1}(x) = x - 8$ die Umkehrfunktion von f . Für die Definitionsmengen gelten keine Einschränkungen, also $D_f = W_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ und $W_f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = x^2 - 1$

Lösung:

Die Funktion kann z.B. auf der Definitionsmenge $D_f = [0; \infty)$ umgekehrt werden. Es wird zunächst wieder nach x aufgelöst:

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 1 \quad | +1 \\ \Leftrightarrow y + 1 &= x^2 \quad | \sqrt{} \\ \Leftrightarrow \sqrt{y + 1} &= x \end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion ist also $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 1}$. Für die Definitionsmenge der Umkehrfunktion und damit die Wertemenge von f ist $W_f = D_{f^{-1}} = [-1; \infty)$, die Wertemenge von f^{-1} entspricht D_f , also $D_f = W_{f^{-1}} = [0; \infty)$.

c) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$

Lösung:

Aufgrund der Wurzel ist die Funktion auf der Definitionsmenge $D_f = [0; \infty)$ beschränkt. Hier gilt:

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sqrt{x}}{2} \quad | \cdot 2 \\ \Leftrightarrow 2y &= \sqrt{x} \quad | \text{quadrieren} \\ \Leftrightarrow 4y^2 &= x \end{aligned}$$

Die Umkehrfunktion ist also $f^{-1}(x) = 4x^2$. Für die Definitionsmenge der Umkehrfunktion ist damit die Wertemenge von f , also $W_f = D_{f^{-1}} = [0; \infty)$, und ebenso $D_f = W_{f^{-1}} = [0; \infty)$.

d) $f(x) = 4x^2 - 40x + \frac{199}{2}$

Lösung:

Zur Berechnung der Umkehrfunktion wird die gegebene Funktion nach x aufgelöst:

$$\begin{aligned} y &= 4x^2 - 40x + \frac{199}{2} \\ \Leftrightarrow y &= 4x^2 - 40x + 100 - \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow y &= 4(x^2 - 10x + 25) - \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow y &= 4(x - 5)^2 - \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow y + \frac{1}{2} &= 4(x - 5)^2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}(y + \frac{1}{2}) &= (x - 5)^2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{4}(y + \frac{1}{2})} &= x - 5 \\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{4}(y + \frac{1}{2})} + 5 &= x \end{aligned}$$

So finden wir die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{4}(x + \frac{1}{2})} + 5$. Die Definitionsmenge der Umkehrfunktion und damit die Wertemenge von f ist damit $W_f = D_{f^{-1}} = [-\frac{1}{2}; \infty)$, da unter der Wurzel kein negativer Wert stehen darf. Die Definitionsmenge von f , für die die Umkehrfunktion gefunden werden kann, entspricht der Wertemenge von f^{-1} und ist damit $D_f = W_{f^{-1}} = [5; \infty)$.

Verkettung von Funktionen

Aufgabe 2:

Unter welchen Voraussetzungen kann man zwei beliebige Funktionen f und g addieren?

Auf was muss bei der Division $\frac{f}{g}$ geachtet werden?

Lösung:

Um Funktionen addieren und dividieren zu können, müssen diese eine gemeinsame Definitionsmenge haben. Für die Division muss zudem bei der Nennerfunktion $g(x) \neq 0$ für alle x aus der Definitionsmenge gelten.

Aufgabe 3:

Betrachten Sie die folgenden beiden Funktionen:

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & f(x) &= x^2 - 2 \\ g : \quad [-1; \infty) &\rightarrow \mathbb{R}_0^+, & g(x) &= \sqrt{x + 1} \end{aligned}$$

Kann man die folgenden Verkettungen bilden? Wenn ja, geben Sie die jeweiligen Definitions- und Wertemengen an.

a) $f \circ g$

Lösung:

Für die Verknüpfung $f \circ g$ gilt:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(\sqrt{x+1}) \\ &= (\sqrt{x+1})^2 - 2 \\ &= x + 1 - 2 \\ &= x - 1\end{aligned}$$

Daher hat $f \circ g$ die Definitionsmenge $D_{f \circ g} = [-1; \infty)$ und die Wertemenge $W_{f \circ g} = [-2; \infty)$.

b) $g \circ f$

Lösung:

Nein, denn $f(D_f) = [-2; \infty)$, und das ist keine Teilmenge von $D_g = [-1; \infty)$.